Constructions des fonctions de Lyapunov
Théorèmes d'instabilité

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 7

1. Construction par la méthode de Krasovskii
2. Construction par la méthode du gradient variable
3. Instabilité et méthode de Lyapunov
4. Théorème d'instabilité de Chetaev

Méthode de Krasovskii

Théorème

Soit $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$ et posons $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$.

$$F(x) = A^T(x) + A(x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = f(x)^T f(x)$$

est une fonction de Lyapunov avec $\dot{V} < 0$.

Démonstration :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T f(x) + f(x)^T \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} = f(x)^T (A^T(x) + A(x)) f(x)$$

Méthode de Krasovskii (variante)

Théorème

Soit $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$ et posons $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$. S'il existe $P > 0$

$$F(x) = A^T(x)P + PA(x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = f(x)^T P f(x)$$

est une fonction de Lyapunov avec $\dot{V} < 0$.

Démonstration :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T P f(x) + f(x)^T P \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = f(x)^T (A^T(x)P + PA(x)) f(x)$$

Méthode du gradient variable

La fonction de Lyapunov est l'intégrale de son gradient :

$$V(x) = \int_0^x \nabla V(\xi) d\xi$$

Paramétrisation du gradient (et non de la fonction V elle-même) :

$$\nabla V_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) x_j \qquad i = 1, \ldots, n$$

Imposer $\dot{V} < 0$:

$\Rightarrow$ choix des $a_{ij}(x_1, x_1, \ldots, x_n) \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Méthode du gradient variable

Lorsque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \qquad i \neq j$$

... l'intégration ne dépend pas du chemin :

$$\begin{aligned} V(x) \quad = \quad & \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0, \ldots, 0) d\xi_1 + \\ & \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2, 0, \ldots, 0) d\xi_2 + \\ & \ldots + \ldots + \\ & \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \ldots, \xi_n) d\xi_n \end{aligned}$$

Méthode du gradient variable

A ne pas oublier :

Vérifier que $V(x) > 0 \ \forall x \neq 0$.

Méthode du gradient variable (exemple)

Système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1^3 - x_1^2 x_2 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2^2 - x_2^3 = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

avec $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ comme point d'équilibre.

Méthode du gradient variable (exemple)

Paramètres pour le gradient :

$$\nabla V = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V_1 f_1 + \nabla V_2 f_2 &= -2a_{11}x_1^4 - a_{11}x_1^3x_2 - 2a_{12}x_1^3x_2 \\ &\quad -2a_{12}x_1^2x_2^2 - a_{12}x_1x_2^3 - a_{22}x_1x_2^3 - a_{22}x_2^4 \end{aligned}$$

Méthode du gradient variable (exemple)

Dérivée du candidat de Lyapunov :

Avec $a_{11} = 2$, $a_{12} = a_{22} = 1$:

$$\dot{V} = -4x_1^4 - 4x_1^3x_2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 - x_2^4$$

$$\dot{V} = -(2x_1 + x_2)^2x_1^2 - (x_1 + x_2)^2x_2^2 < 0$$

Intégration :

$$\begin{aligned} V &= \int_{\xi=0}^{x_1} \nabla V_1(\xi, 0)d\xi + \int_{\xi=0}^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi)d\xi \\ &= \int_0^{x_1} 2\xi d\xi + \int_0^{x_2} (x_1 + \xi)d\xi = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

Instabilité et méthode de Lyapunov

Définition de l'instabilité :

$\exists R > 0,\ \forall r, 0 < r < R,\ \exists x_0,\ \|x_0\| < r,\ \exists \bar{t} > 0,\ \mathcal{X}(x_0, \bar{t}) > R$.

Théorème d'instabilité

- $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, $V(0) \geq 0$ et $V(x) > 0\ \forall x \in \Omega \backslash \{0\}$
- $\exists \lambda > 0$, $\frac{d}{dt}V(x) - \lambda V(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$

$$\Rightarrow$$

0 est instable

Théorème d'instabilité de Chetaev

Chetaev

$\exists\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\exists\Omega_l \subset \Omega$

- $V(x) > 0, \forall x \in \Omega_l$
- $\frac{d}{dt}V(x) > 0, \forall x \in \Omega_l$
- $0 \in \partial\Omega_l$
- $V(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega_l$

$\Rightarrow 0$ est instable