

Méthode de Lyapunov et Théorème d'invariance de LaSalle

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

- 1 Stabilité locale et linéarisation
- 2 Stabilité globale
- 3 Théorème d'invariance de LaSalle
 - Ensemble invariant
 - Ensemble défini par $\dot{V} = 0$
 - Théorème d'invariance de LaSalle
 - Exemple du pendule

Stabilité locale et linéarisation

Constituants :

- 1 Système $\dot{x} = f(x)$
- 2 Point d'équilibre $\bar{x}$

Matrice du système linéaire approximant :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Objectif :

Déterminer la stabilité de $\dot{x} = f(x)$ en examinant A .

Stabilité locale et linéarisation

Théorème

A partir de la matrice A , on calcule les valeurs propres

$$\Lambda = \lambda(A)$$

Si

- $\forall \lambda \in \Lambda, \Re(\lambda) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ est stable
- $\exists \lambda \in \Lambda, \Re(\lambda) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ est instable.
- $\forall \lambda \in \Lambda, \Re(\lambda) \leq 0$ et $\exists \lambda_1 \in \Lambda, \Re(\lambda_1) = 0 \Rightarrow$ on ne peut pas conclure.

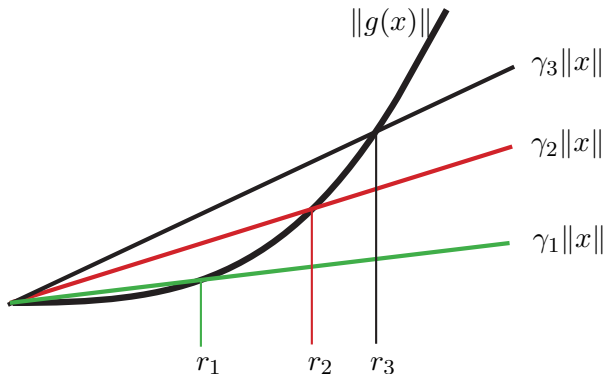
ATTENTION

La conclusion est relative à la dynamique $\dot{x} = f(x)$, bien que l'on calcule les valeurs propres de A .

Démonstration

$$\dot{x} = f(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + g(x) = Ax + g(x)$$

$$\forall \gamma, \exists r \quad \|x\| < r \Rightarrow \gamma \|x\| > \|g(x)\|$$



Démonstration (suite)

Comme A est stable $\forall Q > 0, \exists P > 0$

$$A^T P + P A = -Q$$

et donc en posant $V = x^T P x$, avec $\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax + g(x))^T P x + x^T P (Ax + g(x)) \\ &= x^T (A^T P + P A) x + g(x)^T P x + x^T P g(x) \\ &= -x^T Q x + 2x^T P g(x)\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P g(x) \leq -x^T Q x - 2|x^T P g(x)|$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|a^T b| \leq \|a\| \|b\|$ on déduit

$$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2\|x\| \|P\| \|g(x)\|$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \|g(x)\|/\|x\| = 0$, $\forall \gamma > 0$, $\exists r$, $\forall x \leq r \Rightarrow 2\|g(x)\| < \gamma\|x\|$.

$$\dot{V} < -x^T Q x + \gamma\|P\|\|x\|^2$$

Démonstration (fin)

$$\dot{V} < -x^T Q x + \gamma \|P\| \|x\|^2$$

Sachant que $-x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2$ on a donc

$$\dot{V} < -(\lambda_{\min}(Q) - \gamma \|P\|) \|x\|^2$$

Il suffit de choisir γ suffisamment petit afin que $(\lambda_{\min}(Q) - \gamma \|P\|) > 0$.
Ainsi pour le r associé au γ choisi, $\dot{V} < 0, \forall x, \|x\| < r$.

Conclusion :

$\dot{x} = f(x)$ est localement asymptotiquement stable.

Stabilité globale

Question :

Est-ce qu'il suffit de vérifier $V > 0$ et $\dot{V} \leq 0$ pour tout $x \neq 0$?

... malheureusement, ce n'est pas suffisant.

Contre-exemple

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2}\end{aligned}$$

Candidat de Lyapunov :

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2.$$

Localement...

.... c'est une fonction de Lyapunov :

$$\dot{V} = \frac{-12x_1^2 - 4(1 + x_1^2)^2 x_2^2}{(1 + x_1^2)^4} < 0$$

Le système est instable pour certaines conditions initiales

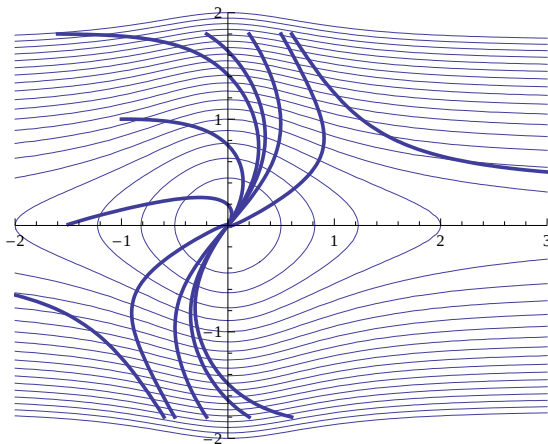


FIGURE : ... à cause de la non-fermeture des courbes de niveau de V .

Fonction radialement non bornée

Il est nécessaire que :

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Théorème

S'il existe une fonction V telle que

- ❶ $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $V(0) = 0$
- ❷ $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- ❸ $\frac{d}{dt}V(x) < 0, \forall x \neq 0$

alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Motivation

Etablir la stabilité asymptotique

- Lorsque $\dot{V} \leq 0$ au lieu de $\dot{V} < 0$

Etudier les cycles limites

- En utilisant le fait que le cycle limite est un ensemble invariant

Ensemble invariant

Définition

Un ensemble invariant $\mathcal{I}$, pour un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, est défini comme un ensemble de conditions initiales x_0 , tel que la solution $\mathcal{X}(x_0, t)$ reste dans l'ensemble $\mathcal{I} \forall t$, c.-à-d.

$$\mathcal{I} = \{x | x_0 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}(x, t) \in \mathcal{I} \quad \forall t \geq 0\}$$

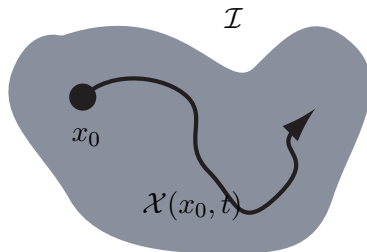


FIGURE : Ensemble invariant $\mathcal{I}$

Ensemble défini par $\dot{V} = 0$

Ensemble $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$$

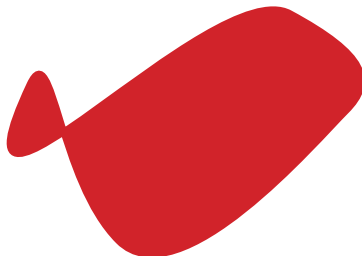


FIGURE : Ensemble des points pour lesquels $\dot{V} = 0$.

Théorème d'invariance de LaSalle

Théorème

Soit $l > 0$, et $\Omega_l = \{x | V(x) \leq l\}$:

- Ω_l fermé et borné
- $\forall x \in \Omega_l$ on a $\dot{V} \leq 0$
- $\mathcal{V} \subset \Omega_l$ et $\mathcal{V} = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$
- $\mathcal{I}$ le plus grand ensemble invariant, $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$

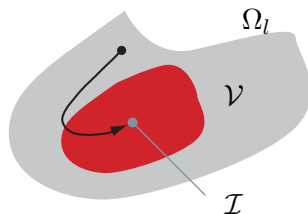
$$\Rightarrow \forall x_0 \in \Omega_l, \mathcal{X}(x_0, t) \rightarrow \mathcal{I} \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Particularités

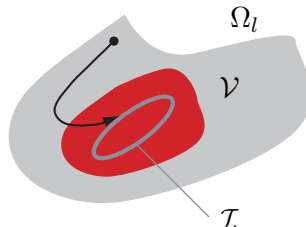
Remarques

- 1 Il n'y est pas question de stabilité, mais uniquement de convergence.
- 2 La fonction $V(x)$ n'est pas nécessairement définie positive.
- 3 La stabilité asymptotique est garantie lorsque la condition $V > 0$, $x \neq 0$ et $V(0) = 0$ est explicitement ajoutée.

Illustrations



point d'équilibre



cycle limite

FIGURE : Le théorème d'invariance s'applique aussi bien aux points d'équilibre qu'aux cycles limites.

Exemple du pendule (modèle d'état)

$$E_{cin} = 1/2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1/2m\dot{\theta}^2.$$

$$E_{pot} = mg(1 - \cos \theta).$$

$$L = E_{cin} - E_{pot}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_{\theta}$$

conduit, avec $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, à :

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = -g \sin x_1 - \frac{b}{m}x_2 = f_2$$

Exemple du pendule (candidat de Lyapunov)

Candidat de Lyapunov :

$$V = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mx_2^2 + mg(1 - x_1)$$

Cette fonction est positive pour autant que $\dot{\theta}$ et le second terme ne s'annulent pas simultanément. Par conséquent, V est nul pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f = mx_2(-g \sin x_1 - \frac{b}{m}x_2) + mgx_2 \sin x_1 = -bx_2^2 \leq 0.$$

Exemple du pendule (ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$)

L'ensemble $\mathcal{V} = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$:

$\mathcal{V} = \{x_1, x_2 | x_2 = 0\}$ est la droite horizontale passant par l'origine.

L'ensemble $\mathcal{I}$, le plus grand invariant inclu dans $\mathcal{V}$:

$f(x)$ définissant la dynamique soit tangent ou nul à l'axe horizontal des abscisses.

$$f_2(x) = 0$$

$$g \sin x_1 = 0$$

C'est une multitude de points isolés $\dot{\theta} = 0$, $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple du pendule (illustrations)

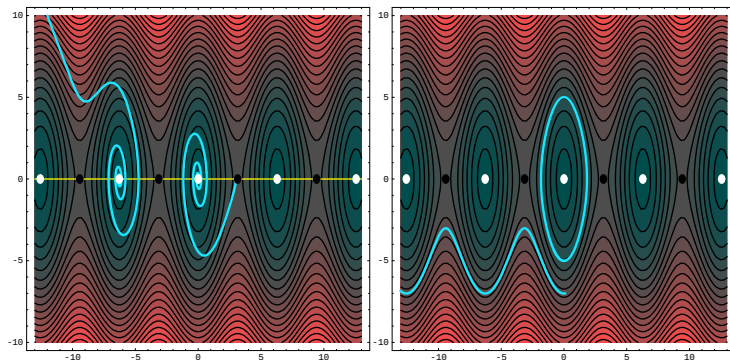


FIGURE : (θ selon l'axe horizontal et $\dot{\theta}$ selon la verticale) A gauche, le frottement est non nul. L'ensemble $\mathcal{V}$ est représenté en jaune et $\mathcal{I}$ correspond aux points blancs (minimum de V), et aux points noirs (extremum de V , points selle). A droite, le frottement est nul.