Méthode du Premier Harmonique
(1ère partie)

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 3

1. Système linéaire et non-linéarité statique
2. Excitation sinusoïdale en boucle ouverte
3. Caractéristique passe-bas du système linéaire
4. Gain complexe équivalent
   - Décomposition en harmoniques
   - Calcul des premiers coefficients
   - Equivalent du premier harmonique
   - Exemple de la saturation

Système linéaire et non-linéarité statique

Mise en série

- Non linéarité statique
- Fonction de transfert

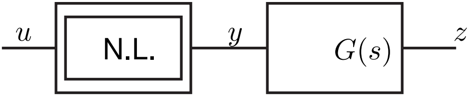


FIGURE : Bloc non-linéaire statique N.L. et fonction de transfert $G(s)$

Excitation sinusoïdale en boucle ouverte

$$u(t) = A\sin(\omega t) \quad (1)$$

$$y(t) = \hat{\phi}(u(t)) = \begin{cases} ka & u(t) > a \\ ku(t) & -a \leq u(t) \leq a \\ -ka & u(t) < -a \end{cases} \quad (2)$$

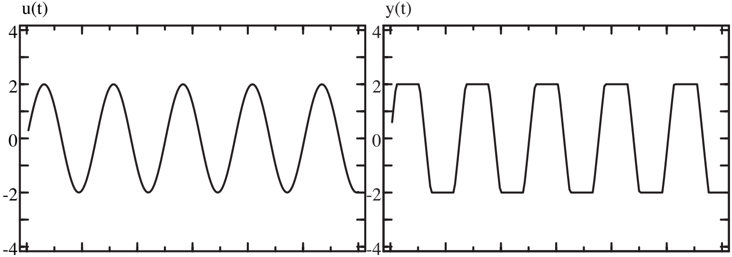


FIGURE : $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$ et $a = 1$.

Caractéristique passe-bas du système linéaire

$$G(s) = \frac{b^2}{s^2 + 2bs + b^2} \quad (3)$$

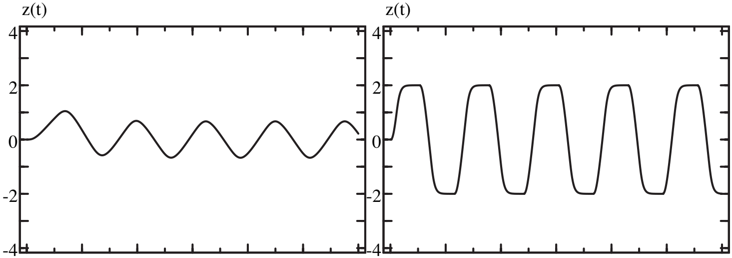


FIGURE : $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$ et $a = 1$. A gauche $b = 3$. A droitre $b = 30$.

Gain complexe équivalent

Nombre complexe

$N(A, \omega)$

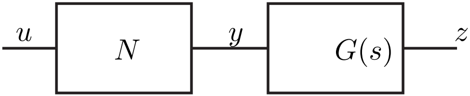


FIGURE : La non-linéarité statique N.L. $\Rightarrow$ gain équivalent N

Gain complexe équivalent

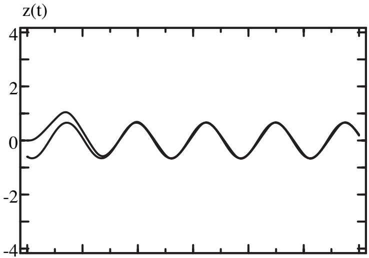


FIGURE : Sortie du système linéaire lorsque $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$, $a = 1$ et $b = 3$. Une sinusoïde $0.329A\sin(\omega t - 2.00)$ y est superposée.

Décomposition en harmoniques

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[a_l \cos(l\omega t) + b_l \sin(l\omega t) \right] \tag{4}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) d(\omega t) \tag{5}$$

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(l\omega t) d(\omega t) \tag{6}$$

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(l\omega t) d(\omega t) \tag{7}$$

Calcul des premiers coefficients

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) d(\omega t) \tag{8}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \tag{9}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t), \tag{10}$$

Equivalent du premier harmonique

$$y(t) \approx a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = a_0 + M \sin(\omega t + \alpha),$$

l'amplitude M et la phase α s'obtiennent à partir de a_1 et b_1 par

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \alpha(A, \omega) &= \arctan(a_1/b_1). \end{aligned}$$

Lorsque la non-linéarité est parfaitement symétrique, $a_0 = 0$, et le gain équivalent devient :

$$N(A, \omega) = M \frac{e^{j\omega t + \alpha}}{Ae^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\alpha} = \frac{1}{A}(b_1 + ja_1). \tag{11}$$

Exemple de la saturation

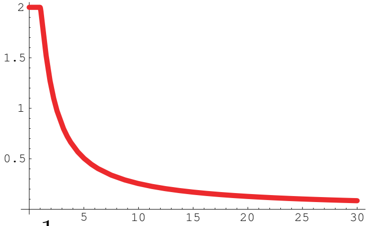
$$A \leq a \qquad y(t) = kA\sin(\omega t)$$

$$A > a \qquad y(t) = \begin{cases} kA\sin\omega t & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ ka & \gamma < \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \gamma = \arcsin(a/A)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\gamma} A\sin^2(\omega t)d\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} ka\sin(\omega t)d\omega t \quad = \quad \frac{kA}{2\pi}\left[\gamma + \frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right]$$

Exemple de la saturation

$$N(A) = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A}\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}\right] & A > a \end{cases}$$



$k = 2,\, a = 1$

$\frac{A}{a}$

FIGURE : Gain équivalent purement réel de la saturation. Il diminue en fonction de l'amplitude.