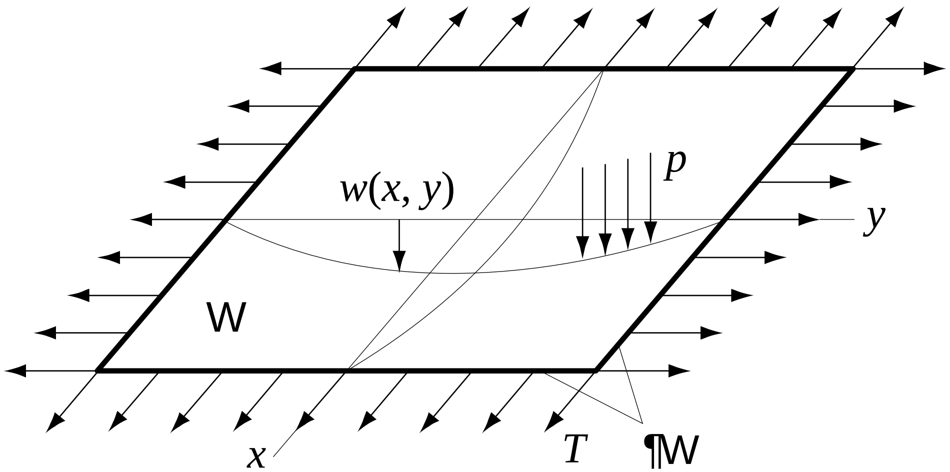
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Déformée transversale d'une membrane tendue



T tension uniforme
p charge répartie
w déformée

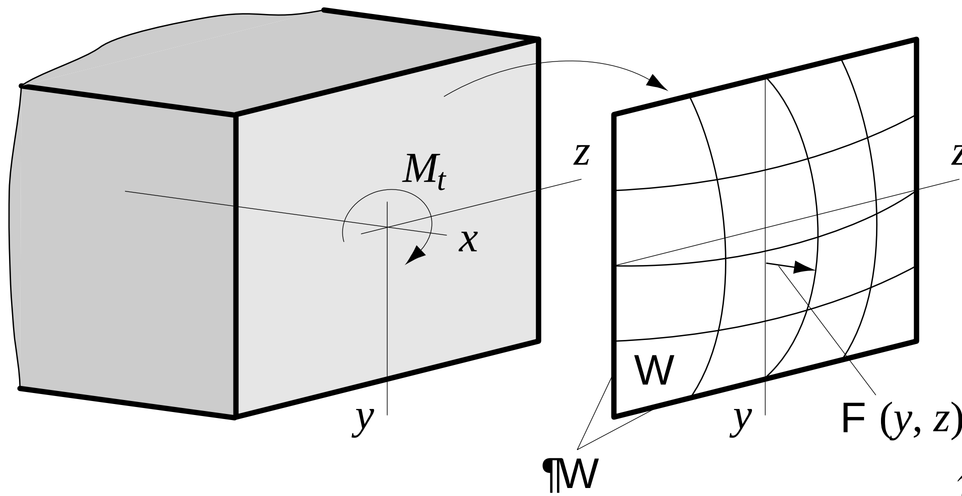
$$T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + p = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

$$w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Torsion d'un barreau non circulaire (analogie de la membrane)



M_t moment de torsion

Φ fonction de contrainte

G module de glissement

θ angle de torsion unitaire

$\tau_{xy},\ \tau_{xz}$ contraintes de cisaillement

$$\tau_{xy} = \partial \Phi / \partial z$$

$$\tau_{xz} = -\partial \Phi / \partial y$$

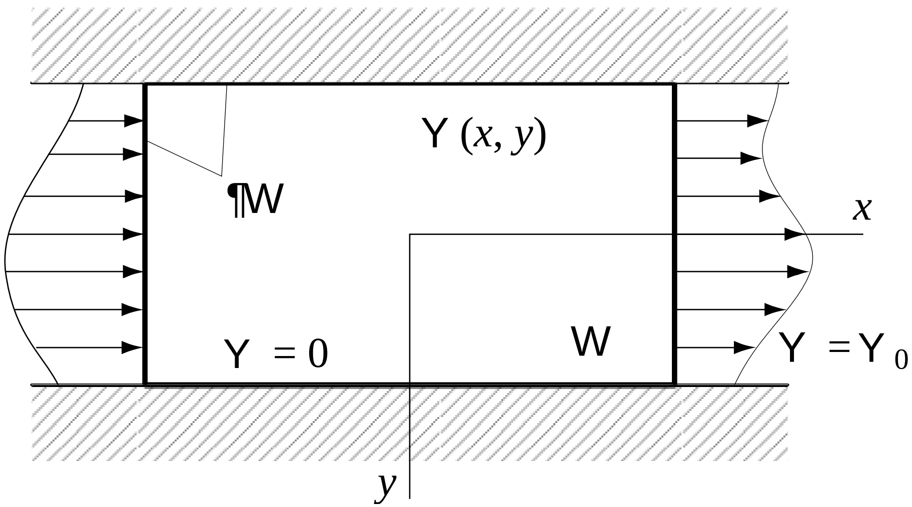
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Écoulement irrotationnel plan incompressible



Ψ fonction de courant

Ψ_0 fonction de courant imposée

v_x, v_y vitesses de l'écoulement

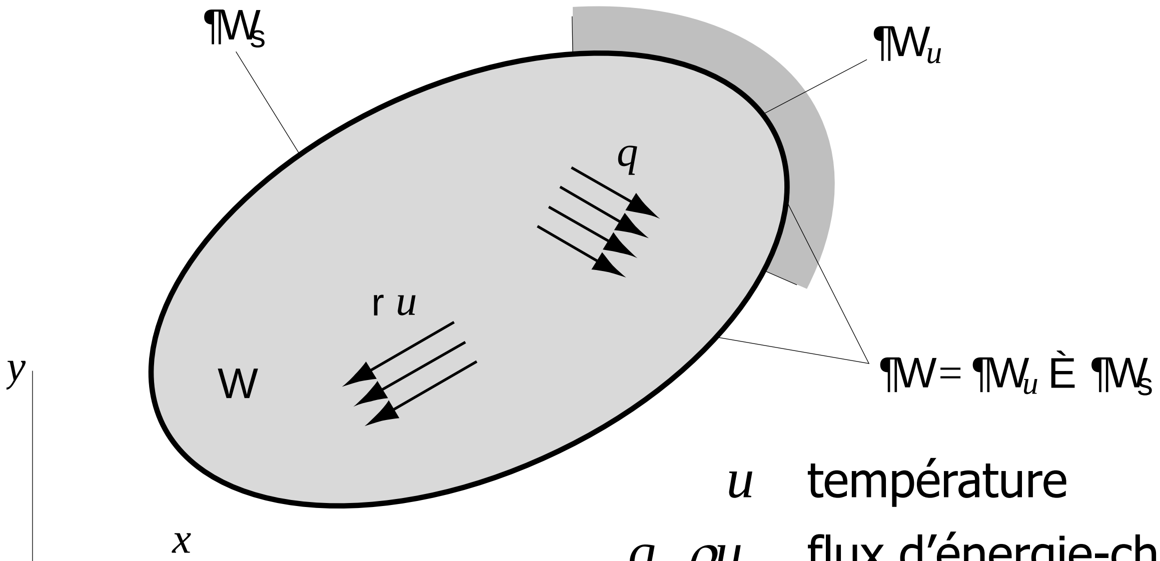
$$v_x = \partial \Psi / \partial y$$
$$v_y = -\partial \Psi / \partial x$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Laplace

$$\Psi = \Psi_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Problème modèle du transfert-chaleur par conduction

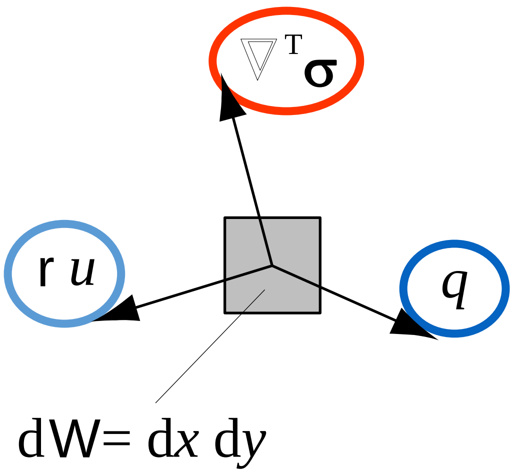


u	température
$q,\ \rho u$	flux d'énergie-chaleur
$\partial\Omega_u\,,\ \partial\Omega_\sigma$	frontières à température ou flux imposé

Milieu bidimensionnel soumis à un transfert-chaleur par conduction (régime permanent)

Formulation forte du problème

- Principe de conservation (bilan des flux d'énergie-chaleur dans un volume de contrôle dΩ)

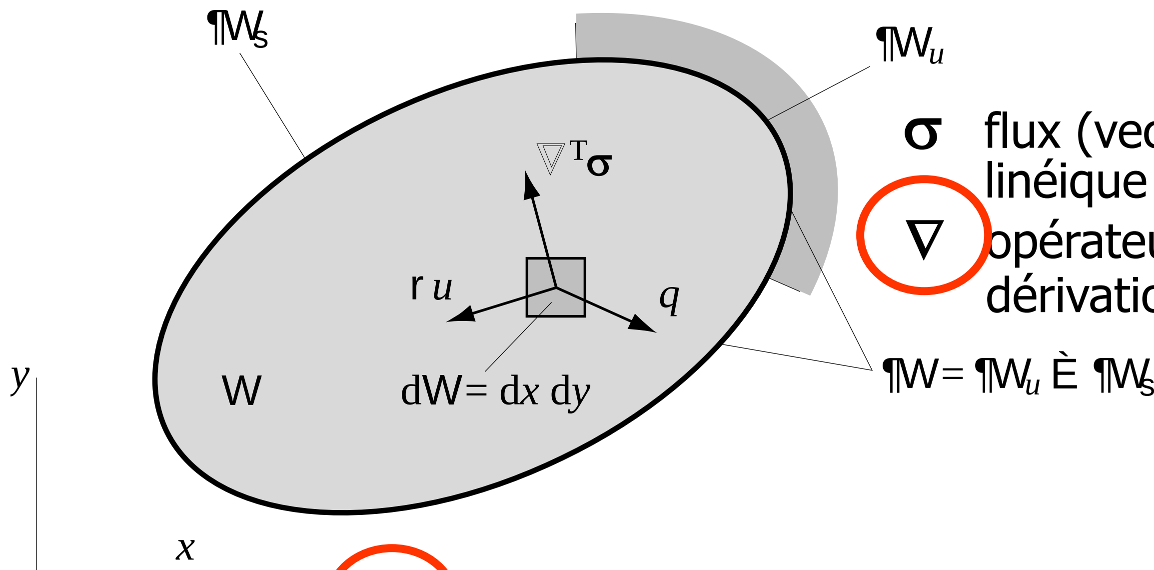


- Flux interne d'énergie-chaleur pénétrant
- Flux interne d'énergie-chaleur absorbé (dégagé) par un puits (source) surfacique de chaleur proportionnel à la température
- Flux interne d'énergie-chaleur dégagé (absorbé) par une source (puits) surfacique de chaleur indépendante de la température

Signe des flux internes d'énergie-chaleur

Formulation forte du problème

- Équation d'équilibre



$\boldsymbol{\sigma}$ flux (vecteur) linéique de chaleur

∇ opérateur de dérivation (grad)

$$\nabla^{T}\boldsymbol{\sigma}(x, y) + \rho(x, y)\, u(x, y) = q(x, y)$$

dans Ω

! ∇^{T} = div

$$\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]^{T}$$

Formulation forte du problème

- Loi de comportement (loi de Fourier)

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = -\kappa(x, y)\, \nabla u(x, y)$$

κ coefficient de conductibilité thermique
∇u gradient du champ de température

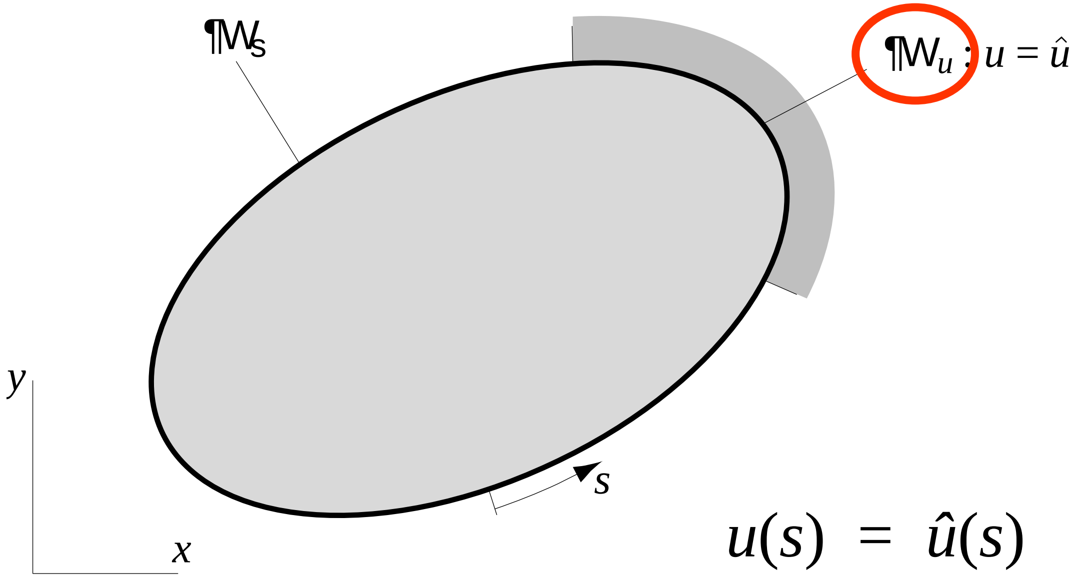
Linéarité du gradient de température

- Séparation de la frontière en limites essentielle et naturelle

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$$
$$\varnothing = \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Conditions aux limites essentielles sur le bord $\partial\Omega_u$

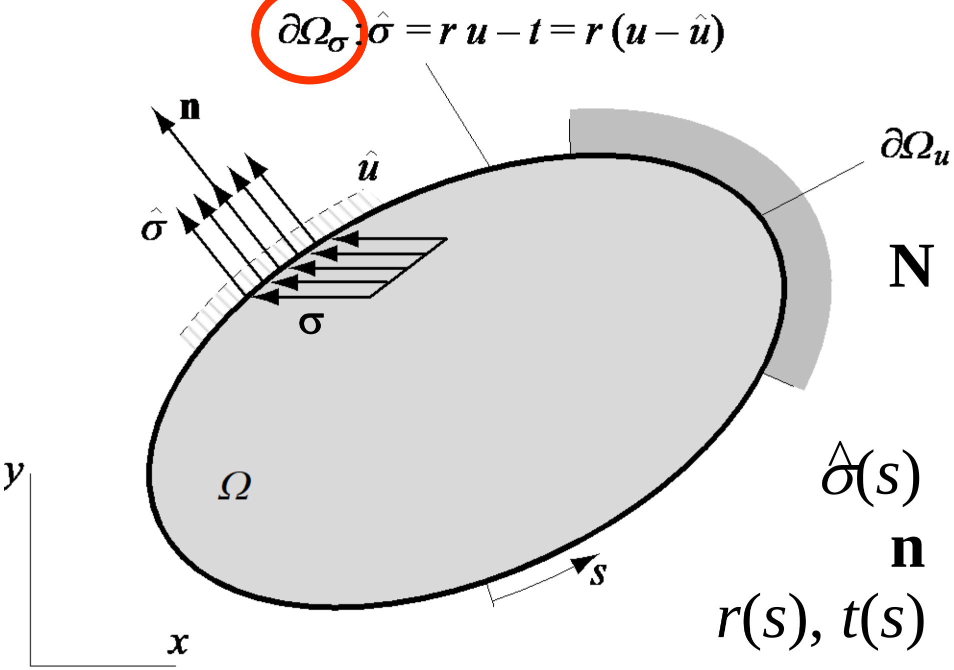


$$u(s) = \hat{u}(s) \quad \forall\, s \in \partial\Omega_u$$

$\hat{u}(s)$ température fixée

Formulation forte du problème

- Conditions aux limites naturelles sur le bord $\partial\Omega_\sigma$



$\mathbf{N}$ opérateur des cosinus directeurs de $\mathbf{n}$

$\mathbf{N} = [n_x, n_y]^{\mathrm{T}}$

$\hat{\sigma}(s)$ flux normal

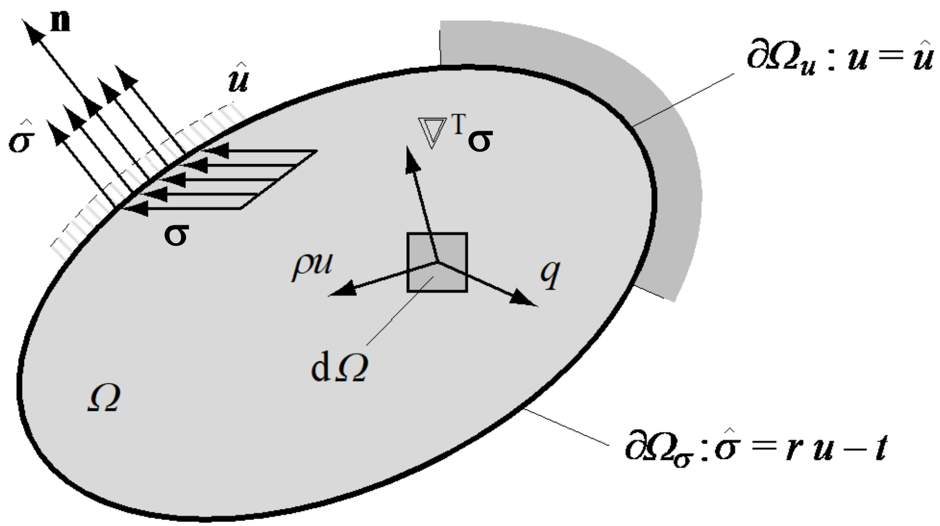
$\mathbf{n}$ normale extérieure

$r(s)$, $t(s)$ fonctions données

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}(s) = \hat{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s)\cdot\mathbf{n} = r(s)\,u(s) - t(s)\ \forall\ s \in \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



Dérivée directionnelle

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \; : \; \nabla^T(-\kappa \nabla u) + \rho u = q \qquad \text{dans } \Omega$$

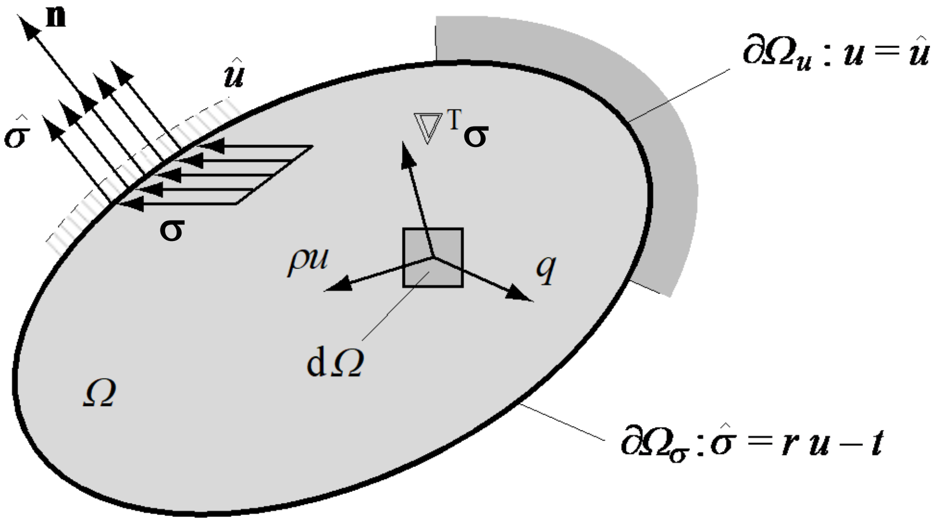
$$u = \hat{u} \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$\mathbf{N}^T(-\kappa \nabla u) = -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa(\partial u/\partial n)$$

$$= r\,u - t \qquad \text{sur } \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



$$u \in C^2(\bar{\Omega}) : \quad \nabla^T(-\kappa \nabla u) + \rho u = q \qquad \text{dans } \Omega$$

$$u = \hat{u} \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

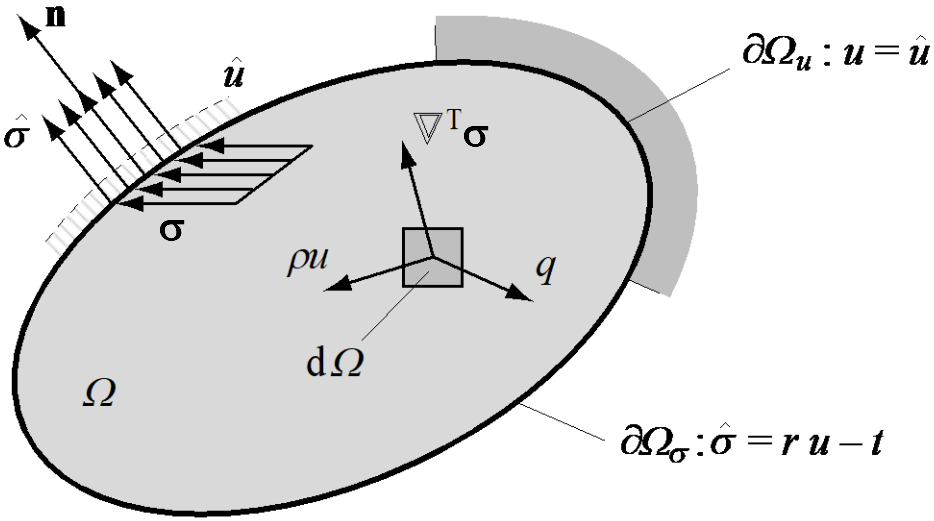
$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

$$\mathbf{N}^T(-\kappa \nabla u) = -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa(\partial u / \partial n)$$

$$= r\,u - t \qquad \text{sur } \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



Régularité des fonctions

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \ : \ \nabla^{\mathrm{T}}(-\kappa \nabla u) + \rho u = q \qquad \text{dans } \Omega$$

$$u = \hat{u} \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(-\kappa \nabla u) = -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa(\partial u / \partial n)$$

$$= r u - t \qquad \text{sur } \partial\Omega_\sigma$$

Forme intégrale du problème

- Forme intégrale

$$\int_{\Omega} [\nabla^{T} (-\kappa \nabla u) + \rho\, u - q]\, \delta u \, dx\, dy = 0 \quad \forall\ \delta u$$

δu température virtuelle

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle pour l'intégration par parties du terme $\int_{\Omega} [\nabla^{T} (-\kappa \nabla u)]\, \delta u \, dx\, dy$
  - Divergence du produit du vecteur $-\kappa \nabla u$ par le scalaire δu

$$\nabla^{T} [(-\kappa \nabla u)\, \delta u] = \delta u\, \nabla^{T} (-\kappa \nabla u) + (-\kappa \nabla u)^{T}\, \nabla \delta u$$

$$\Rightarrow \quad \delta u\, \nabla^{T} (-\kappa \nabla u) = \nabla^{T} [(-\kappa \nabla u)\, \delta u] + (\kappa \nabla u)^{T}\, \nabla \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Forme intégrale

$$\int_{\Omega} [\nabla^{T} (-\kappa \nabla u) + \rho\, u - q]\, \delta u\, dx\, dy = 0 \quad \forall\ \delta u$$

δu température virtuelle

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle pour l'intégration par parties du terme $\int_{\Omega} [\nabla^{T} (-\kappa \nabla u)]\, \delta u\, dx\, dy$
  - Divergence du produit du vecteur $-\kappa \nabla u$ par le scalaire δu

$$\nabla^{T} [(-\kappa \nabla u)\, \delta u] = \delta u\, \nabla^{T} (-\kappa \nabla u) + (-\kappa \nabla u)^{T}\, \nabla \delta u$$

$$\Rightarrow \delta u\, \nabla^{T} (-\kappa \nabla u) = \nabla^{T} [(-\kappa \nabla u)\, \delta u] + (\kappa \nabla u)^{T}\, \nabla \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)
  - Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \nabla^{\mathrm{T}} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

$$= \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}s$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)
  - Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \nabla^{\mathrm{T}} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \ = \ \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

$$= \ \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}s$$

- Intégration par parties (théorème de Green – formule de Gauss)

$$\int_{\Omega} [\kappa\, (\nabla u)^{\mathrm{T}}\, \nabla \delta u \ + \ \rho\, u\ \delta u]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \ - \ \int_{\partial\Omega} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u\ \delta u\ \mathrm{d}s$$

Théorème de
la divergence

$$-\ \int_{\Omega} q\ \delta u\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \ = \ 0 \quad \forall\ \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)
  - Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \nabla^{\mathrm{T}} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

$$= \int_{\partial\Omega} [(-\,\kappa \nabla u)\ \delta u] \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}s$$

- Intégration par parties (théorème de Green – formule de Gauss)

$$\int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^{\mathrm{T}} \nabla \delta u \;+\; \rho\, u\ \delta u]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;-\; \int_{\partial\Omega} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \nabla u\ \delta u\ \mathrm{d}s$$

$$-\int_{\Omega} q\ \delta u\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;=\; 0 \quad \forall\ \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites

$$\ldots \; - \int_{\partial\Omega} \kappa \, \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \, \nabla u \; \delta u \, \mathrm{d}s \quad \ldots$$

$$\ldots \; - \int_{\partial\Omega_u} \kappa \, \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \, \nabla u \; \delta u \, \mathrm{d}s \; - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \, \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \, \nabla u \; \delta u \, \mathrm{d}s \quad \ldots$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites essentielles

$$\dots \; - \int_{\partial\Omega} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \,\mathrm{d}s \;\; \dots$$

$$\dots \; - \cancel{\int_{\partial\Omega_u} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\underline{\delta u} \,\mathrm{d}s} - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \,\mathrm{d}s \;\; \dots$$

$$u = \hat{u} \;\text{ sur } \partial\Omega_u$$

Température virtuelle "thermiquement" admissible

$$\Rightarrow \delta u = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega_u$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites naturelles

$$\dots \; - \int_{\partial\Omega} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \,\mathrm{d}s \quad \dots$$

$$\dots \; - \cancel{\int_{\partial\Omega_u} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \,\mathrm{d}s} - \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u} \;\delta u \,\mathrm{d}s \quad \dots$$

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(-\kappa \nabla u) = r(s)\,u(s) - t(s) \;\text{ sur } \partial\Omega_\sigma$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites

$$\ldots \quad - \int_{\partial\Omega} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \;\mathrm{d}s \quad \ldots$$

$$\ldots \quad - \cancel{\int_{\partial\Omega_u} \kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u \;\delta u \;\mathrm{d}s} - \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\kappa\, \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \nabla u} \;\delta u \;\mathrm{d}s \quad \ldots$$

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(-\kappa \nabla u) = r(s)\, u(s) - t(s) \;\text{ sur } \partial\Omega_\sigma$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} [\kappa\, (\nabla u)^{\mathrm{T}}\, \nabla \delta u \;+\; \rho\, u\; \delta u]\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\sigma} (r\,u - t)\;\delta u\;\mathrm{d}s \;-\; \int_{\Omega} q\;\delta u\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \;=\; 0 \quad \forall\; \delta u$$

Formulation faible du problème

- Forme faible du transfert-chaleur par conduction

$$u \in U : \int_{\Omega} [\kappa\, (\nabla u)^{\mathrm{T}}\, \nabla \delta u \;+\; \rho\, u\; \delta u]\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y \\ \qquad + \int_{\partial\Omega_\sigma} r\, u\; \delta u\; \mathrm{d}s \\ = \int_{\Omega} q\; \delta u\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y \;+\; \int_{\partial\Omega_\sigma} t\; \delta u\; \mathrm{d}s \quad \forall\; \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

$$U \;=\; \{u(x, y) \mid u(x, y) \in H^1(\Omega)\; ;\; u(s) = \hat{u}(s),\; \forall\; s \in \partial\Omega_u\}$$

$$V \;=\; \{\delta u(x, y) \mid \delta u(x, y) \in H^1(\Omega)\; ;\; \delta u(s) = 0,\; \forall\; s \in \partial\Omega_u\}$$

$$H^1(\Omega) \;=\; \{u \mid u \in L^2(\Omega)\; ;\; \partial u/\partial x \in L^2(\Omega)\; ;\; \partial u/\partial y \in L^2(\Omega)\}$$

Formulation faible du problème

- Forme faible du transfert-chaleur par conduction

Conditions naturelles

$$u \in U : \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^{\mathrm{T}} \nabla \delta u \; + \; \rho \, u \; \delta u] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_\sigma} r \, u \; \delta u \, \mathrm{d}s = \int_{\Omega} q \; \delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_\sigma} t \; \delta u \, \mathrm{d}s \quad \forall \; \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

Conditions essentielles

$$U \; = \; \{u(x, y) \mid u(x, y) \in H^1(\Omega) \; ; u(s) = \hat{u}(s), \; \forall \; s \in \partial\Omega_u\}$$

$$V \; = \; \{\delta u(x, y) \mid \delta u(x, y) \in H^1(\Omega) \; ; \delta u(s) = 0, \; \forall \; s \in \partial\Omega_u\}$$

$$H^1(\Omega) \; = \; \{u \mid u \in L^2(\Omega) \; ; \partial u/\partial x \in L^2(\Omega) \; ; \partial u/\partial y \in L^2(\Omega)\}$$