

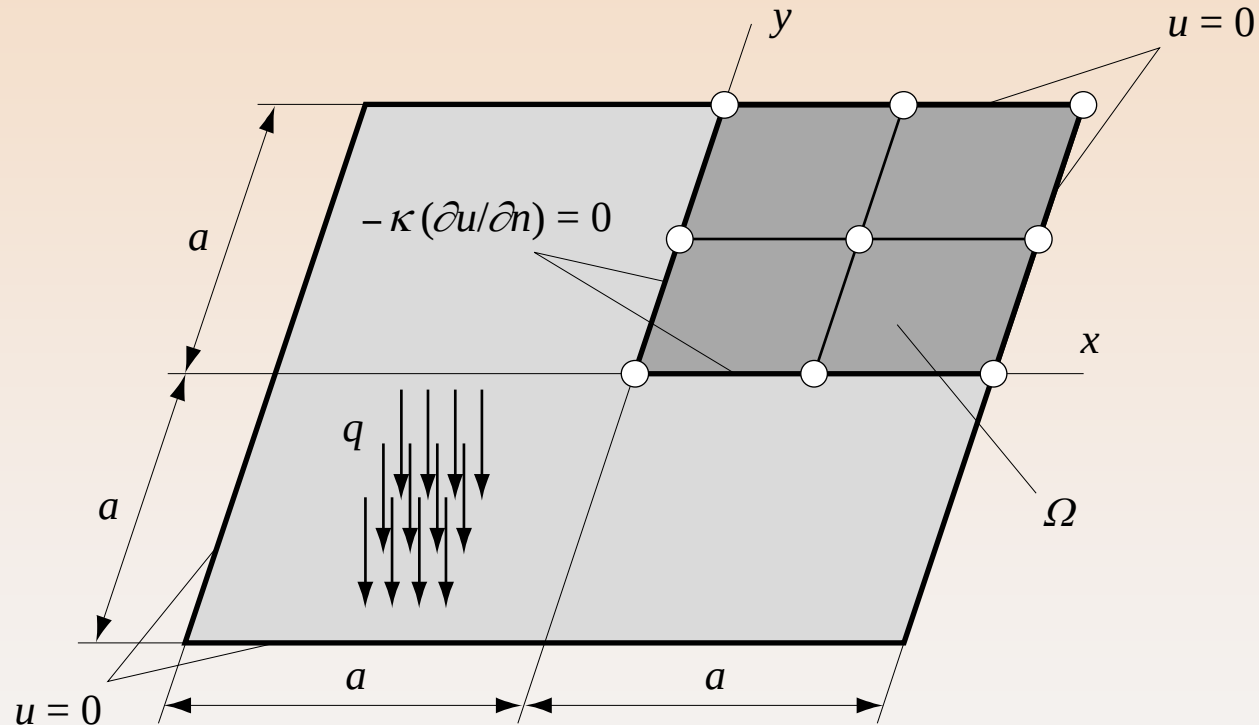
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

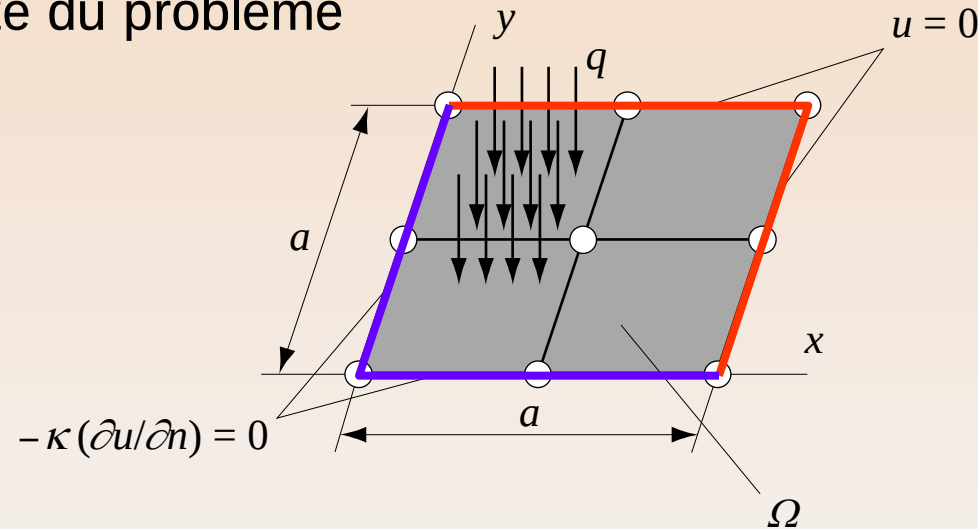


Distribution des températures sur une plaque carrée dont
le quart est subdivisé en quatre éléments finis identiques



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

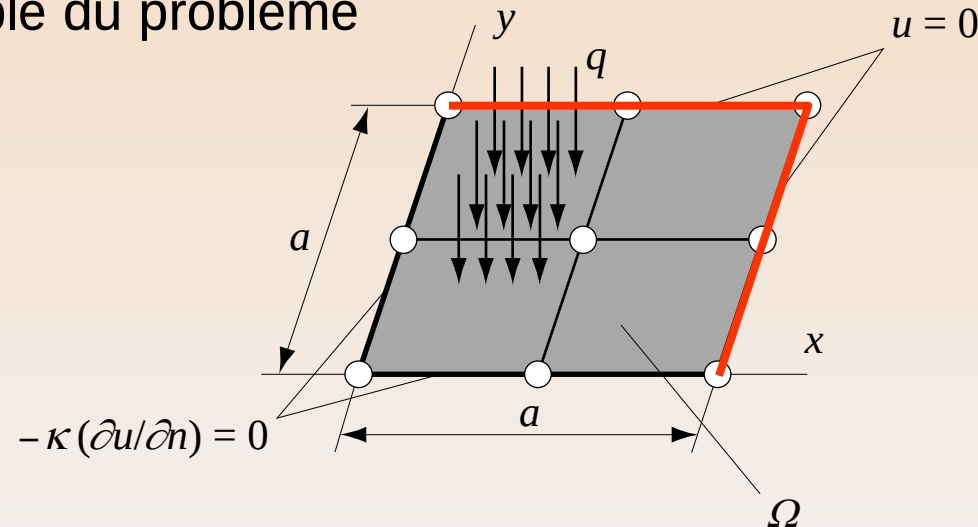
- Forme forte du problème



$$\begin{aligned}
 u &\in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) = q && \text{dans } \Omega \\
 u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_u \\
 -\kappa (\partial u / \partial n) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_\sigma
 \end{aligned}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme faible du problème



$$u \in U : \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u] \, dx \, dy = \int_{\Omega} q \, \delta u \, dx \, dy \quad \forall \delta u \in V$$

$$U = V = \{w \mid w \in H^1(\Omega) ; w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme faible discrète du problème

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h = \partial\Omega_u)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e \quad \mathbf{r} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

- Matrice élémentaire de conductivité

$$\mathbf{K}^e = \int_{e\Omega} \kappa [(\partial^e \mathbf{H}^T / \partial x) (\partial^e \mathbf{H} / \partial x) + (\partial^e \mathbf{H}^T / \partial y) (\partial^e \mathbf{H} / \partial y)] dx dy$$

- Vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r}^e = \int_{e\Omega} \mathbf{H}^T e q dx dy$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme indicielle de la matrice de conductivité ${}^e\mathbf{K}$

$${}^e k_{ij} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\kappa [(\partial^e h_i / \partial x) (\partial^e h_j / \partial x) + (\partial^e h_i / \partial y) (\partial^e h_j / \partial y)] dx dy$$



Matrice
jacobienne

$$= \int_{{}^e\Omega} {}^e\kappa [(\partial^e h_i / \partial x) (\partial^e h_j / \partial x) + (\partial^e h_i / \partial y) (\partial^e h_j / \partial y)] {}^e j d\xi d\eta$$

$$\partial^e h_i / \partial x = {}^e J_{11}^{-1} (\partial^a h_i / \partial \xi) + {}^e J_{12}^{-1} (\partial^a h_i / \partial \eta)$$

$$\partial^e h_i / \partial y = {}^e J_{21}^{-1} (\partial^a h_i / \partial \xi) + {}^e J_{22}^{-1} (\partial^a h_i / \partial \eta)$$

$${}^e j = \det({}^e \mathbf{J})$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme indicielle du vecteur des sources d'énergie-chaleur ${}^e\mathbf{r}$

$${}^e r_i = \int_{{}^e\Omega} {}^e h_i {}^e q \, dx \, dy$$

$$= \int_{{}^a\Omega} {}^a h_i {}^e q {}^e j \, d\xi \, d\eta$$

$${}^e j = \det({}^e \mathbf{J})$$

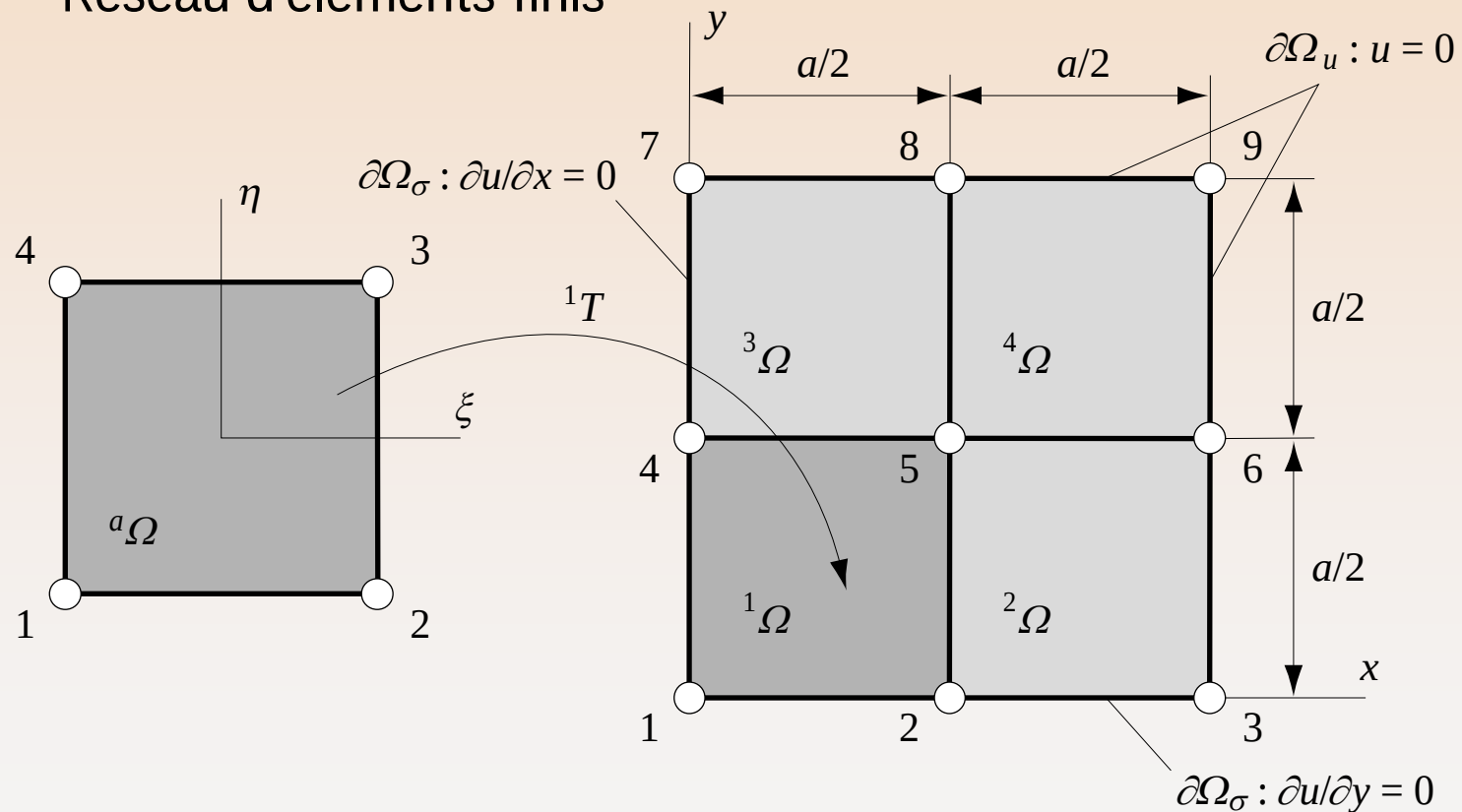


Matrice
jacobienne



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Réseau d'éléments finis



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Tableau de connectivité

<i>numérotation locale des nœuds</i>	$^e\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$	<i>numérotation globale des nœuds</i>
1	1	1	2	4	5	
2	2	2	3	5	6	
3	5	5	6	8	9	
4	4	4	5	7	8	

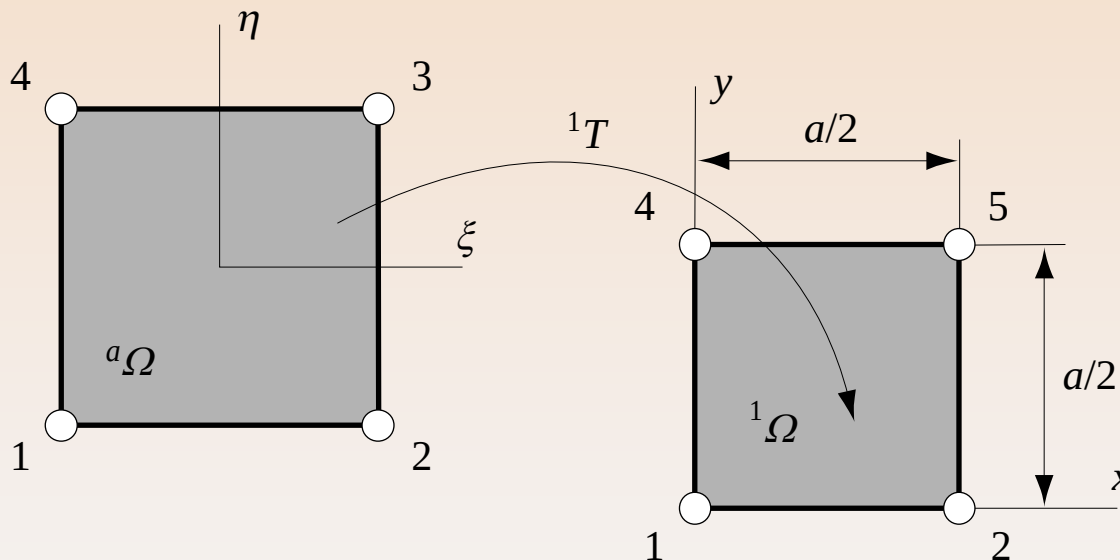


4 éléments finis identiques

⇒ Calcul uniquement des
contributions dues à Ω_1

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Transformation de coordonnées relative à l'élément ${}^1\Omega$



$${}^1T: \quad \begin{aligned} x &= (a/2) {}^ah_2 + (a/2) {}^ah_3 = (1 + \xi) (a/4) \\ y &= (a/2) {}^ah_3 + (a/2) {}^ah_4 = (1 + \eta) (a/4) \end{aligned}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Jacobien et matrice jacobienne

$${}^1T: \begin{aligned} x &= (1 + \xi) (a/4) \\ y &= (1 + \eta) (a/4) \end{aligned}$$

$$\partial x / \partial \xi = a/4 \quad \partial x / \partial \eta = 0 \quad \partial y / \partial \xi = 0 \quad \partial y / \partial \eta = a/4$$

$${}^1j = (a/4) (a/4) = a^2/16$$



Justification
du résultat

$${}^1\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a/4 & 0 \\ 0 & a/4 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/a & 0 \\ 0 & 4/a \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Dérivées des fonctions de base

$${}^1\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/a & 0 \\ 0 & 4/a \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^1 h_i}{\partial x} = \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi} {}^1J_{11}^{-1} + \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta} {}^1J_{12}^{-1} = \frac{4}{a} \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^1 h_i}{\partial y} = \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi} {}^1J_{21}^{-1} + \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta} {}^1J_{22}^{-1} = \frac{4}{a} \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta}$$



Pas de distorsion géométrique de l'élément



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité

$$\begin{aligned}
 {}^e k_{ij} &= \int_{a\Omega} {}^e \kappa [(\partial^e h_i / \partial x)(\partial^e h_j / \partial x) \\
 &\quad + (\partial^e h_i / \partial y)(\partial^e h_j / \partial y)] {}^e j \, d\xi \, d\eta \\
 &= \int_{a\Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi)(\partial^a h_j / \partial \xi) \\
 &\quad + (\partial^a h_i / \partial \eta)(\partial^a h_j / \partial \eta)] \frac{16}{a^2} \frac{a^2}{16} \, d\xi \, d\eta
 \end{aligned}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité

$$\begin{aligned} {}^e k_{ij} &= \int_{{}^a \Omega} {}^e \kappa [(\partial^e h_i / \partial x) (\partial^e h_j / \partial x) \\ &\quad + (\partial^e h_i / \partial y) (\partial^e h_j / \partial y)] {}^e j \, d\xi \, d\eta \\ &= \int_{{}^a \Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi) (\partial^a h_j / \partial \xi) \\ &\quad + (\partial^a h_i / \partial \eta) (\partial^a h_j / \partial \eta)] \frac{16}{a^2} \frac{a^2}{16} \, d\xi \, d\eta \end{aligned}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité

$${}^e k_{ij} = \int_{a\Omega} {}^e \kappa [(\partial^e h_i / \partial x) (\partial^e h_j / \partial x) + (\partial^e h_i / \partial y) (\partial^e h_j / \partial y)] {}^e j \, d\xi \, d\eta$$

$$= \int_{a\Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi) (\partial^a h_j / \partial \xi) + (\partial^a h_i / \partial \eta) (\partial^a h_j / \partial \eta)] \frac{16}{a^2} \frac{a^2}{16} \, d\xi \, d\eta$$

$$= \int_{a\Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi) (\partial^a h_j / \partial \xi) + (\partial^a h_i / \partial \eta) (\partial^a h_j / \partial \eta)] \, d\xi \, d\eta$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

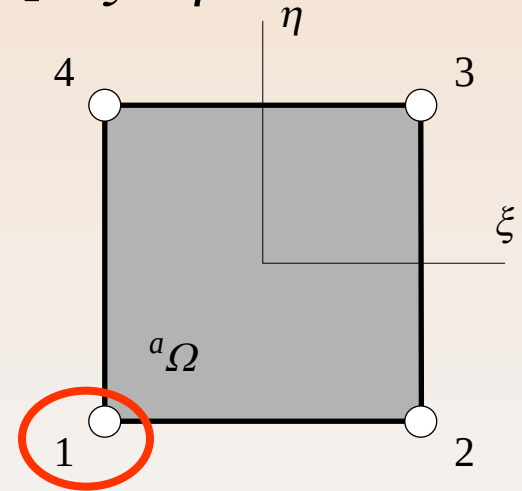
- Calcul des composantes de la matrice de conductivité (*suite*)

$${}^1k_{11} = \int_{a\Omega} \kappa [(\partial^a h_1 / \partial \xi)^2 + (\partial^a h_1 / \partial \eta)^2] d\xi d\eta$$

$$\partial^a h_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$$\partial^a h_1 / \partial \xi = (\eta - 1)/4$$

$$\partial^a h_1 / \partial \eta = (\xi - 1)/4$$



$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\kappa}{16} [(\eta - 1)^2 + (\xi - 1)^2] d\xi d\eta = 2\kappa/3$$

(1/3+1) × 2 × 2
(1/3+1) × 2 × 2

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité (*suite*)

$${}^1k_{12} = {}^1k_{21} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{13} = {}^1k_{31} = -\kappa/3$$

$${}^1k_{14} = {}^1k_{41} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{22} = 2\kappa/3$$

$${}^1k_{23} = {}^1k_{32} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{24} = {}^1k_{42} = -\kappa/3$$

$${}^1k_{33} = 2\kappa/3$$

$${}^1k_{34} = {}^1k_{43} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{44} = 2\kappa/3$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de conductivité

$${}^1\mathbf{K} = {}^2\mathbf{K} = {}^3\mathbf{K} = {}^4\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



Termes indépendants de la géométrie
 $\Rightarrow$ géométrie particulière (carré)

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	${}^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} \textcircled{4} & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} \textcircled{4} & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ 2 \\ \textcircled{3} \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ 2 \\ \textcircled{5} \\ 4 \end{matrix}$

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \textcircled{-2} & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & \textcircled{-2} & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	${}^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	${}^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	${}^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	${}^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Symétrie



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

e_{Ω}	$^1\Omega$
1	1
2	2
3	5
4	4

$$^1\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & \mathbf{4} & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)

e_{Ω}	$^2\Omega$
1	2
2	3
3	6
4	5



Termes dus à $^1\Omega$

$$^2\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{-1} & \dots & \textcircled{-1} & \textcircled{-2} & \dots & (1) \\ \textcircled{-1} & \textcircled{4} + 4 & -1 & \textcircled{-2} & \textcircled{-1} - 1 & -2 & (2) \\ \dots & -1 & 4 & \dots & -2 & -1 & (3) \\ \textcircled{-1} & \textcircled{-2} & & \textcircled{4} & \textcircled{-1} & \dots & (4) \\ \textcircled{-2} & \textcircled{-1} - 1 & -2 & \textcircled{-1} & \textcircled{4} + 4 & -1 & (5) \\ \dots & -2 & -1 & \dots & -1 & 4 & (6) \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & -2 & & & & \\ -1 & 4+4 & -1 & -2 & & -1-1 & & -2 & & \\ & -1 & 4 & & & -2 & & -1 & & \\ -1 & -2 & & 4+4 & & -1-1 & & & -1 & -2 \\ -2 & -1-1 & -2 & -1-1 & 4+4+4+4 & -1-1 & -2 & -1-1 & -2 & \\ & -2 & -1 & & -1-1 & 4+4 & & -2 & -1 & \\ & & & -1 & -2 & & 4 & -1 & & \\ & & & -2 & -1-1 & -2 & -1 & 4+4 & -1 & \\ & & & & -2 & -1 & & -1 & 4 & \end{bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{-1} & & \textcircled{-1} & \textcircled{-2} & & & & & \\ \textcircled{-1} & 4+4 & -1 & \textcircled{-2} & \textcircled{-1} & -1 & -2 & & & \\ & -1 & 4 & & -2 & -1 & & & & \\ \textcircled{-1} & \textcircled{-2} & & 4+4 & \textcircled{-1} & -1 & & -1 & -2 & \\ \textcircled{-2} & \textcircled{-1} & -1 & -2 & \textcircled{-1} & -1 & 4+4+4+4 & -1 & -1 & -2 \\ & -2 & -1 & & & -1 & -1 & 4+4 & & -2 & -1 \\ & & & -1 & -2 & & & 4 & -1 & & \\ & & & -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 4+4 & -1 & \\ & & & & -2 & -1 & & & -1 & 4 & \end{bmatrix}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

-166-

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)

Prof. Th. Gmür
Méthode des éléments finis
Décembre 2018

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)

[illegible]

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Matrice de conductivité globale

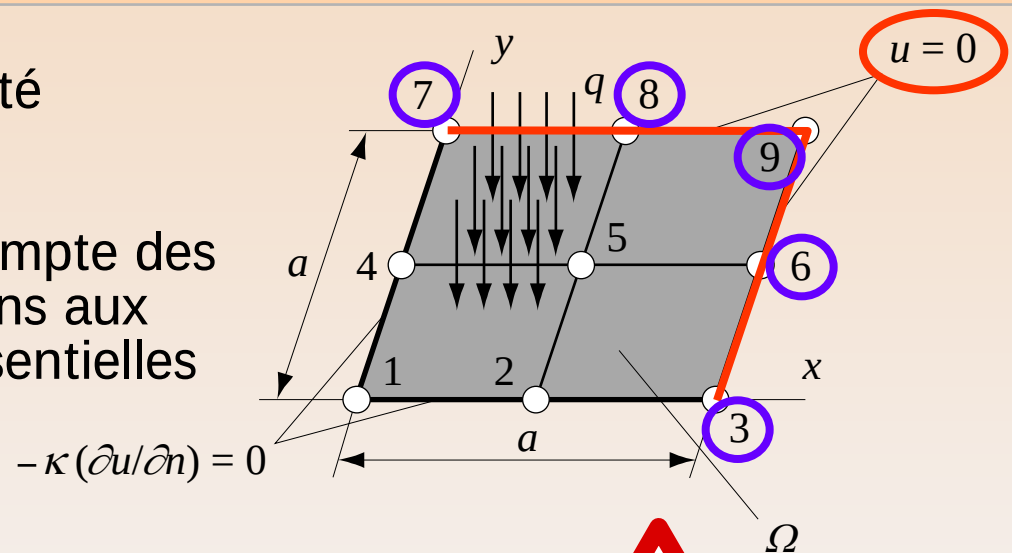
$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



- Matrice de conductivité globale réduite



Prise en compte des conditions aux limites essentielles



$$\mathbf{K}_r = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}$$



Suppression des lignes et colonnes 3, 6, 7, 8 et 9

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des sources d'énergie-chaleur

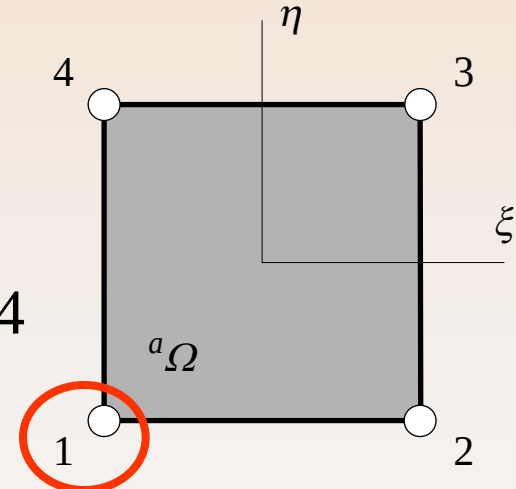
$$e r_i = \int_{a\Omega} {}^a h_i {}^e q {}^e j d\xi d\eta = \int_{a\Omega} {}^a h_i {}^e q (a^2/16) d\xi d\eta$$

$${}^1 r_1 = \int_{a\Omega} {}^a h_1 {}^e q (a^2/16) d\xi d\eta$$

$${}^a h_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$${}^1 r_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{q}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \frac{a^2}{16} d\xi d\eta = qa^2/16$$

1×2×2



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des sources d'énergie-chaleur (*suite*)

$${}^1r_2 = qa^2/16$$

$${}^1r_3 = qa^2/16$$

$${}^1r_4 = qa^2/16$$

- Vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^1\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1, 1, 1\}^T$$



Justification
du résultat



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1+1+1, 1+1, 1, 1+1, 1\}^T$$

$^e\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1+1+1, 1+1, 1, 1+1, 1\}^T$$

e_Ω	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1, 1+1, 1+1, 1, 1+1, 1\}^T$$

e_Ω	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1+1+1, 1+1, 1+1+1, 1\}^T$$

$^e\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1+1+1, 1+1, 1, 1+1+1+1\}^T$$

e_Ω	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 1+1, 1, 1+1, 1+1+1+1, 1+1, 1, 1+1, 1\}^T$$

$^e\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$	$^4\Omega$
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8

- Vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1\}^T$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

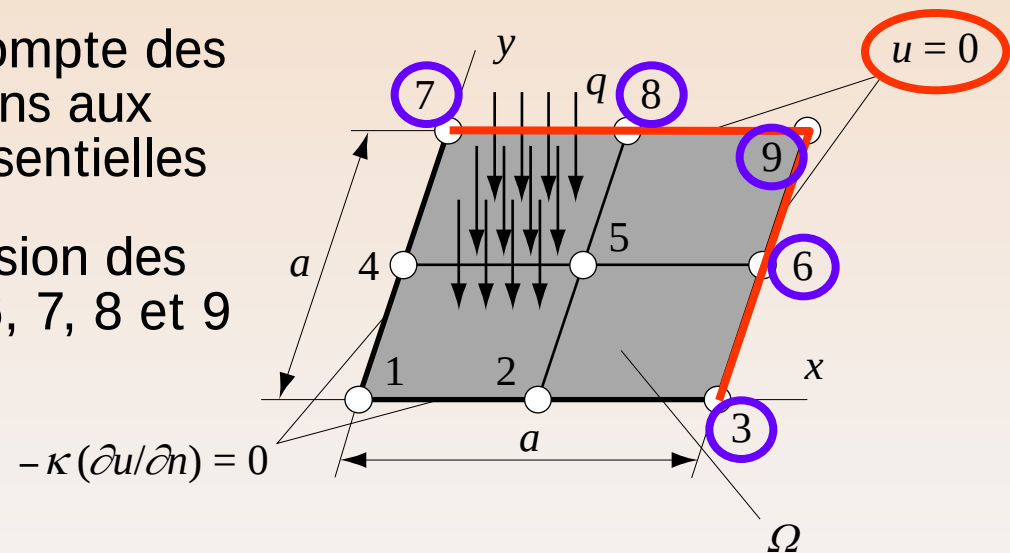
- Vecteur global réduit des sources d'énergie-chaleur



Prise en compte des
conditions aux
limites essentielles



Suppression des
lignes 3, 6, 7, 8 et 9



$$\mathbf{r}_r = \frac{qa^2}{16} \{1, 2, 2, 4\}^T$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

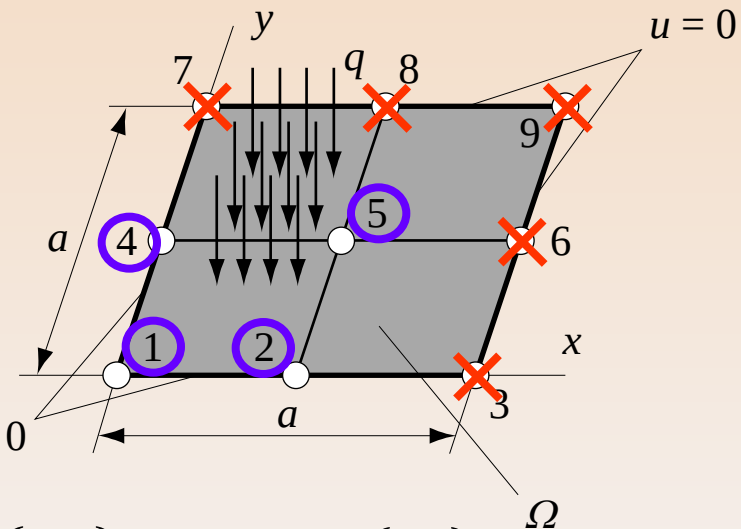
- Système d'équations réduit

$$\mathbf{K}_r \mathbf{q}_r = \mathbf{r}_r$$



Températures aux
nœuds 1, 2, 4 et 5

$$-\kappa (\partial u / \partial n) = 0$$



$$\frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Solutions du système d'équations

$$q_1 = 87qa^2/(280\kappa)$$

$$q_2 = 27qa^2/(112\kappa)$$

$$q_4 = 27qa^2/(112\kappa)$$

$$q_5 = 27qa^2/(140\kappa)$$

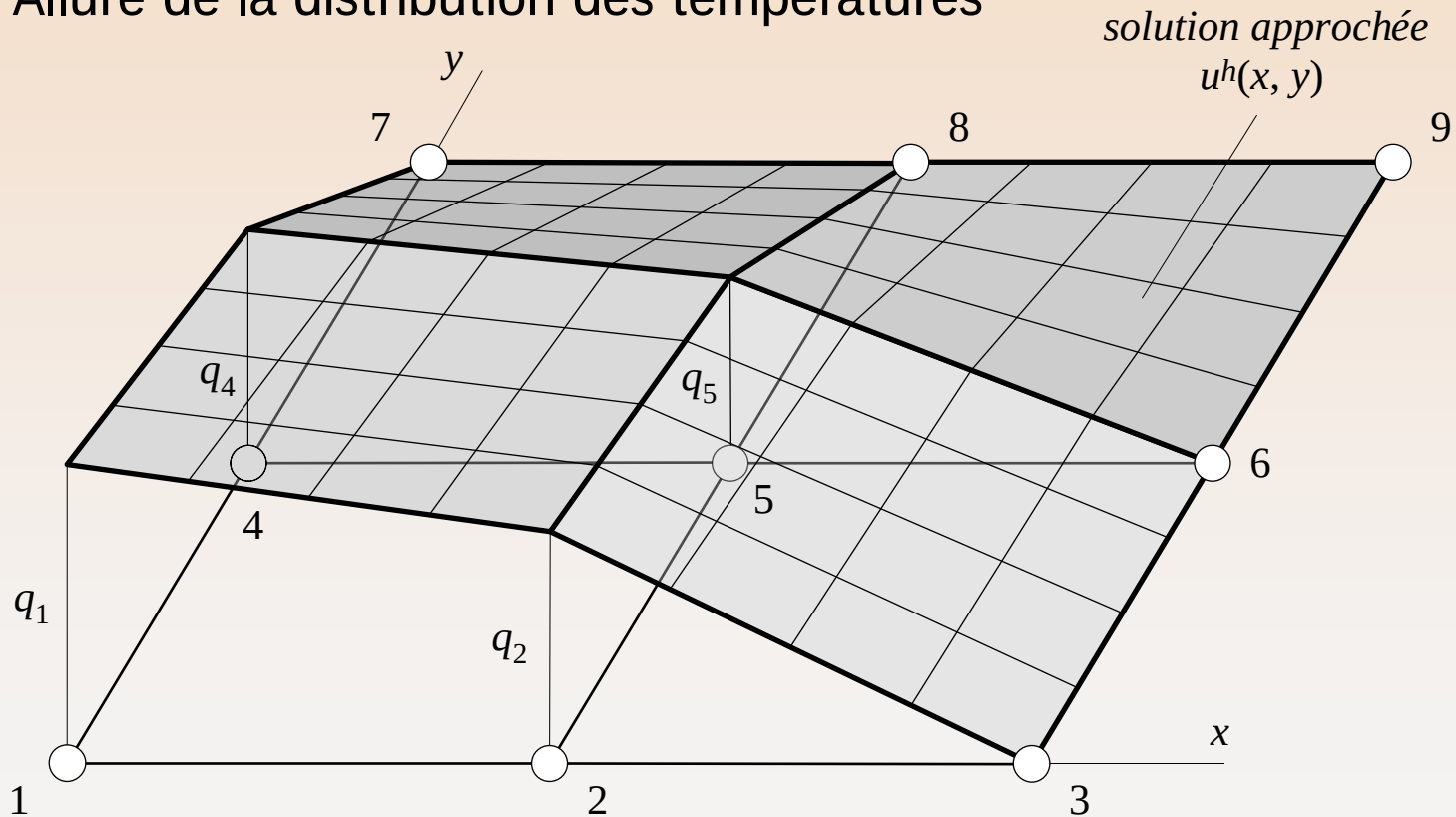
- Distribution des températures

$$u^h(x, y) = \frac{qa^2}{\kappa} [0.3107 h_1(x, y) + 0.2411 h_2(x, y) + 0.2411 h_4(x, y) + 0.1929 h_5(x, y)]$$

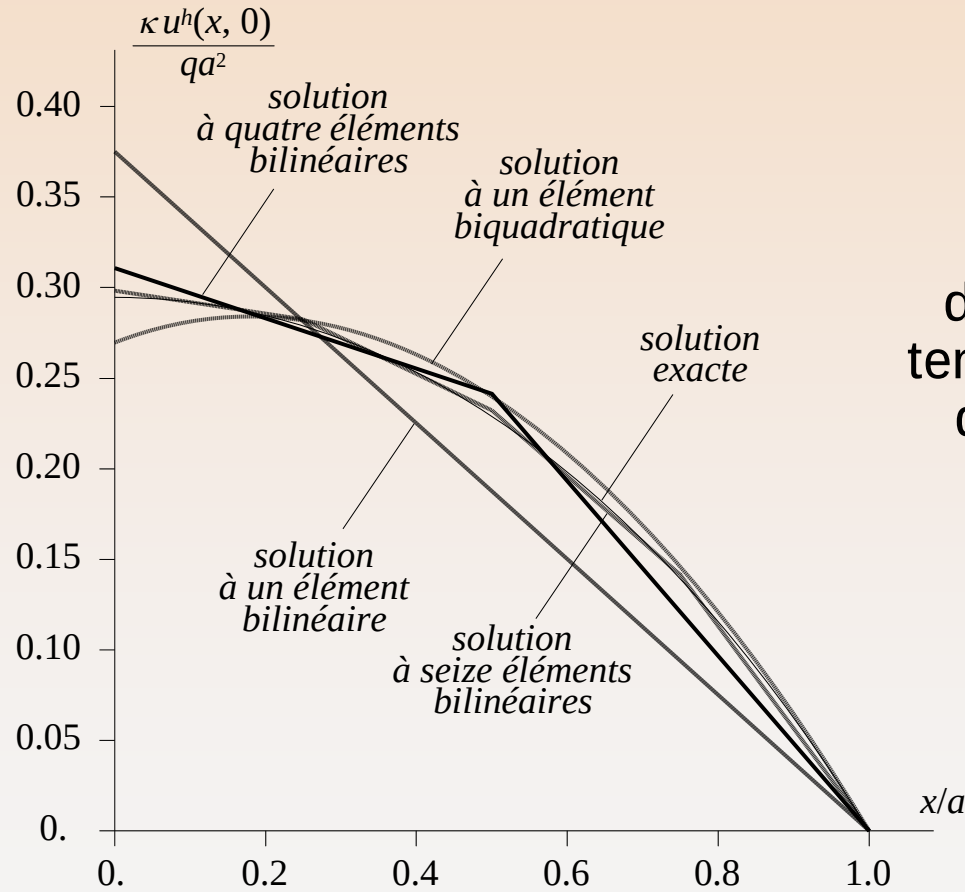


Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Allure de la distribution des températures



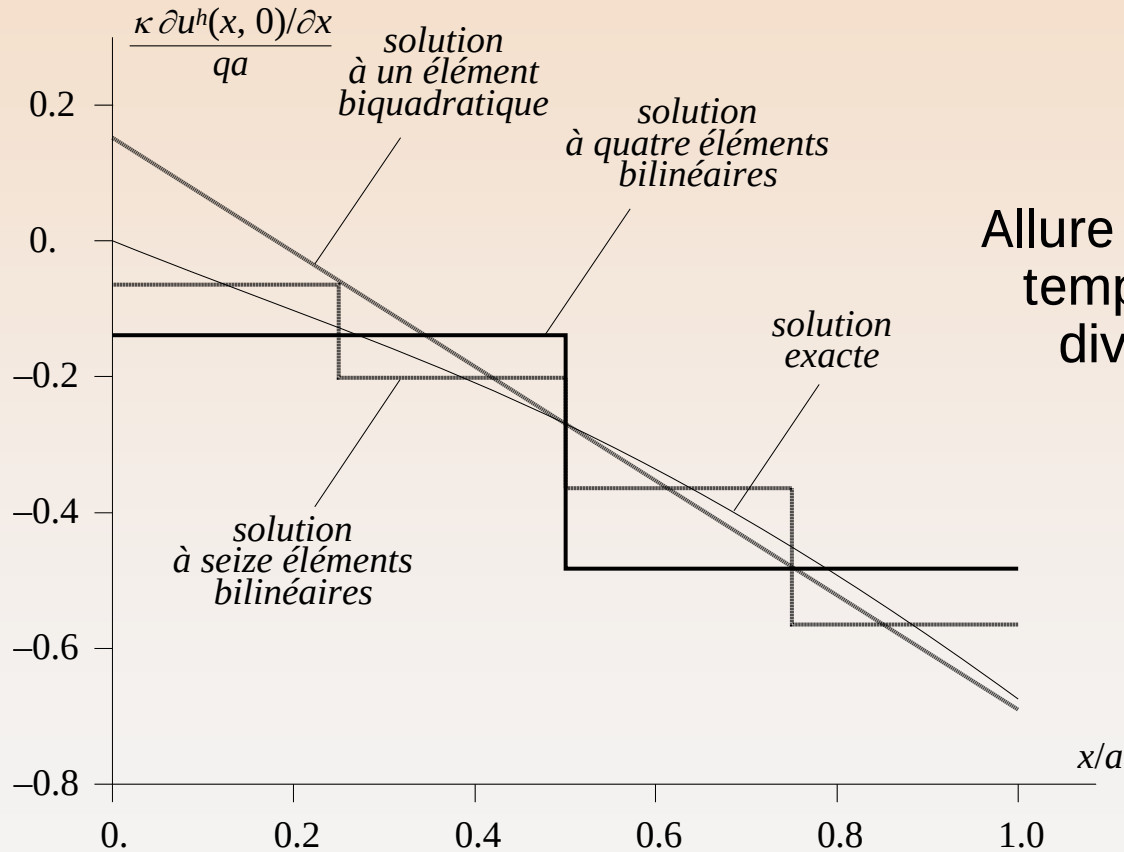
Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis



Allure de la
distribution des
températures pour
divers réseaux



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis



Allure du gradient de
température pour
divers réseaux



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires
 - Bonne précision des résultats pour les réseaux à 2×2 et 4×4 éléments finis bilinéaires
 - Précision assez faible des résultats pour les réseaux à 1×1 élément fini bilinéaire ou biquadratique
 - Gradient de température discontinu
 - Distribution peu précise du gradient de température, mais valeurs moyennes correctes au centre des arêtes des éléments

