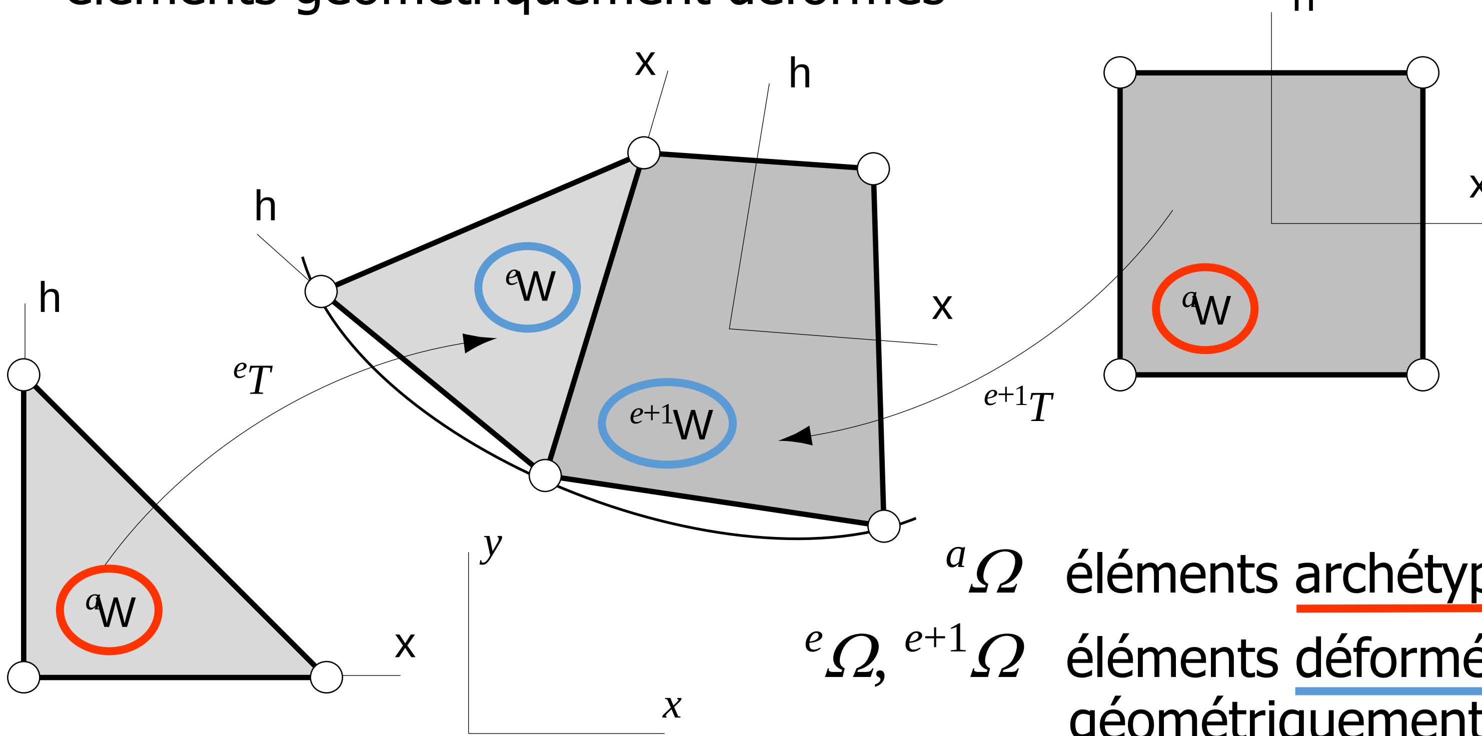
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des éléments finis de forme régulière en éléments géométriquement déformés

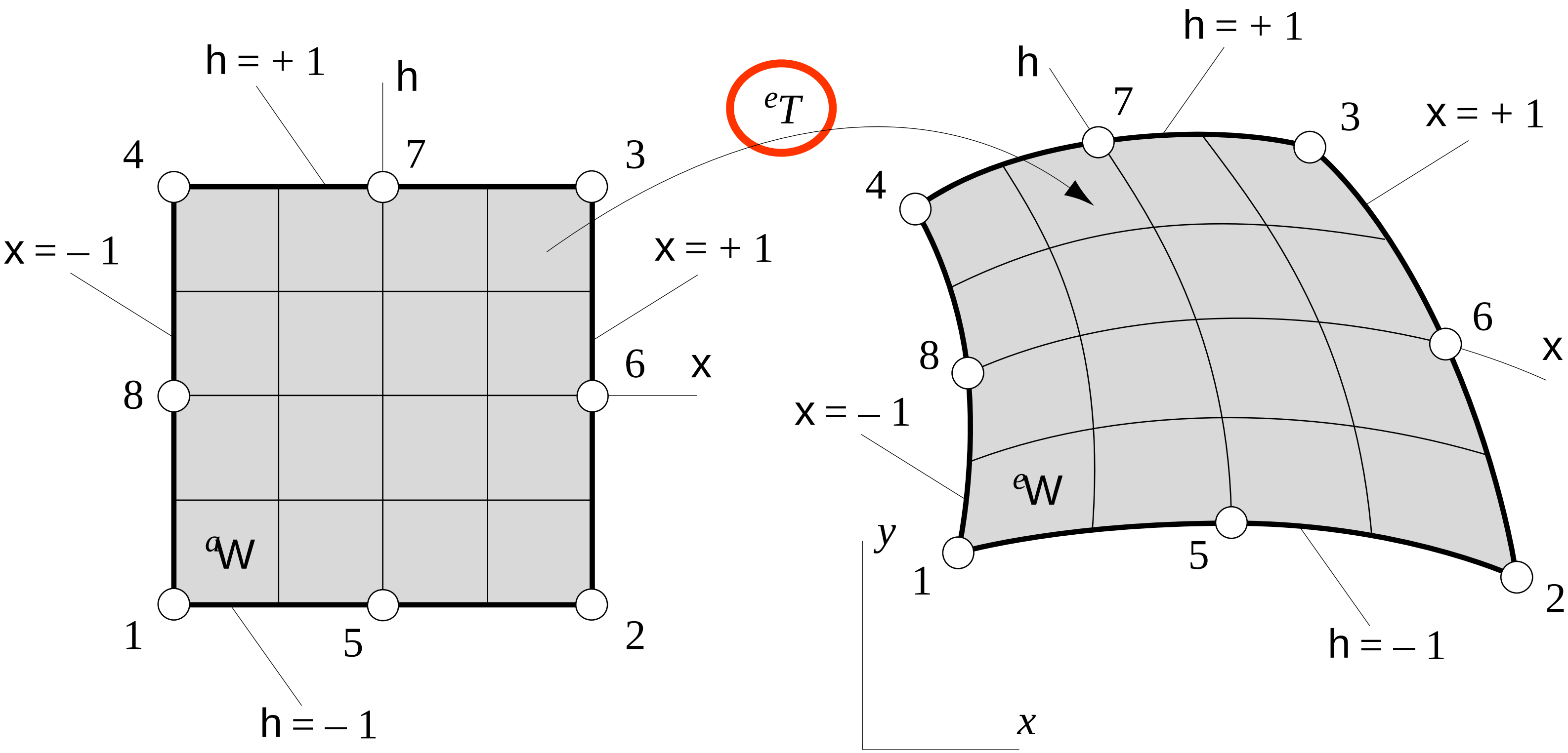


$^a\Omega$ éléments archétypes

$^e\Omega$, $^{e+1}\Omega$ éléments déformés géométriquement

Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées bidimensionnelle

$$^{e}T : \quad \begin{aligned} x &= x(\xi,\, \eta) \\ y &= y(\xi,\, \eta) \end{aligned}$$

Choix des fonctions assurant le changement de repère

- Choix d'une transformation basée sur les fonctions de base de l'élément père

$$^{e}T : \quad \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{^{e}p} {}^{a}n_i(\xi,\, \eta)\, {}^{e}x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{^{e}p} {}^{a}n_i(\xi,\, \eta)\, {}^{e}y_i \end{aligned}$$

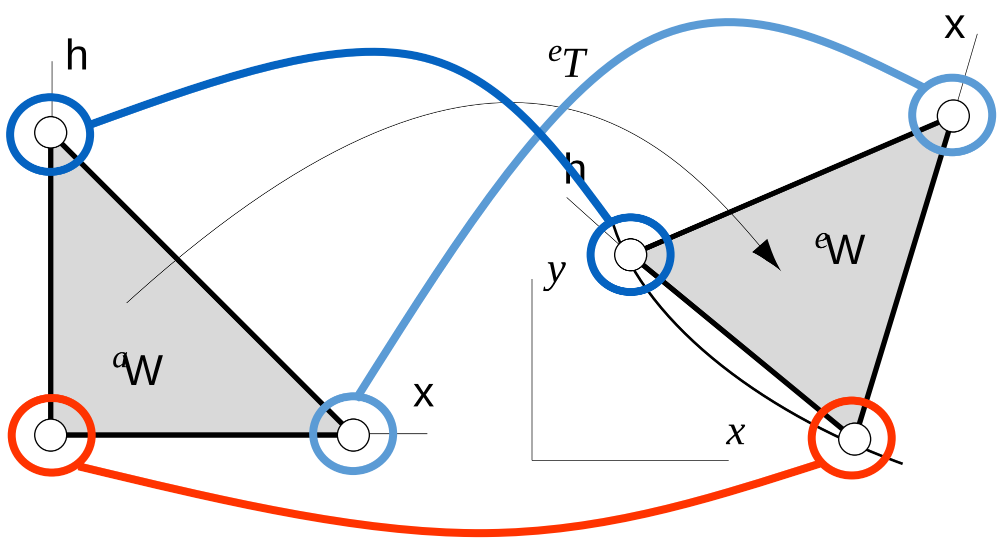
Fonctions de base ${}^{a}n_i$ déjà connues

Confusion des indices

${}^{e}x_i, {}^{e}y_i$ coordonnées nodales

Éléments finis géométriquement déformés

- Avantages de la forme choisie pour la transformation
  - Fonctions de base déjà déterminées pour la solution approchée
  - Transformation régulière (régularité des fonctions de base)
  - Correspondance des nœuds des éléments archétype et déformé



Éléments finis géométriquement déformés

- Correspondance nœud à nœud : univocité de la transformation de coordonnées

$$ {}^{e}T \;:\; \mathbf{x} \;=\; \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{a}h_i(\xi,\,\eta)\;{}^{e}\mathbf{x}_i \qquad \mathbf{x} = \{x,\,y\}^{\mathrm{T}} \qquad {}^{e}\mathbf{x}_i = \{{}^{e}x_i,\,{}^{e}y_i\}^{\mathrm{T}} $$

$$ \Rightarrow\; \mathbf{x}(\xi_j,\,\eta_j) \;=\; \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{a}h_i\,(\xi_j,\,\eta_j)\;{}^{e}\mathbf{x}_i \;=\; \sum_{i=1}^{{}^{e}p} \delta_{ij}\;{}^{e}\mathbf{x}_i \;=\; {}^{e}\mathbf{x}_j $$

Position du nœud j dans l'élément père

Continuité restreinte des fonctions de base

Coordonnées du nœud j de l'élément déformé

Indice $e \Rightarrow$ indice i

Arêtes courbes possibles $\Rightarrow$ diminution de l'erreur $\Omega - \Omega^h$

Éléments finis géométriquement déformés

- Effet de la transformation de coordonnées sur l'approximation

$$ {}^{e}u^{h}(x, y) = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}h_i(x, y)\, {}^{e}q_i = {}^{e}\mathbf{H}(x, y)\, {}^{e}\mathbf{q} $$

$$ {}^{e}u^{h}[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{a}h_i(\xi, \eta)\, {}^{e}q_i = {}^{a}\mathbf{H}(\xi, \eta)\, {}^{e}\mathbf{q} $$

avec

$$ {}^{a}\mathbf{H} = [{}^{a}h_1, {}^{a}h_2, \ldots, {}^{a}h_{{}^{e}p}] $$

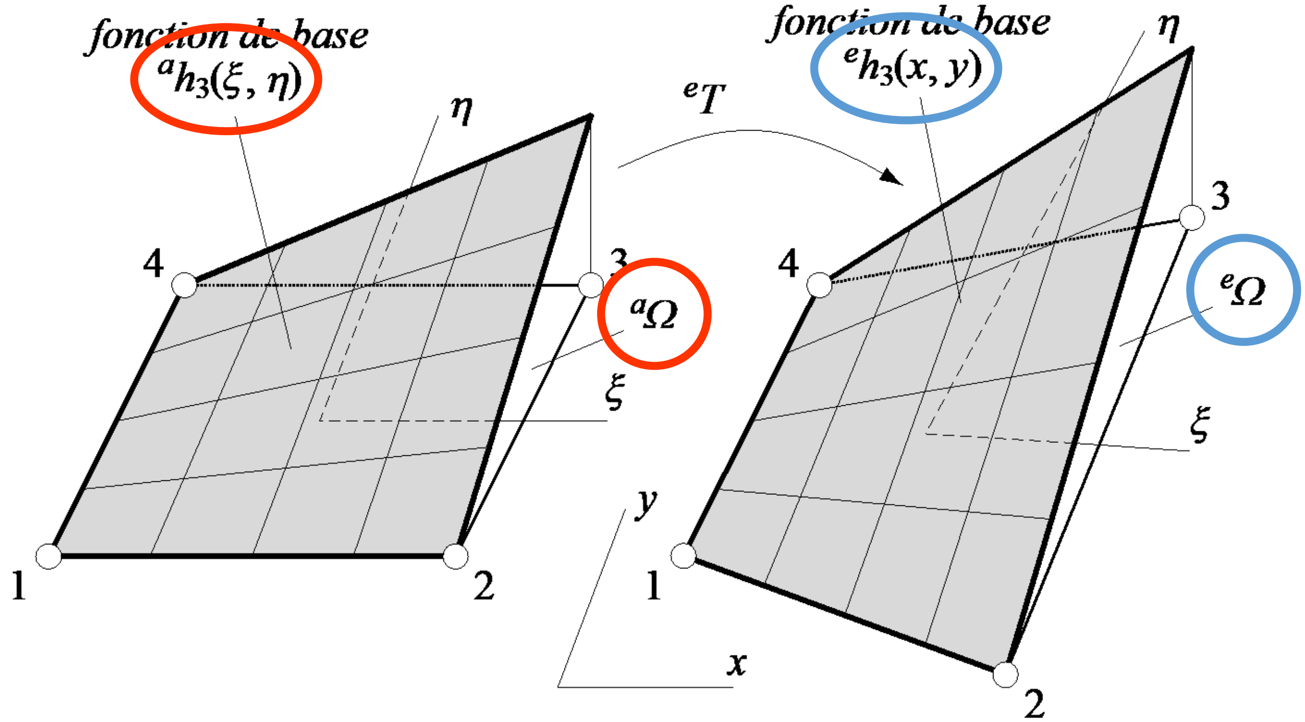
matrice $(1 \times {}^{e}p)$ des fonctions de base de l'élément père

$$ {}^{e}\mathbf{q} = \{{}^{e}q_1, {}^{e}q_2, \ldots, {}^{e}q_{{}^{e}p}\}^{\mathrm{T}} $$

vecteur des ${}^{e}p$ températures discrètes dans l'élément déformé

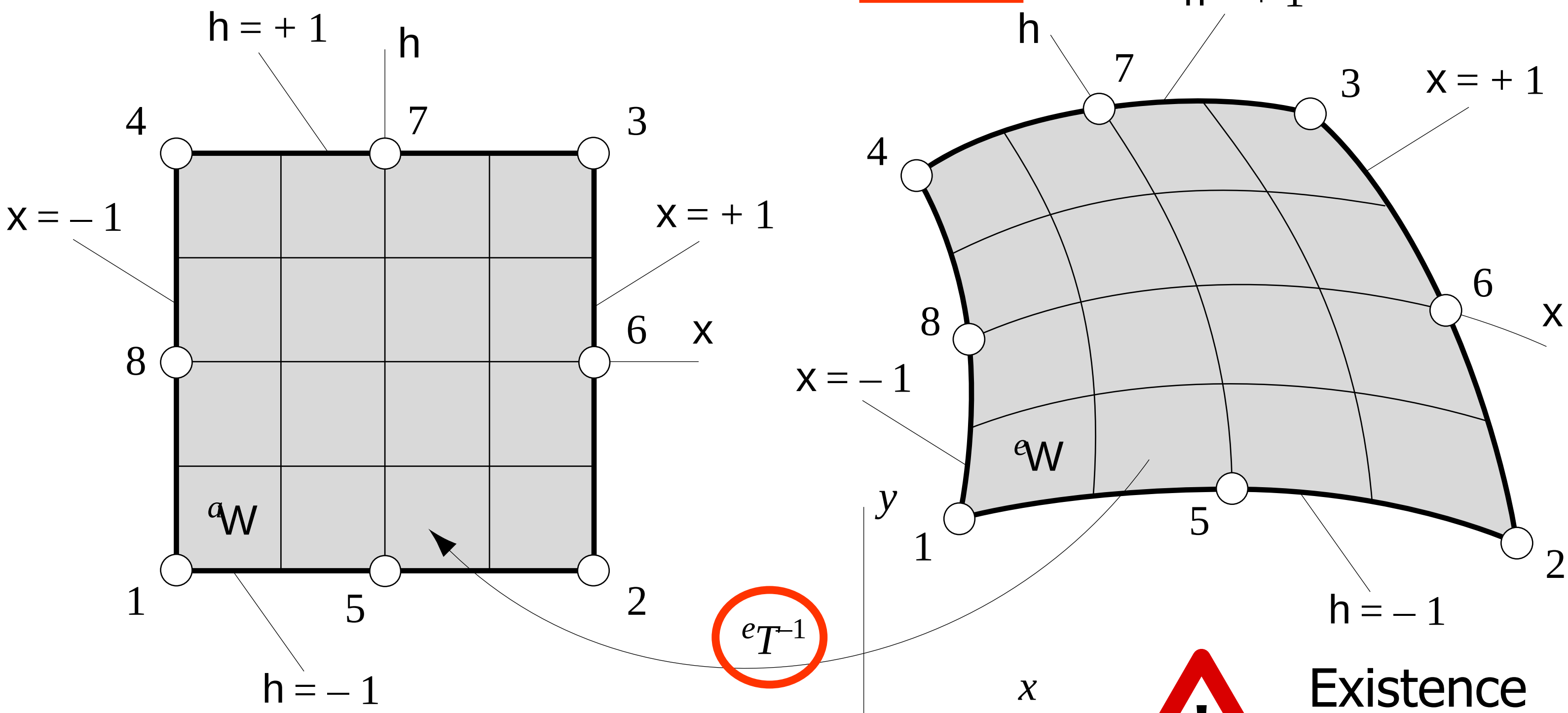
Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des fonctions de base



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées inverse



Existence de ${}^{e}T^{-1}$?

Éléments finis géométriquement déformés

- Condition d'existence de la transformation inverse (biunivocité de la transformation de coordonnées)
  - Transformation paramétrique inverse

$$ {}^{e}T^{-1}: \begin{array}{l} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{array} $$

  - Dérivation par rapport aux coordonnées naturelles

$$ \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = {}^{e}\mathbf{J} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} $$

${}^{e}\mathbf{J}$ matrice jacobienne de la transformation

Éléments finis géométriquement déformés

- Dérivation par rapport aux coordonnées spatiales

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = {}^{e}\mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{{}^{e}j} \begin{bmatrix} \partial y/\partial\eta & -\partial y/\partial\xi \\ -\partial x/\partial\eta & \partial x/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix}$$

${}^{e}j = \det({}^{e}\mathbf{J})$ jacobien de la transformation

- Condition d’existence de la transformation

$${}^{e}j = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} \neq 0$$

$$\forall\ \xi, \eta \in {}^{a}\Omega$$

Repère droit $\Rightarrow\ {}^{e}j > 0$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne

$$ {}^{e}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} $$

Evaluation explicite de la matrice jacobienne

$$ \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \xi} $$

$$ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \eta} $$

$$ {}^{e}\mathbf{J} = {}^{e}\mathbf{J}(\xi, \eta) $$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul du jacobien (déterminant de la matrice jacobienne)

$$
{}^{e}j = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \xi} \cdot \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \eta}
$$

$$
{}^{e}j = {}^{e}j(\xi, \eta) \qquad - \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \eta} \cdot \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\, {}^{a}h_i}{\partial \xi}
$$

Utilité de ${}^{e}j$? Contrôle de l'univocité et calcul de $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne inverse

$$
{}^{e}\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix}
$$

Inversion explicite de la matrice jacobienne

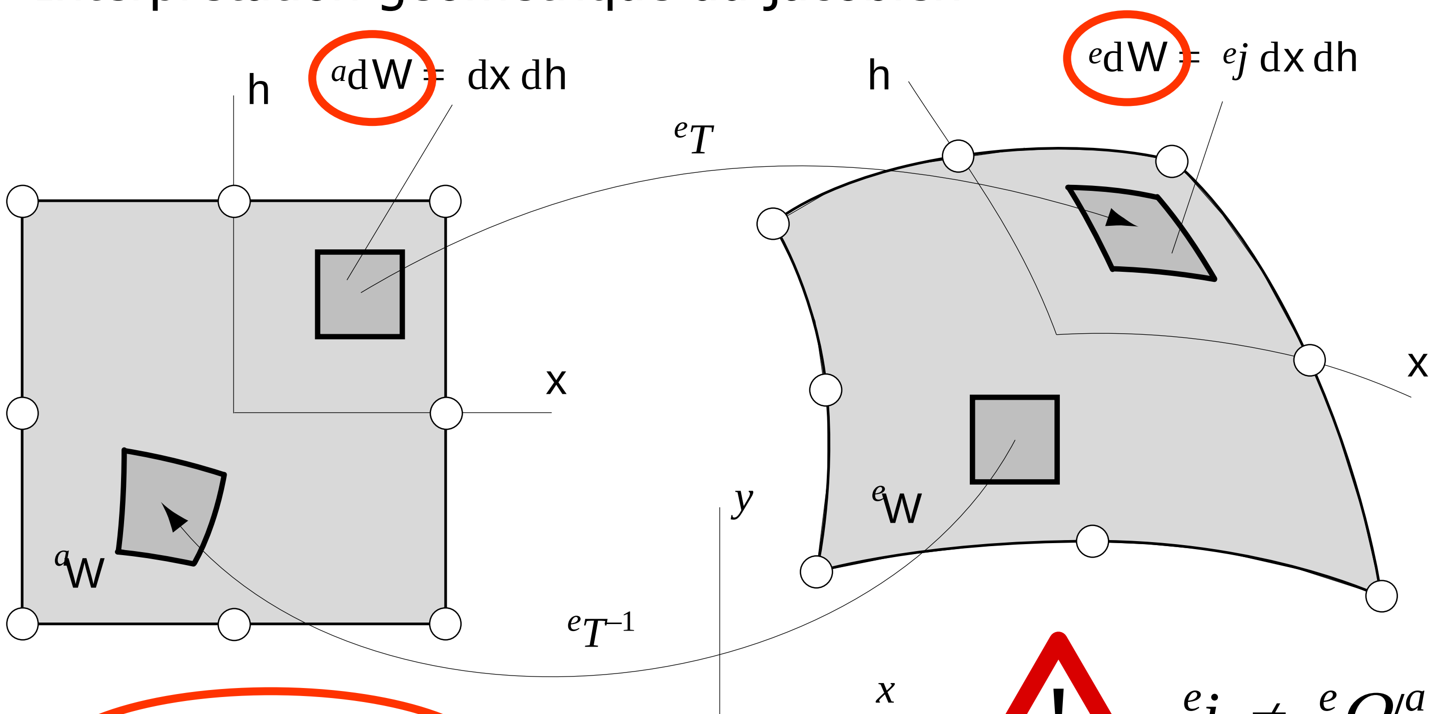
$$
\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{{}^{e}j}\sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\,{}^{a}h_i}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{-1}{{}^{e}j}\sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}y_i \frac{\partial\,{}^{a}h_i}{\partial\xi}
$$

$$
\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{-1}{{}^{e}j}\sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\,{}^{a}h_i}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{{}^{e}j}\sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}x_i \frac{\partial\,{}^{a}h_i}{\partial\xi}
$$

Utilité de ${}^{e}\mathbf{J}^{-1}$? Calcul de $\nabla{}^{e}\mathbf{H}$

Éléments finis géométriquement déformés

- Interprétation géométrique du jacobien

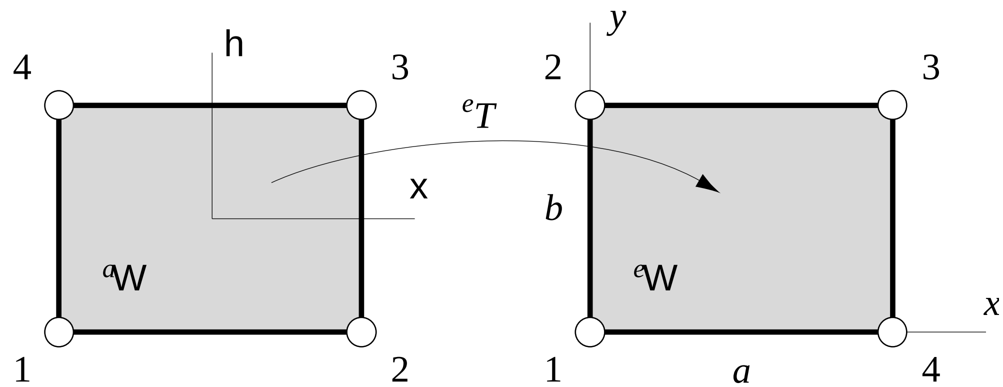


$$ {}^{e}j = {}^{e}\mathrm{d}\Omega / {}^{a}\mathrm{d}\Omega $$

$$ {}^{e}j \neq {}^{e}\Omega / {}^{a}\Omega $$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien négatif sur tout l'élément archétype



Élément fini retourné

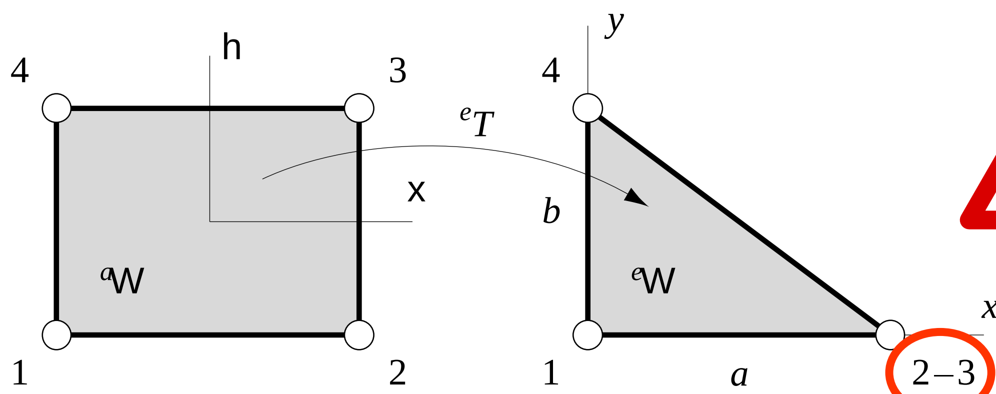
$$x \;=\; a\cdot(1+\xi)(1+\eta)/4 \;+\; a\cdot(1-\xi)(1+\eta)/4 \;=\; a(1+\eta)/2$$

$$y \;=\; b\cdot(1+\xi)(1-\eta)/4 \;+\; b\cdot(1+\xi)(1+\eta)/4 \;=\; b(1+\xi)/2$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \partial x/\partial\xi \;=\; 0 & \partial y/\partial\xi \;=\; b/2 \\ \partial x/\partial\eta \;=\; a/2 & \partial y/\partial\eta \;=\; 0 \end{array}\right\} \quad {}^{e}j \;=\; -\,ab/4$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien nul en un point de l'élément archétype



Superposition de nœuds

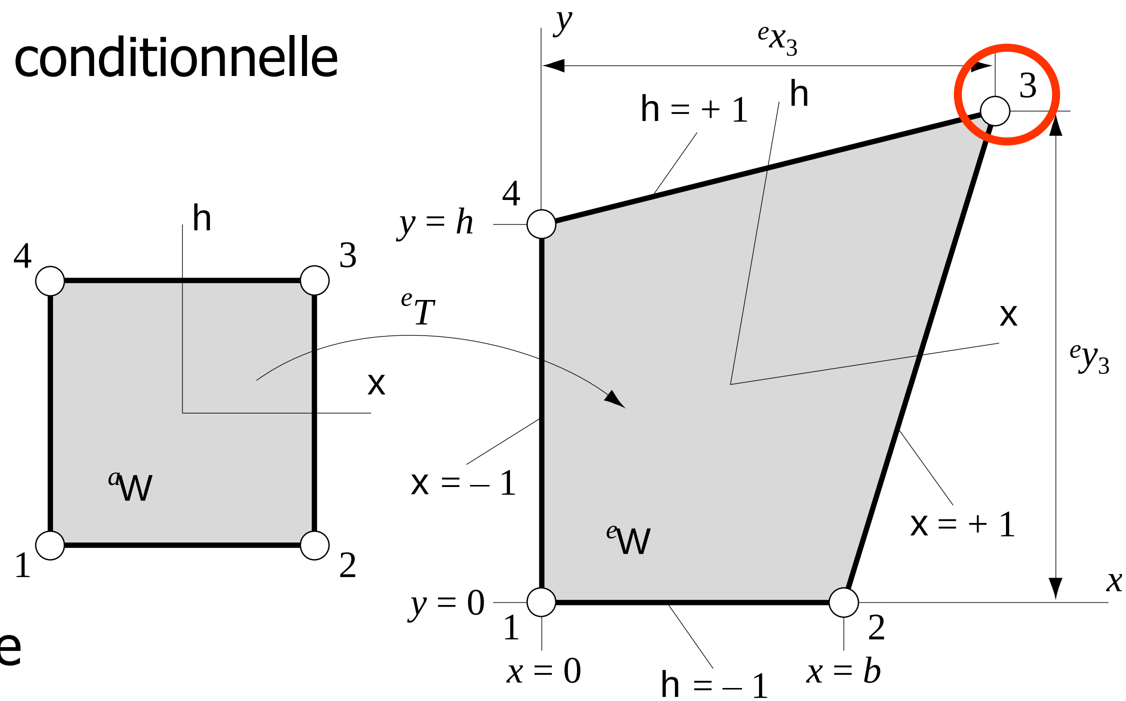
$$x = a\cdot(1+\xi)(1-\eta)/4 + a\cdot(1+\xi)(1+\eta)/4 = a(1+\xi)/2$$
$$y = b\cdot(1-\xi)(1+\eta)/4$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \partial x/\partial\xi = a/2 & \partial y/\partial\xi = -b(1+\eta)/4 \\ \partial x/\partial\eta = 0 & \partial y/\partial\eta = b(1-\xi)/4 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} {}^e j = ab(1-\xi)/8 \\ {}^e j(1,\eta) = 0 \end{array}$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Transformation conditionnelle

Position du nœud 3 variable



$$
{}^{e}T \;:\; \begin{cases} x = b\cdot(1+\xi)(1-\eta)/4 + {}^{e}x_3\cdot(1+\xi)(1+\eta)/4 \\ y = {}^{e}y_3\cdot(1+\xi)(1+\eta)/4 + h\cdot(1-\xi)(1+\eta)/4 \end{cases}
$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Recherche du jacobien de la transformation

$$\begin{aligned}
\partial x/\partial \xi &= [b + {}^e x_3 - \eta(b - {}^e x_3)]/4 \\
\partial x/\partial \eta &= (1+\xi)({}^e x_3 - b)/4 \\
\partial y/\partial \xi &= (1+\eta)({}^e y_3 - h)/4 \\
\partial y/\partial \eta &= [h + {}^e y_3 - \xi(h - {}^e y_3)]/4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad {}^e j(\xi,\eta) = [b\,{}^e y_3(1+\xi) + h\,{}^e x_3(1+\eta) - bh(\xi+\eta)]/8$$

Jacobien bilinéaire $\Rightarrow$ Contrôle aux nœuds

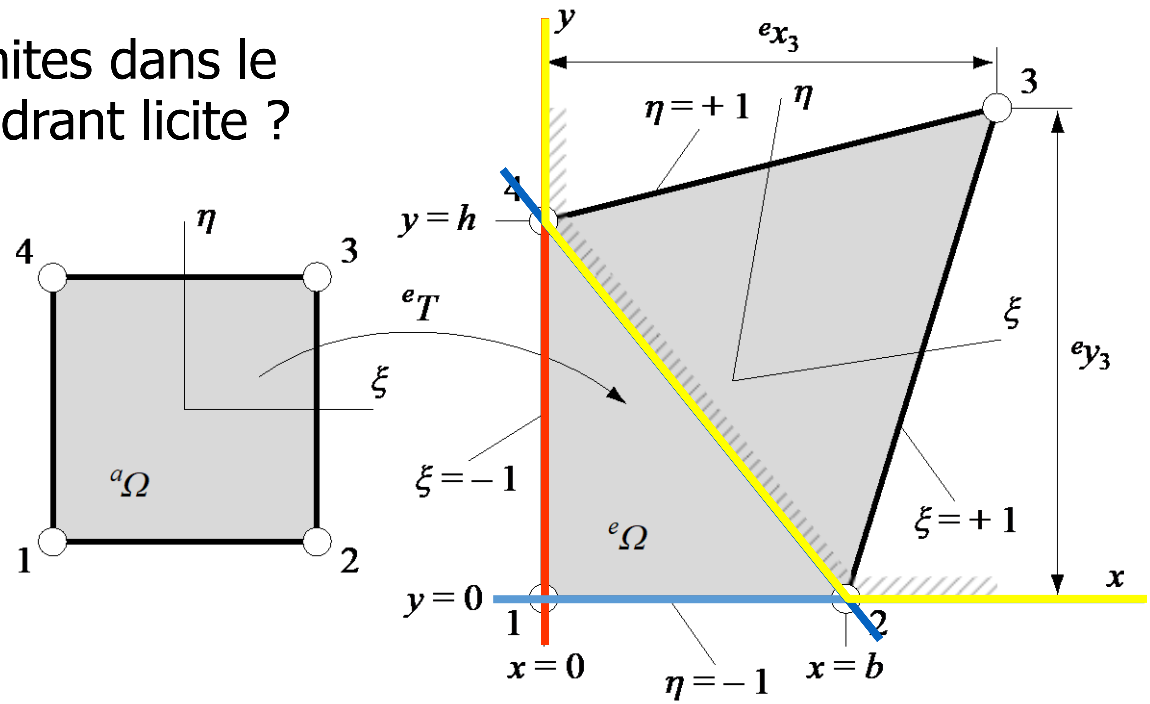
$$\begin{aligned}
{}^e j(-1,-1) &= bh/4 & \quad {}^e j(+1,-1) &= b\,{}^e y_3/4 \\
{}^e j(-1,+1) &= h\,{}^e x_3/4 & \quad {}^e j(+1,+1) &= (h\,{}^e x_3 + b\,{}^e y_3 - bh)/4
\end{aligned}$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

$$ {}^e x_3 > 0 \qquad {}^e y_3 > 0 \qquad {}^e x_3 / b + {}^e y_3 / h > 1 $$

Limites dans le quadrant licite ?

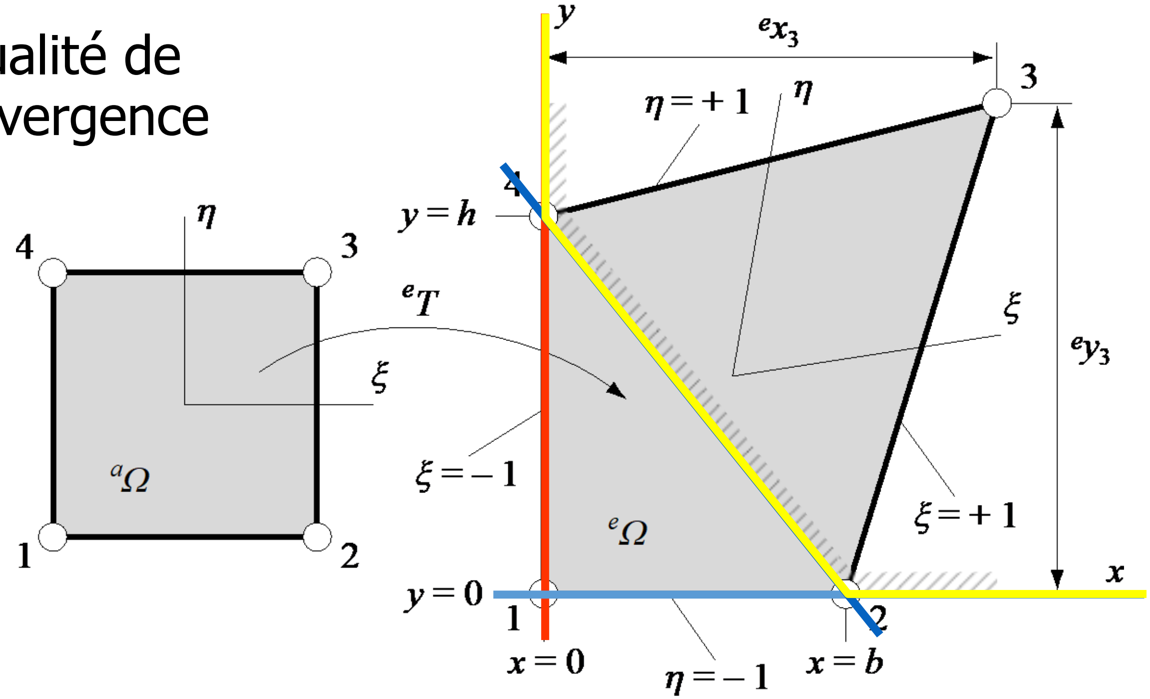


Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

$^e x_3 > 0$ $\quad$ $^e y_3 > 0$ $\quad$ $^e x_3/b + {^e y_3}/h > 1$

Qualité de convergence



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Cas particulier de transformation illicite

$$({}^e x_3,\ {}^e y_3) = (b/2,\ h/4) \ \Rightarrow\ {}^e j(\xi,\eta) = \frac{bh}{32}(3-3\xi-2\eta)$$