

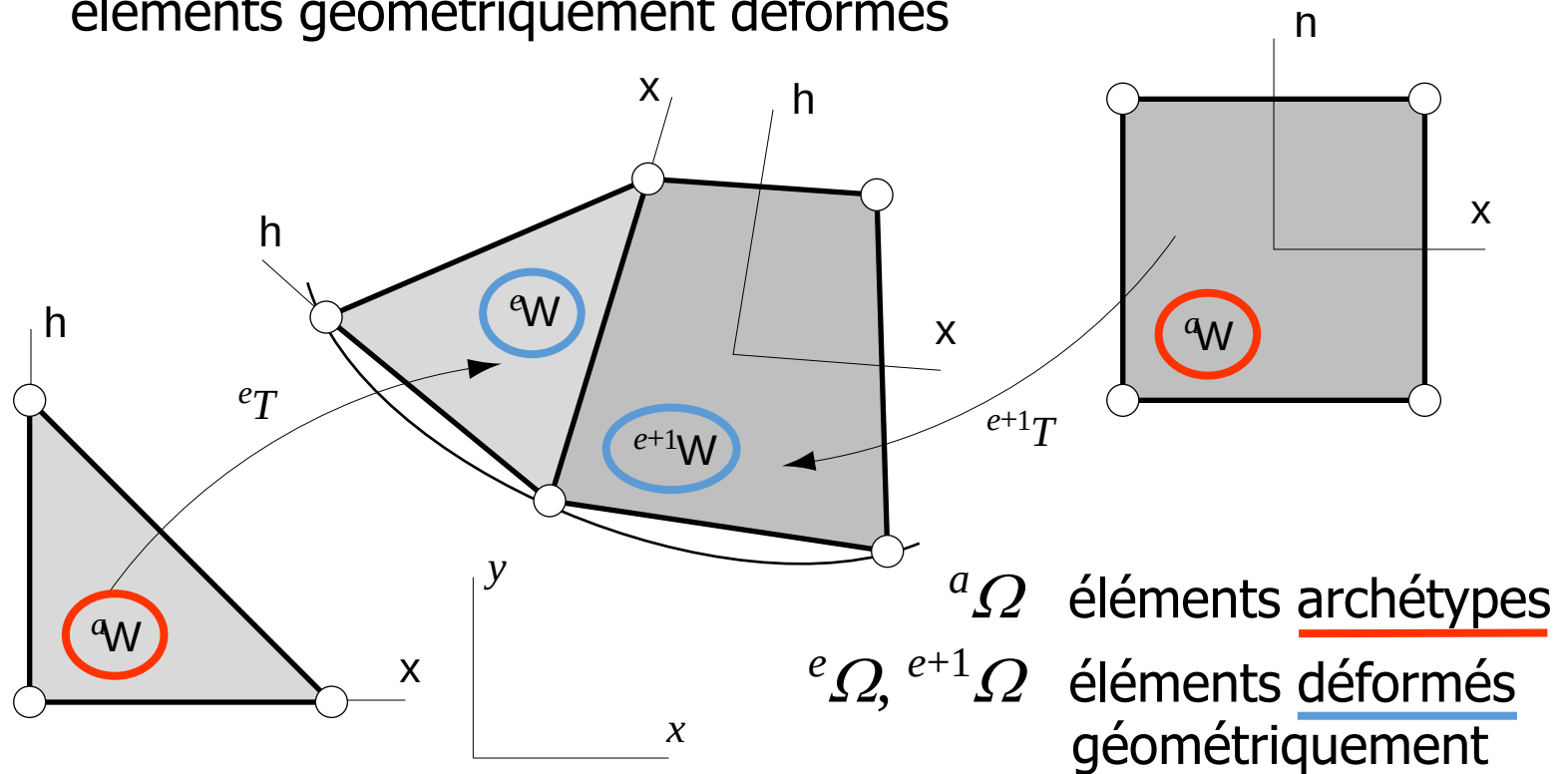
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

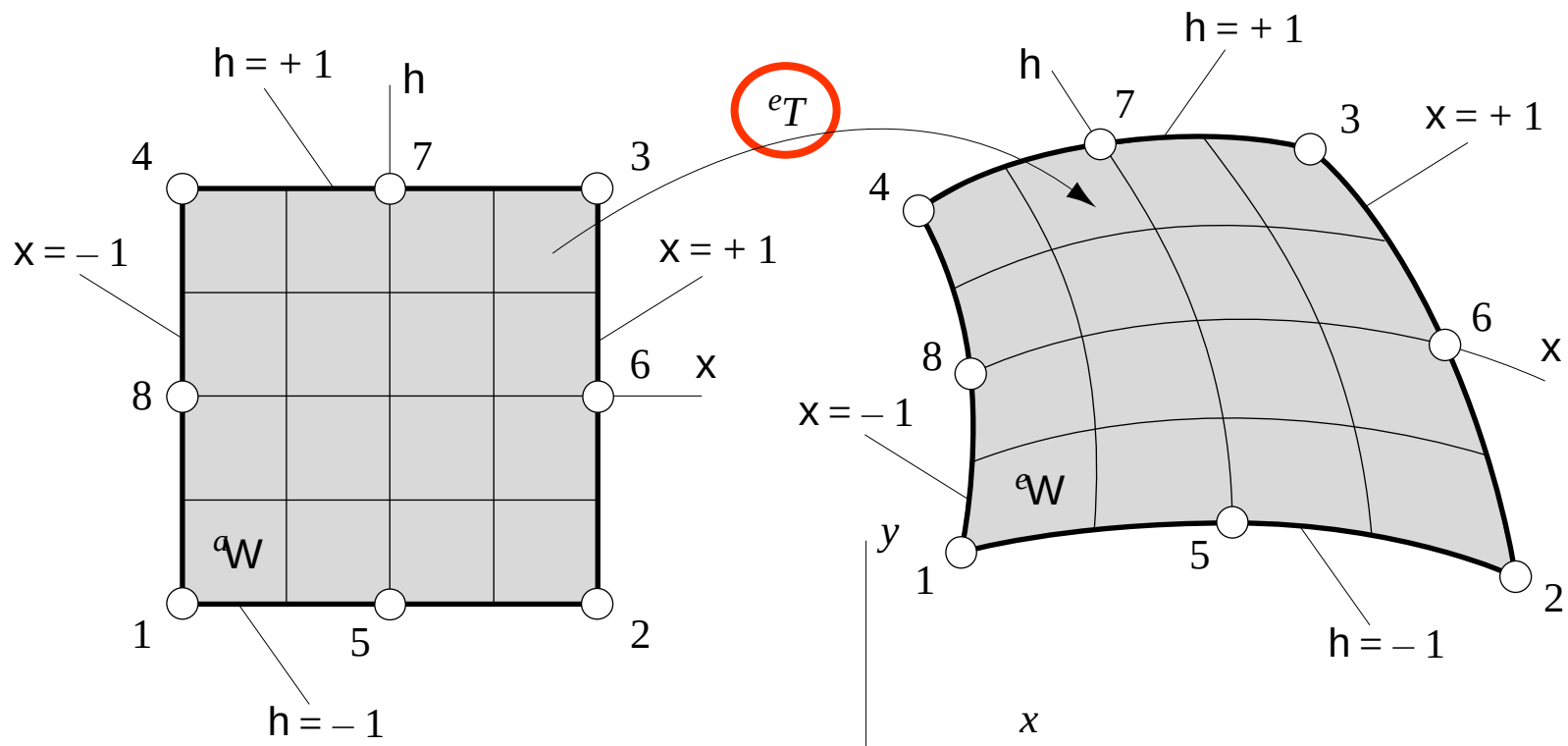
Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des éléments finis de forme régulière en éléments géométriquement déformés



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées bidimensionnelle

$${}^eT : \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad \triangle ! \quad \text{Choix des fonctions assurant le changement de repère}$$

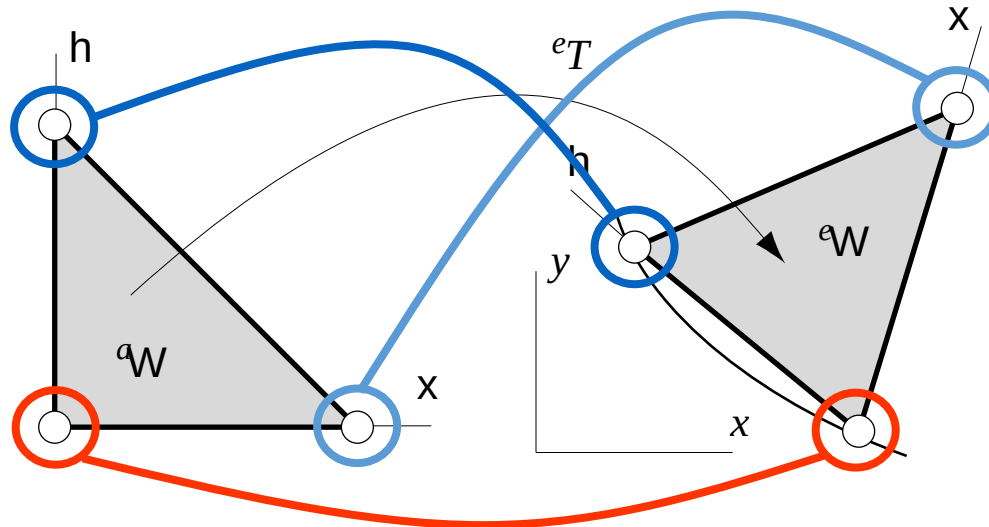
- Choix d'une transformation basée sur les fonctions de base de l'élément père

$${}^eT : \begin{cases} x = \sum_{i=1}^e a_i(\xi, \eta) e_{x_i} \\ y = \sum_{i=1}^e a_i(\xi, \eta) e_{y_i} \end{cases} \quad \begin{matrix} \triangle ! & \text{Fonctions de base} \\ & a_i n_i \text{ déjà connues} \\ \triangle ! & \text{Confusion} \\ & \text{des indices} \end{matrix}$$

e_{x_i}, e_{y_i} coordonnées nodales

Éléments finis géométriquement déformés

- Avantages de la forme choisie pour la transformation
 - Fonctions de base déjà déterminées pour la solution approchée
 - Transformation régulière (régularité des fonctions de base)
 - Correspondance des nœuds des éléments archétype et déformé



Éléments finis géométriquement déformés

- Correspondance nœud à nœud : univocité de la transformation de coordonnées

$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^e {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e \mathbf{x}_i \quad \mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e \mathbf{x}_i = \{{}^e x_i, {}^e y_i\}^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(\xi_j, \eta_j) = \sum_{i=1}^e {}^a h_i(\xi_j, \eta_j) {}^e \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^e \delta_{ij} {}^e \mathbf{x}_i = {}^e \mathbf{x}_j$$

Position du nœud j
dans l'élément père

Continuité restreinte
des fonctions de base

Coordonnées du
nœud j de l'élément
déformé



Indices $e \rightarrow$
Arêtes courbes
impossibles

$\Rightarrow$

diminution de
l'erreur $\Omega - \Omega^h$

Éléments finis géométriquement déformés

- Effet de la transformation de coordonnées sur l'approximation

$${}^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x, y) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^e u^h[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{q}$$

avec

$${}^a \mathbf{H} = [{}^a h_1, {}^a h_2, \dots, {}^a h_{{}^e p}]$$

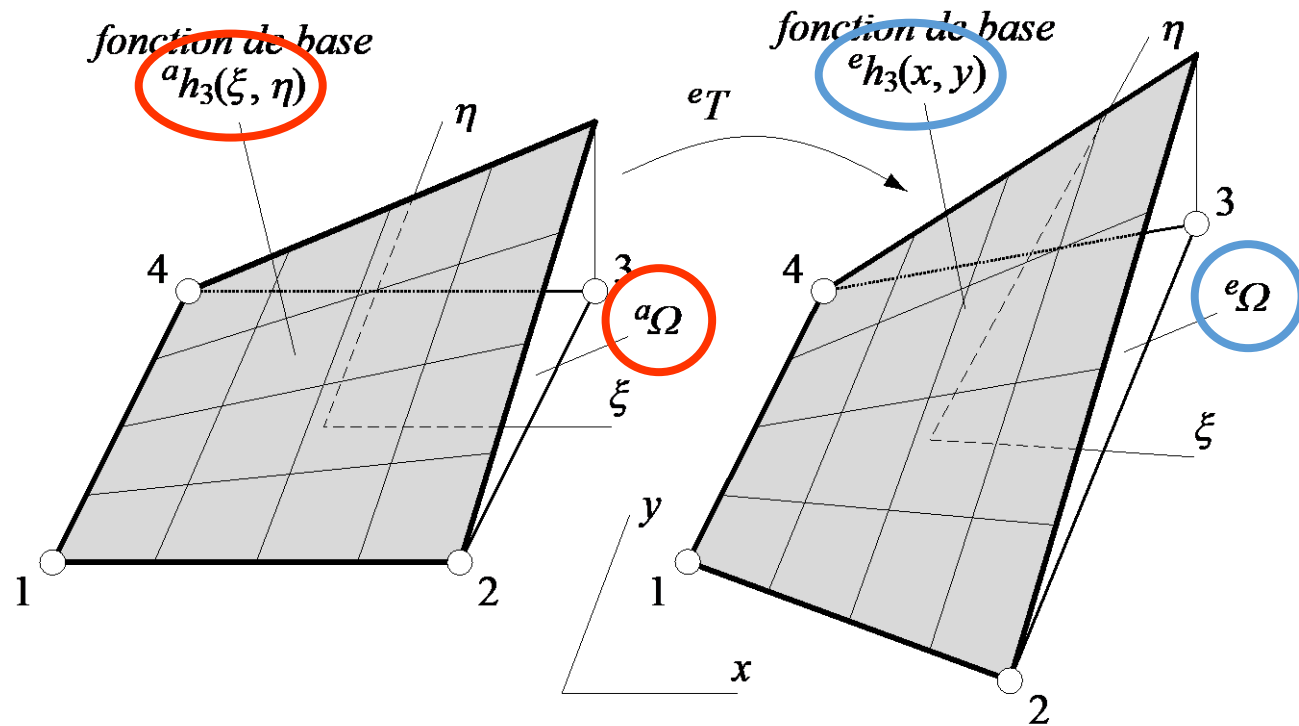
$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2, \dots, {}^e q_{{}^e p}\}^T$$

matrice ($1 \times {}^e p$) des
fonctions de base
de l'élément père

vecteur des ${}^e p$
températures discrètes
dans l'élément déformé

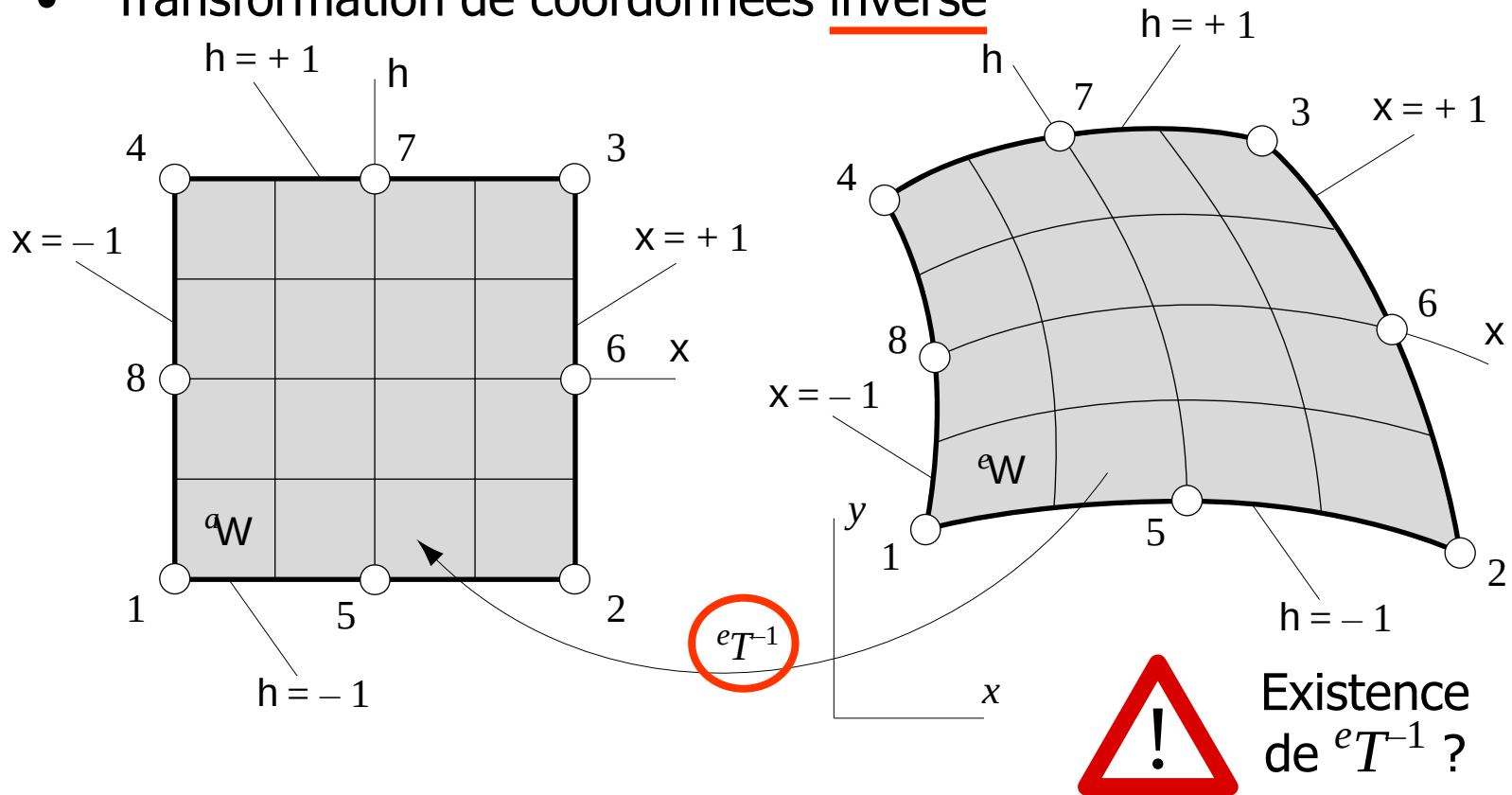
Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des fonctions de base



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées inverse



Éléments finis géométriquement déformés

- Condition d'existence de la transformation inverse (biunivocité de la transformation de coordonnées)
 - Transformation paramétrique inverse

$${}^eT^{-1} : \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

- Dérivation par rapport aux coordonnées naturelles

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = \textcircled{{}^e\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}$$

${}^e\mathbf{J}$ matrice jacobienne de la transformation

Éléments finis géométriquement déformés

- Dérivation par rapport aux coordonnées spatiales

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = {}^e\mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\textcircled{{}^ej}} \begin{bmatrix} \partial y/\partial\eta & -\partial y/\partial\xi \\ -\partial x/\partial\eta & \partial x/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} {}^ej = \det({}^e\mathbf{J}) \\ \text{jacobien de la} \\ \text{transformation} \end{array} \end{aligned}$$

- Condition d'existence de la transformation

$${}^ej = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0$$

$$\forall \xi, \eta \in {}^a\Omega$$



Repère droit
 $\Rightarrow {}^ej > 0$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne

$${}^e\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$


Evaluation explicite de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$



$${}^e\mathbf{J} = {}^e\mathbf{J}(\xi, \eta)$$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul du jacobien (déterminant de la matrice jacobienne)

$$^ej = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$= \sum_{i=1}^{ep} {}^ex_i \frac{\partial {}^ah_i}{\partial \xi} \cdot \sum_{i=1}^{ep} {}^ey_i \frac{\partial {}^ah_i}{\partial \eta}$$



$$^ej = {}^ej(\xi, \eta) - \sum_{i=1}^{ep} {}^ex_i \frac{\partial {}^ah_i}{\partial \eta} \cdot \sum_{i=1}^{ep} {}^ey_i \frac{\partial {}^ah_i}{\partial \xi}$$



Utilité de ej ? Contrôle de l'univocité et calcul de $dx dy$

Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne inverse

$${}^e\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} \quad \triangle ! \quad \text{Inversion explicite de la matrice jacobienne}$$

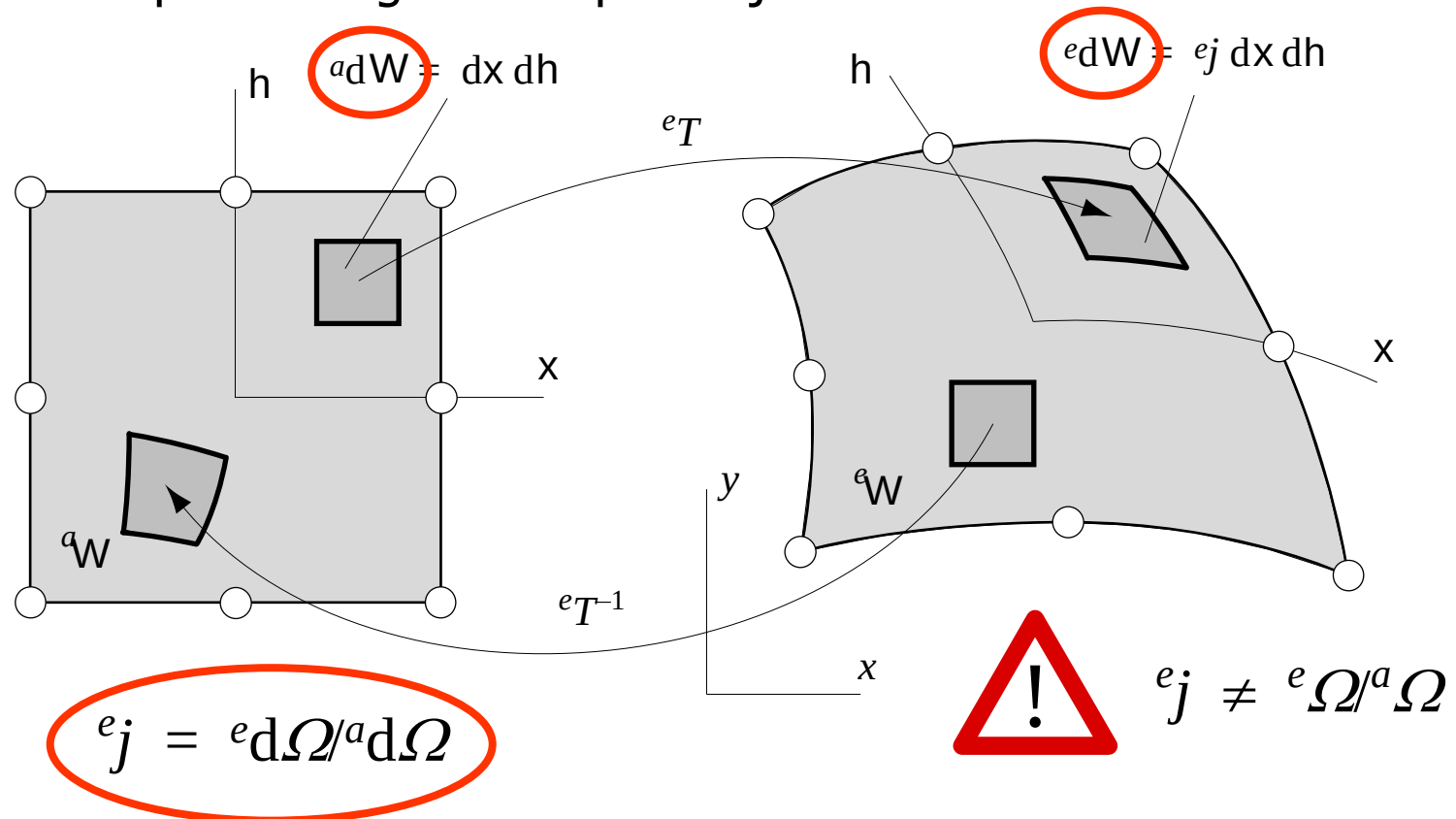
$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} & \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{-1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} &= \frac{-1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} & \frac{\partial\eta}{\partial y} &= \frac{1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \end{aligned}$$



Utilité de ${}^e\mathbf{J}^{-1}$? Calcul de $\nabla^e \mathbf{H}$

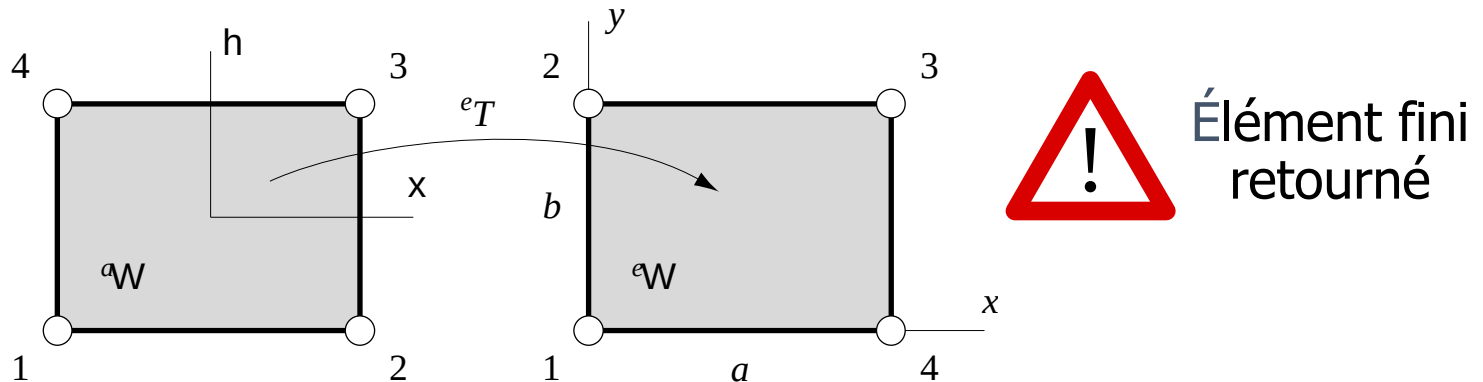
Éléments finis géométriquement déformés

- Interprétation géométrique du jacobien



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien négatif sur tout l'élément archétype



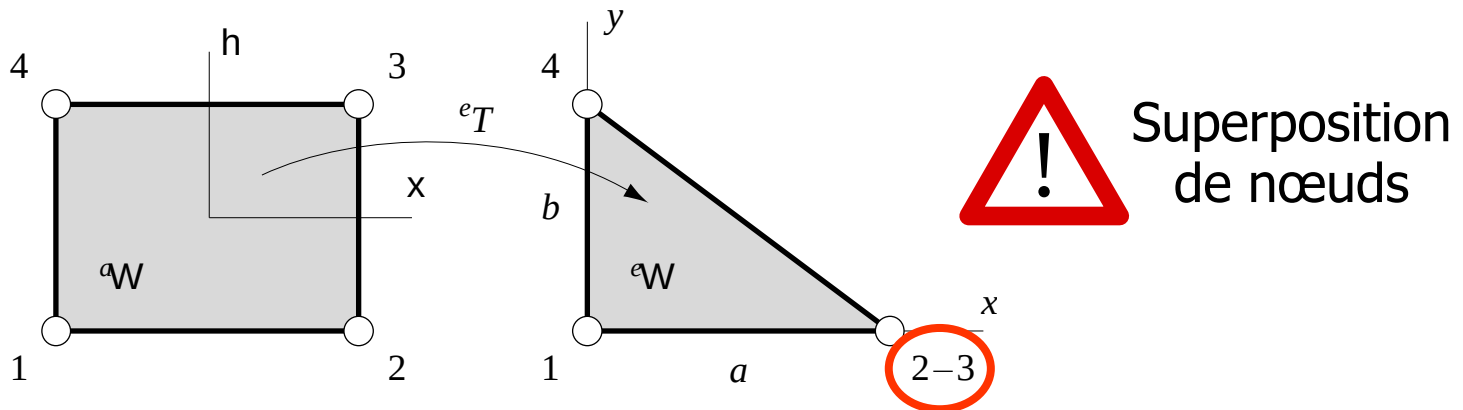
$$x = a \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 + a \cdot (1-\xi)(1+\eta)/4 = a(1+\eta)/2$$

$$y = b \cdot (1+\xi)(1-\eta)/4 + b \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 = b(1+\xi)/2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ll} \partial x / \partial \xi = 0 & \partial y / \partial \xi = b/2 \\ \partial x / \partial \eta = a/2 & \partial y / \partial \eta = 0 \end{array} \right\} J = -ab/4$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien nul en un point de l'élément archétype



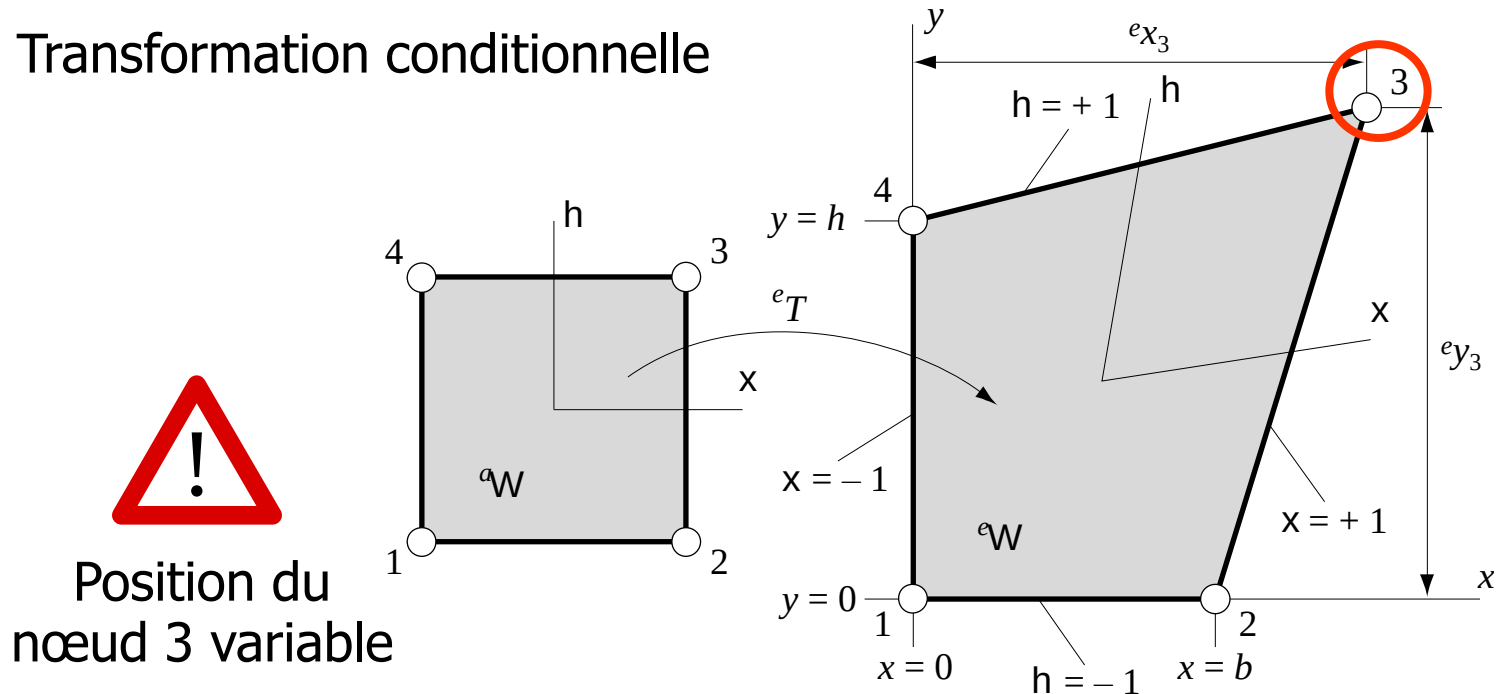
$$x = a \cdot (1+\xi)(1-\eta)/4 + a \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 = a(1+\xi)/2$$

$$y = b \cdot (1-\xi)(1+\eta)/4$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \partial x / \partial \xi = a/2 \\ \partial x / \partial \eta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \partial y / \partial \xi = -b(1+\eta)/4 \\ \partial y / \partial \eta = b(1-\xi)/4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} e_j = ab(1-\xi)/8 \\ e_j(1, \eta) = 0 \end{array} \right\}$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Transformation conditionnelle



$$e_T : \begin{cases} x = b \cdot (1+\xi)(1-\eta)/4 + e_{x_3} \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ y = e_{y_3} \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 + h \cdot (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{cases}$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Recherche du jacobien de la transformation

$$\partial x / \partial \xi = [b + e x_3 - \eta (b - e x_3)] / 4$$

$$\partial x / \partial \eta = (1 + \xi)(e x_3 - b) / 4$$

$$\partial y / \partial \xi = (1 + \eta)(e y_3 - h) / 4$$

$$\partial y / \partial \eta = [h + e y_3 - \xi (h - e y_3)] / 4$$

$$\Rightarrow {}^e j(\xi, \eta) = [b e y_3 (1 + \xi) + h e x_3 (1 + \eta) - b h (\xi + \eta)] / 8$$



Jacobien bilinéaire $\Rightarrow$ Contrôle aux nœuds

$${}^e j(-1, -1) = b h / 4 \quad {}^e j(+1, -1) = b e y_3 / 4$$

$${}^e j(-1, +1) = h e x_3 / 4 \quad {}^e j(+1, +1) = (h e x_3 + b e y_3 - b h) / 4$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

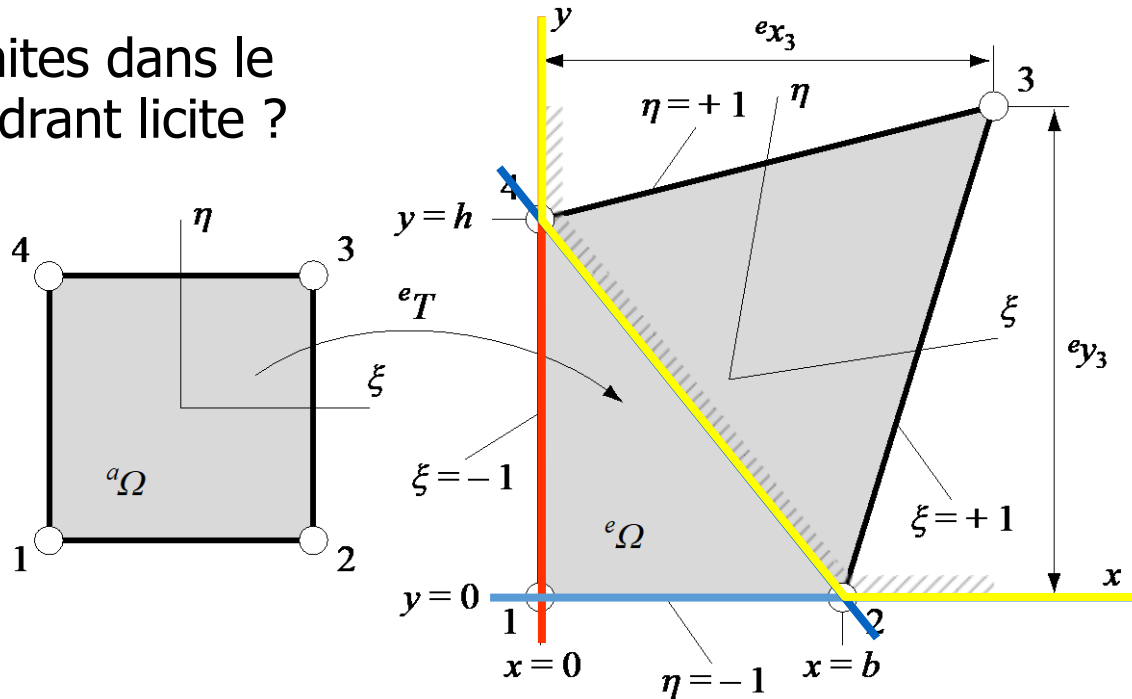
$$e\chi_3 > 0$$

$$ey_3 > 0$$

$$e x_3 / b + e y_3 / h > 1$$



Limites dans le quadrant licite ?



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

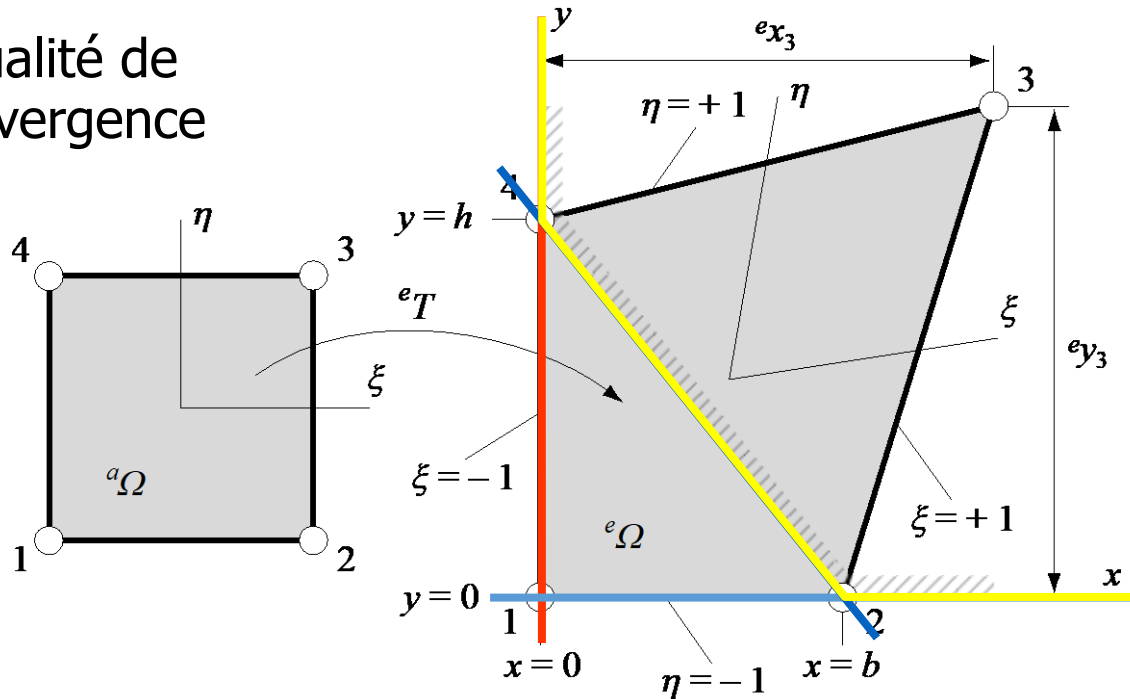
$$e x_3 > 0$$

$$e y_3 > 0$$

$$e x_3 / b + e y_3 / h > 1$$



Qualité de convergence



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Cas particulier de transformation illicite

$$({}^ex_3, {}^ey_3) = (b/2, h/4) \Rightarrow {}^ej(\xi, \eta) = \frac{bh}{32} (3 - 3\xi - 2\eta)$$

