

Méthode des éléments finis

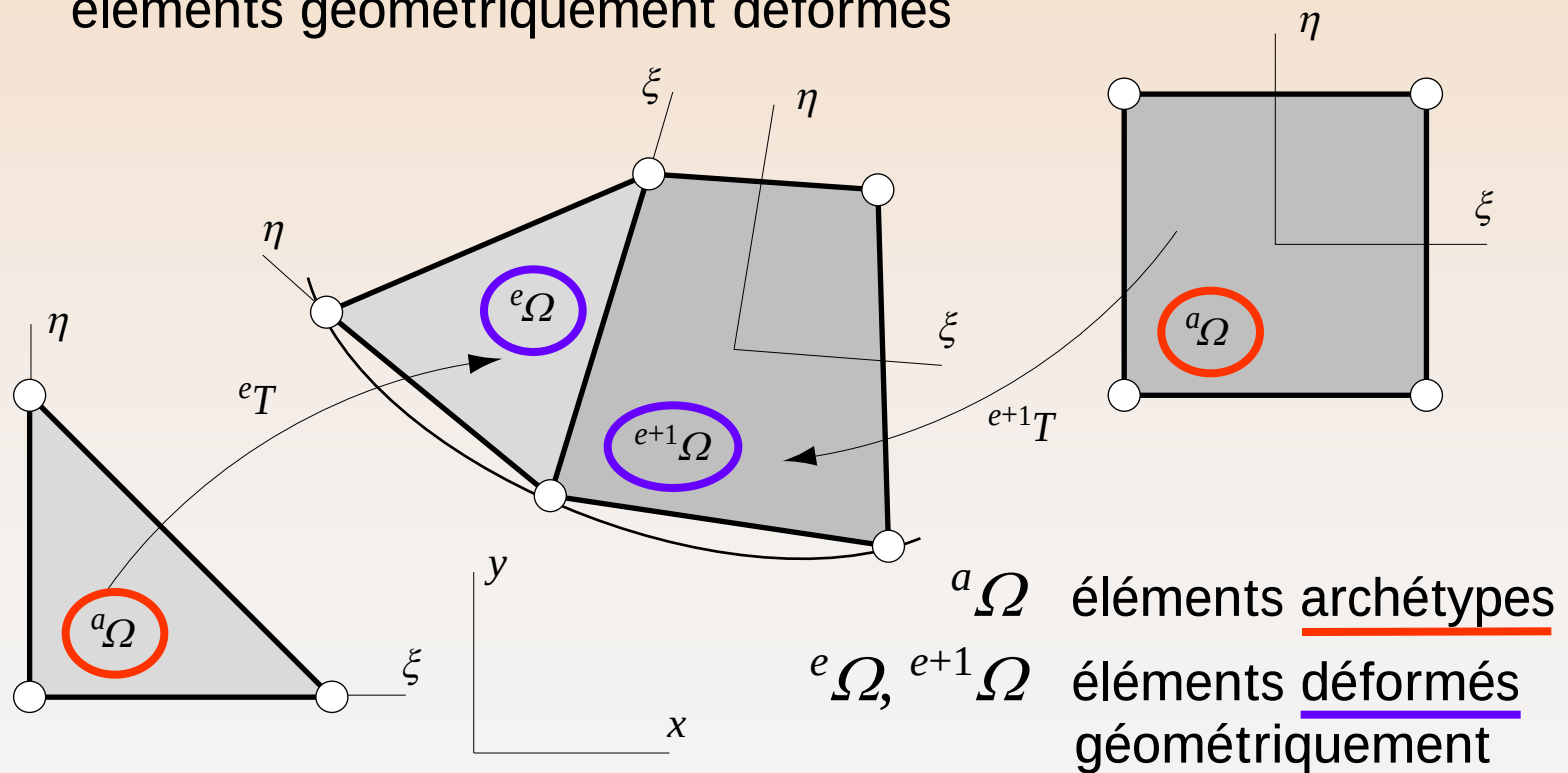
Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

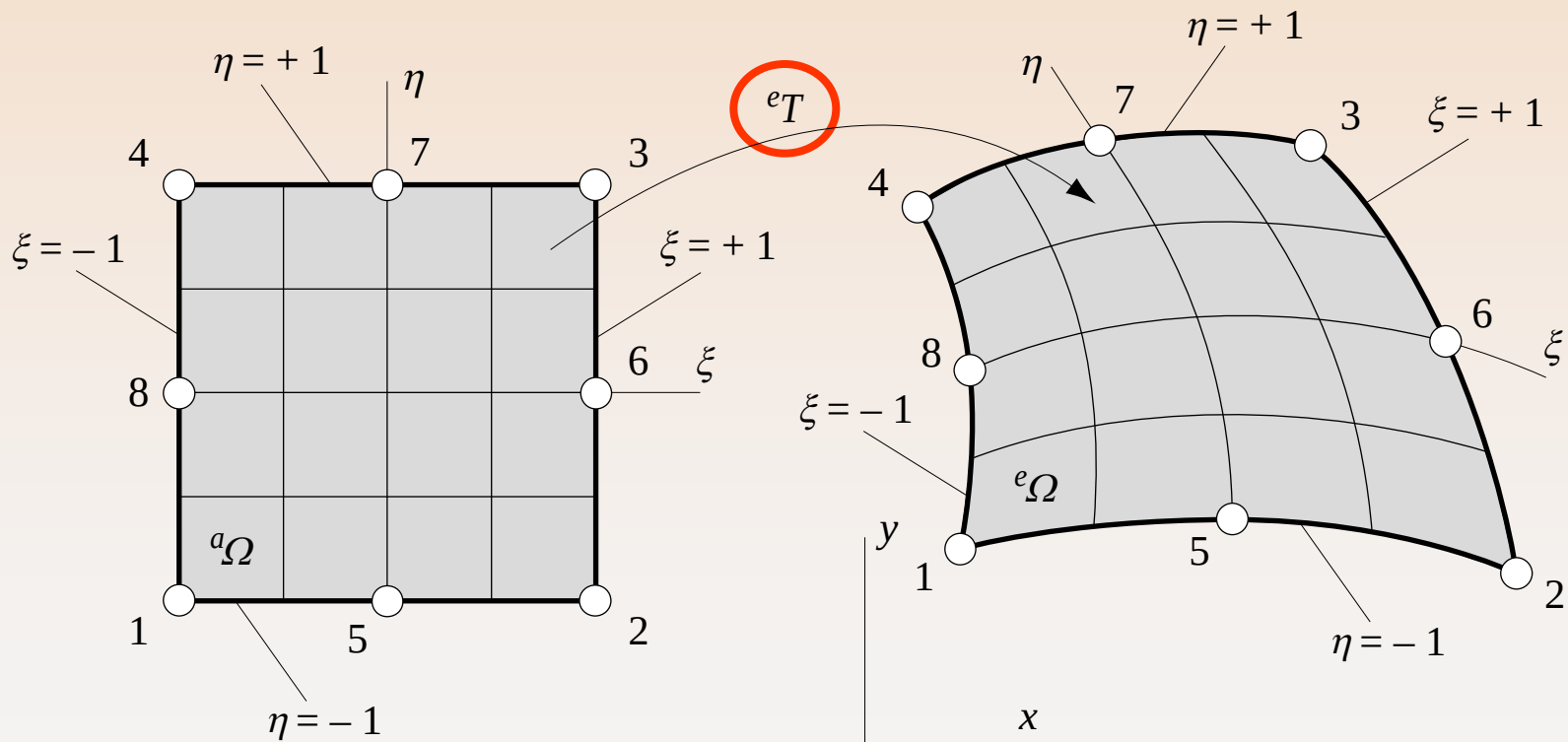
Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des éléments finis de forme régulière en éléments géométriquement déformés



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées bidimensionnelle

$${}^eT : \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned}$$



Choix des fonctions assurant
le changement de repère

- Choix d'une transformation basée sur les fonctions de base de l'élément père

$${}^eT : \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{e_p} a_i(\xi, \eta) e_{x_i} \\ y &= \sum_{i=1}^{e_p} a_i(\xi, \eta) e_{y_i} \end{aligned}$$



Fonctions de base
 a_i déjà connues



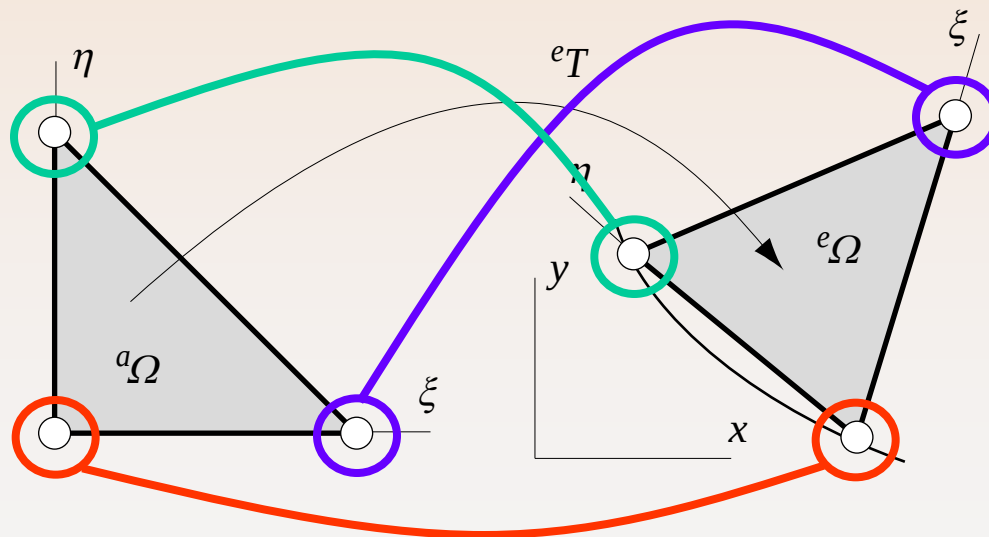
Confusion
des indices

e_{x_i}, e_{y_i} coordonnées nodales



Éléments finis géométriquement déformés

- Avantages de la forme choisie pour la transformation
 - Fonctions de base déjà déterminées pour la solution approchée
 - Transformation régulière (régularité des fonctions de base)
 - Correspondance des nœuds des éléments archétype et déformé



Éléments finis géométriquement déformés

- Correspondance nœud à nœud : univocité de la transformation de coordonnées

$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^e h_i(\xi, \eta) {}^e\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e\mathbf{x}_i = \{{}^e x_i, {}^e y_i\}^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(\xi_j, \eta_j) = \sum_{i=1}^e h_i(\xi_j, \eta_j) {}^e\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^e \delta_{ij} {}^e\mathbf{x}_i = {}^e\mathbf{x}_j$$

Position du nœud j
dans l'élément père

Continuité restreinte
des fonctions de base

Coordonnées du
nœud j de l'élément
déformé



Indices $e \rightarrow$
des courbes
impossibles



diminution de
l'erreur $\Omega - \Omega^h$



Éléments finis géométriquement déformés

- Effet de la transformation de coordonnées sur l'approximation

$${}^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x, y) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^e u^h[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{q}$$

avec

$${}^a \mathbf{H} = [{}^a h_1, {}^a h_2, \dots, {}^a h_{{}^e p}]$$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2, \dots, {}^e q_{{}^e p}\}^T$$

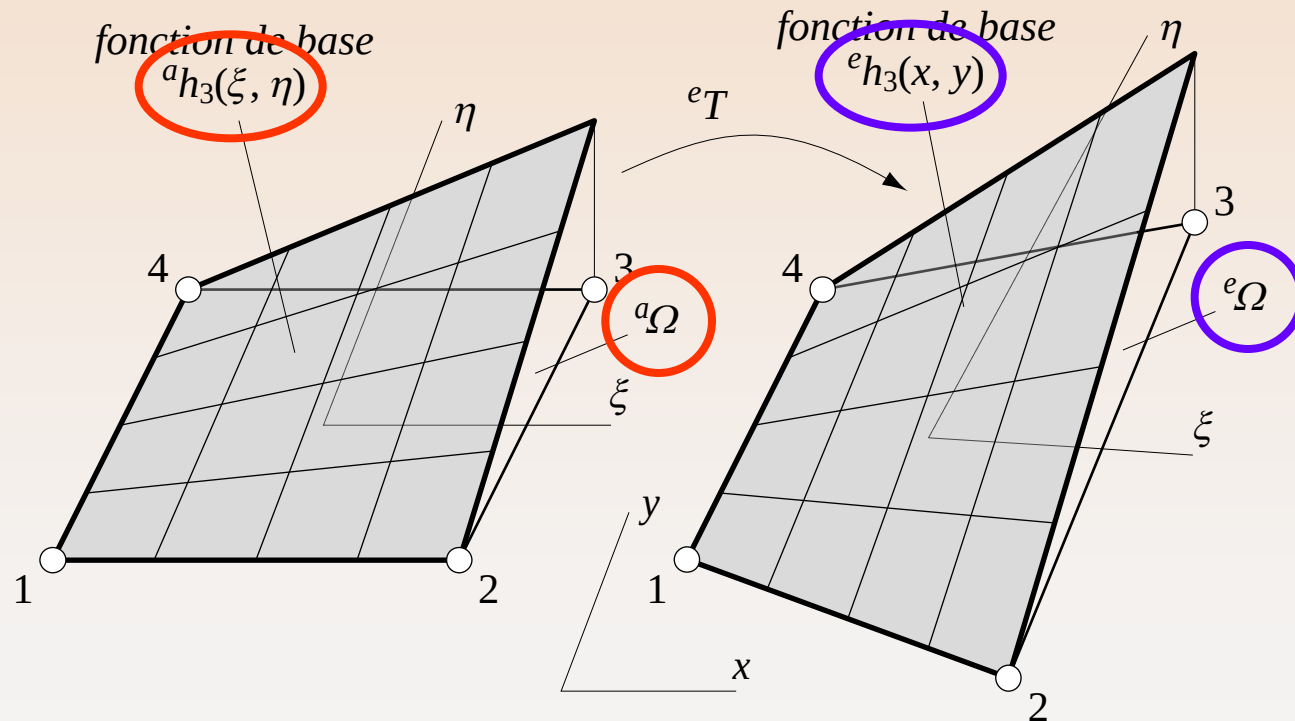
matrice $(1 \times {}^e p)$ des
fonctions de base
de l'élément père

vecteur des ${}^e p$
températures discrètes
dans l'élément déformé



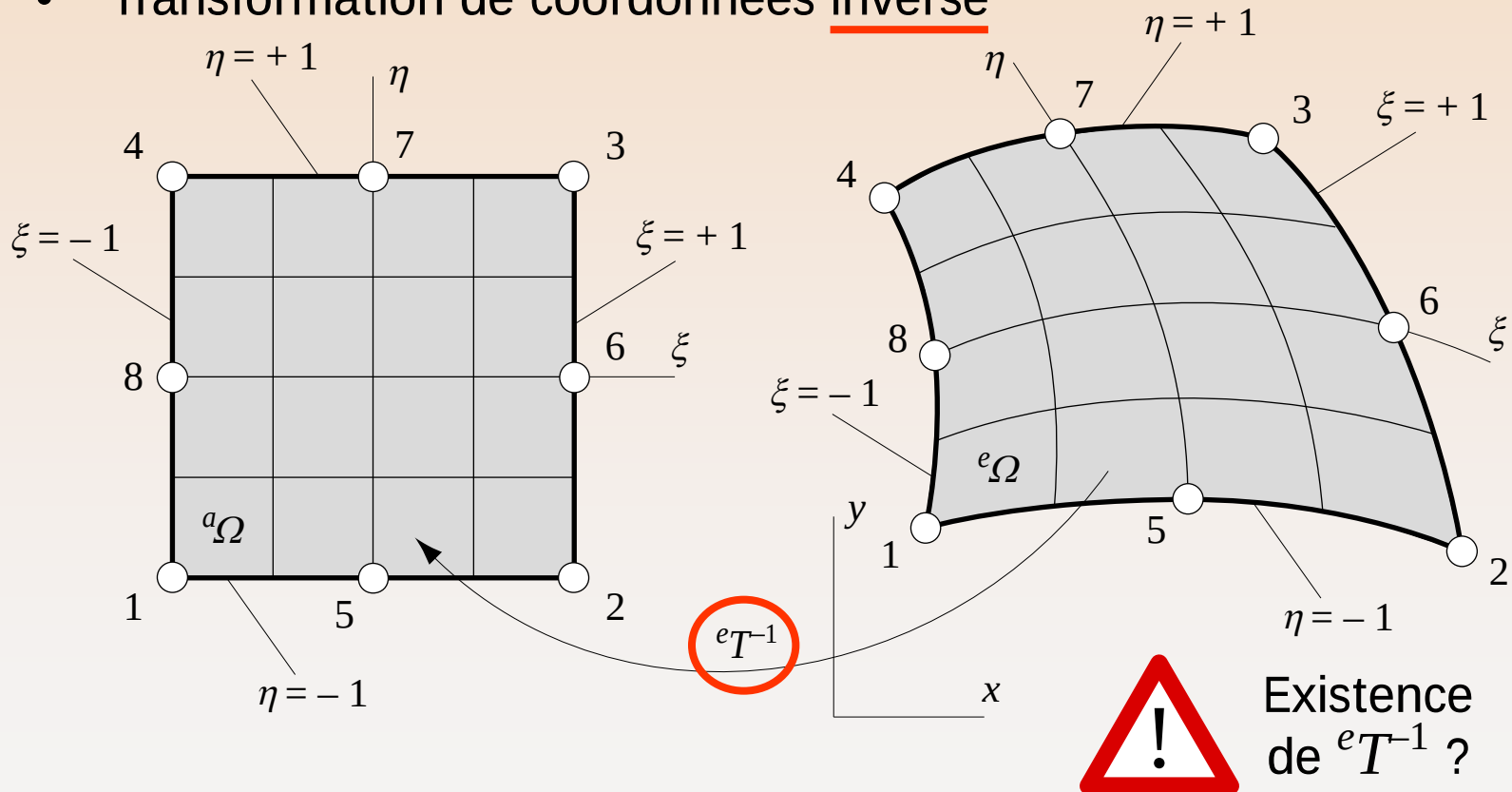
Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation des fonctions de base



Éléments finis géométriquement déformés

- Transformation de coordonnées inverse



Éléments finis géométriquement déformés

- Condition d'existence de la transformation inverse (biunivocité de la transformation de coordonnées)
 - Transformation paramétrique inverse

$${}^eT^{-1} : \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

- Dérivation par rapport aux coordonnées naturelles

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = {}^e\mathbf{J} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}$$

${}^e\mathbf{J}$ matrice jacobienne de la transformation



Éléments finis géométriquement déformés

- Dérivation par rapport aux coordonnées spatiales

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = {}^e\mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\textcircled{{}^e j}} \begin{bmatrix} \partial y/\partial\eta & -\partial y/\partial\xi \\ -\partial x/\partial\eta & \partial x/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} {}^e j = \det({}^e\mathbf{J}) \\ \text{jacobien de la} \\ \text{transformation} \end{array} \end{aligned}$$

- Condition d'existence de la transformation

$${}^e j = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0$$

$$\forall \xi, \eta \in {}^a\Omega$$



Repère droit
 $\Rightarrow {}^e j > 0$



Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne

$${}^e\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$



Evaluation explicite de
la matrice jacobienne

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$



$${}^e\mathbf{J} = {}^e\mathbf{J}(\xi, \eta)$$



Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul du jacobien (déterminant de la matrice jacobienne)

$$^e j = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$= \sum_{i=1}^e x_i \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi} \cdot \sum_{i=1}^e y_i \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta}$$



$$^e j = ^e j(\xi, \eta) - \sum_{i=1}^e x_i \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta} \cdot \sum_{i=1}^e y_i \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi}$$



Utilité de $^e j$? Contrôle de l'univocité et calcul de $dx dy$



Éléments finis géométriquement déformés

- Calcul de la matrice jacobienne inverse

$${}^e\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix}$$



Inversion explicite de
la matrice jacobienne

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} & \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{-1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e y_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} &= \frac{-1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} & \frac{\partial\eta}{\partial y} &= \frac{1}{{}^e j} \sum_{i=1}^p {}^e x_i \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \end{aligned}$$

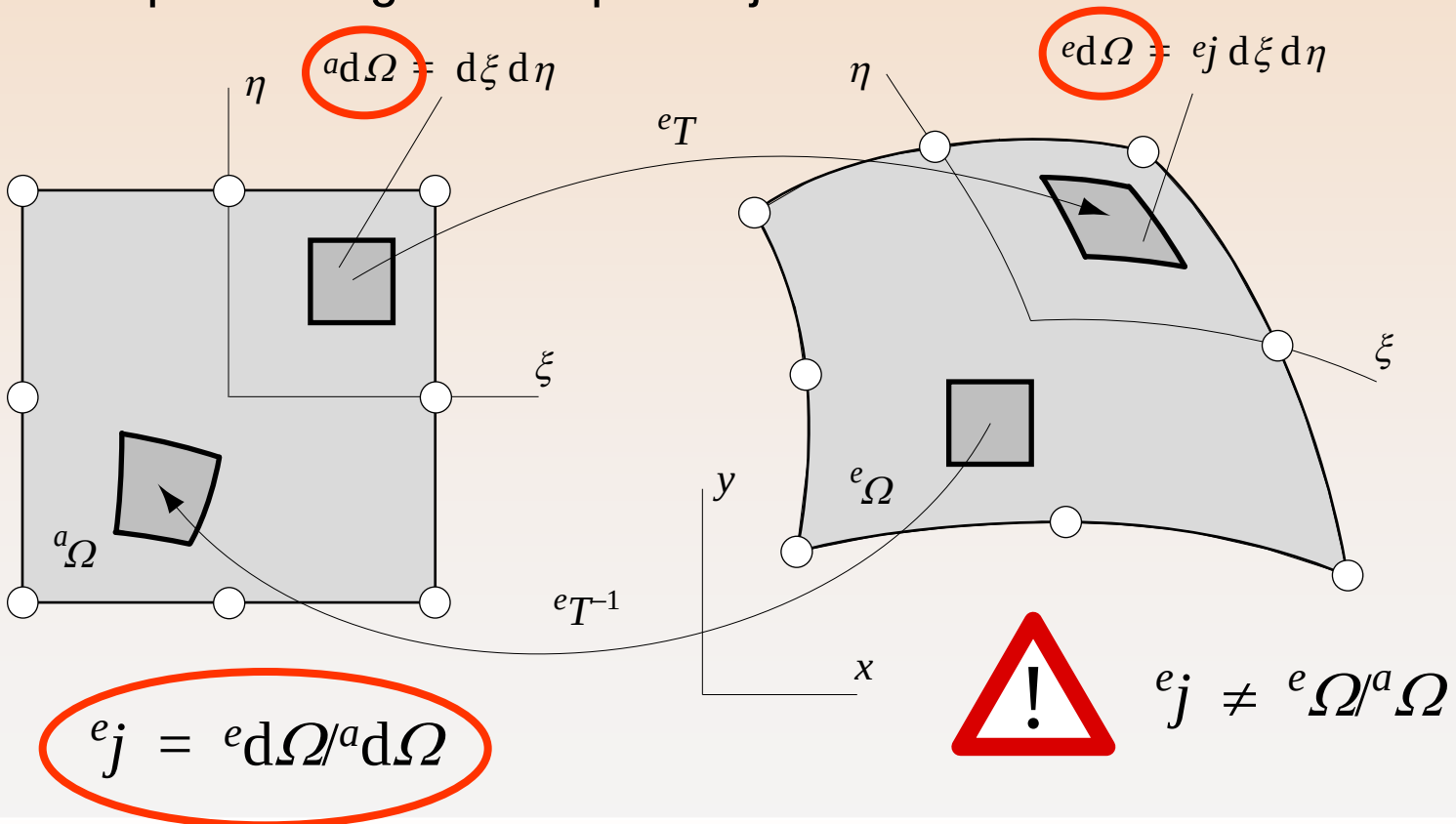


Utilité de ${}^e\mathbf{J}^{-1}$? Calcul de $\nabla^e \mathbf{H}$



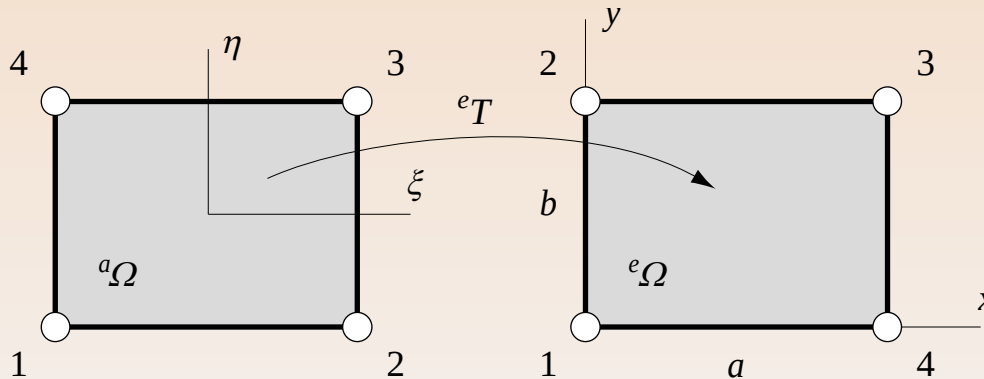
Éléments finis géométriquement déformés

- Interprétation géométrique du jacobien



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien négatif sur tout l'élément archétype



Élément fini
retourné

$$x = a \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 + a \cdot (1-\xi)(1+\eta)/4 = a(1+\eta)/2$$

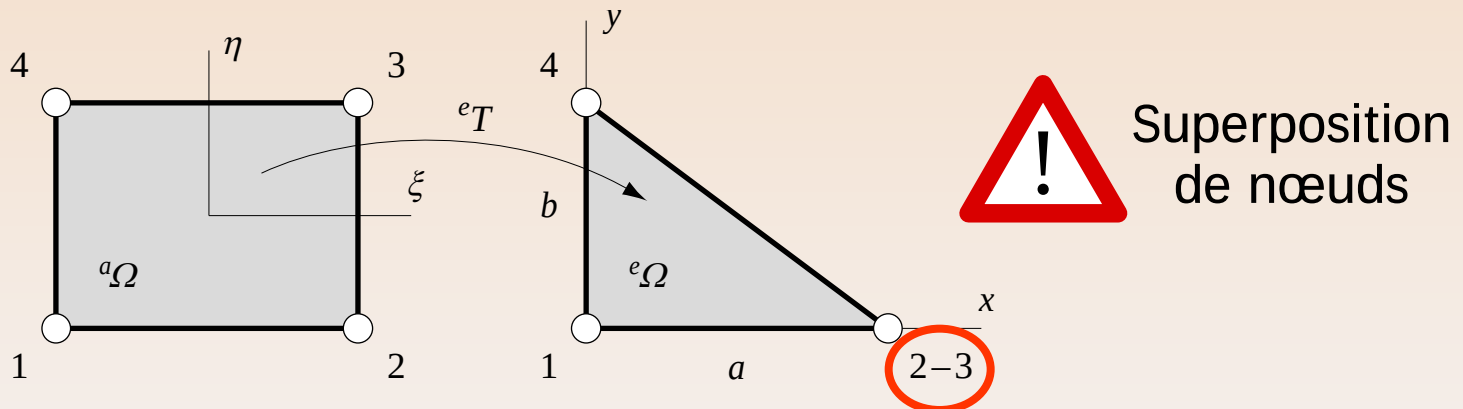
$$y = b \cdot (1+\xi)(1-\eta)/4 + b \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 = b(1+\xi)/2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ll} \partial x / \partial \xi = 0 & \partial y / \partial \xi = b/2 \\ \partial x / \partial \eta = a/2 & \partial y / \partial \eta = 0 \end{array} \right\} \mathfrak{J} = -ab/4$$



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Jacobien nul en un point de l'élément archétype



$$x = a \cdot (1+\xi)(1-\eta)/4 + a \cdot (1+\xi)(1+\eta)/4 = a(1+\xi)/2$$

$$y = b \cdot (1-\xi)(1+\eta)/4$$

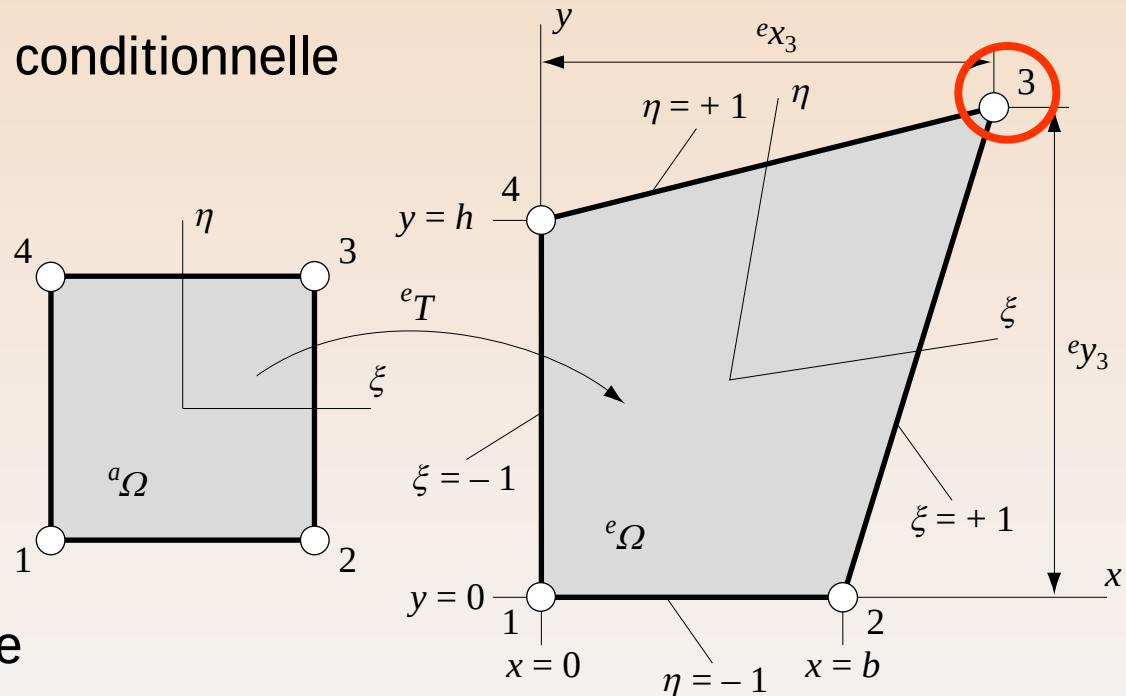
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \partial x / \partial \xi = a/2 \\ \partial x / \partial \eta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \partial y / \partial \xi = -b(1+\eta)/4 \\ \partial y / \partial \eta = b(1-\xi)/4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} {}^e j = ab(1-\xi)/8 \\ {}^e j(1, \eta) = 0 \end{array} \right\}$$

Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Transformation conditionnelle



Position du
nœud 3 variable



$$e_T : \begin{cases} x = b \cdot (1 + \xi)(1 - \eta) / 4 + e_{x_3} \cdot (1 + \xi)(1 + \eta) / 4 \\ y = e_{y_3} \cdot (1 + \xi)(1 + \eta) / 4 + h \cdot (1 - \xi)(1 + \eta) / 4 \end{cases}$$



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Recherche du jacobien de la transformation

$$\partial x / \partial \xi = [b + e x_3 - \eta (b - e x_3)] / 4$$

$$\partial x / \partial \eta = (1 + \xi)(e x_3 - b) / 4$$

$$\partial y / \partial \xi = (1 + \eta)(e y_3 - h) / 4$$

$$\partial y / \partial \eta = [h + e y_3 - \xi (h - e y_3)] / 4$$

$$\Rightarrow {}^e j(\xi, \eta) = [b e y_3 (1 + \xi) + h e x_3 (1 + \eta) - b h (\xi + \eta)] / 8$$



Jacobien bilinéaire $\Rightarrow$ Contrôle aux nœuds

$${}^e j(-1, -1) = b h / 4 \quad {}^e j(+1, -1) = b e y_3 / 4$$

$${}^e j(-1, +1) = h e x_3 / 4 \quad {}^e j(+1, +1) = (h e x_3 + b e y_3 - b h) / 4$$



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

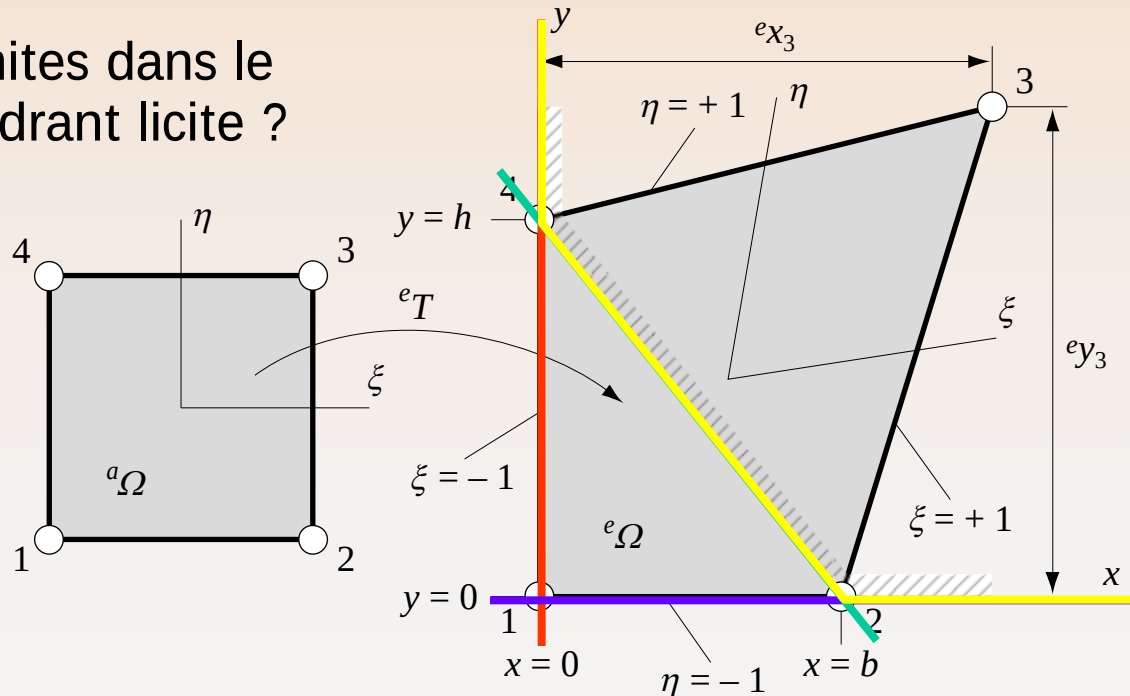
$$e_{x_3} > 0$$

$$e_{y_3} > 0$$

$$e_{x_3}/b + e_{y_3}/h > 1$$



Limites dans le quadrant licite ?



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Conditions d'existence de la transformation inverse (biunivocité)

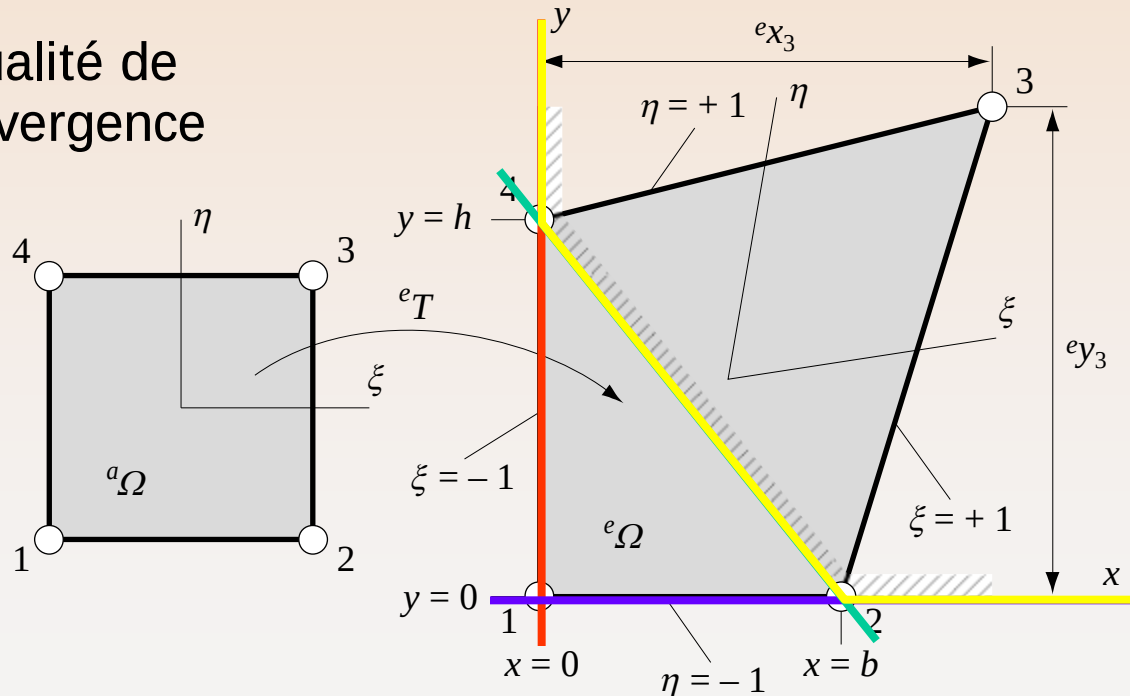
$$e_{x_3} > 0$$

$$e_{y_3} > 0$$

$$e_{x_3}/b + e_{y_3}/h > 1$$



Qualité de convergence



Exemples de transformations illicites et conditionnelles

- Cas particulier de transformation illicite

$$(e x_3, e y_3) = (b/2, h/4) \Rightarrow e j(\xi, \eta) = \frac{bh}{32} (3 - 3\xi - 2\eta)$$

