

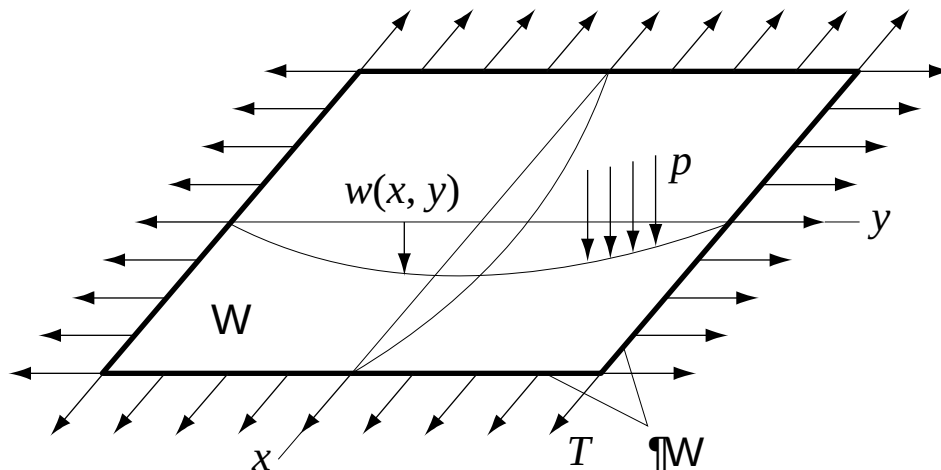
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Déformée transversale d'une membrane tendue



T tension uniforme
 p charge répartie
 w déformée

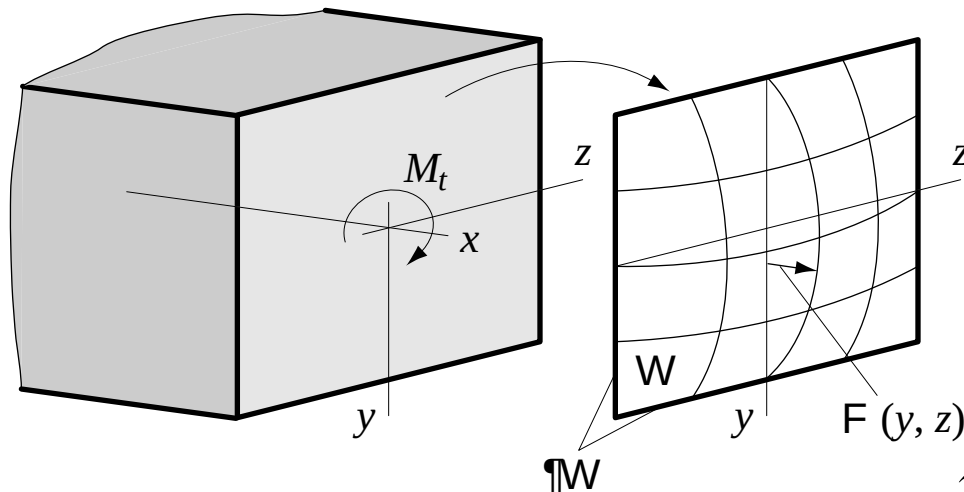
$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

$$w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Torsion d'un barreau non circulaire (analogie de la membrane)



M_t moment de torsion

Φ fonction de contrainte

G module de glissement

θ angle de torsion unitaire

τ_{xy}, τ_{xz} contraintes de cisaillement

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

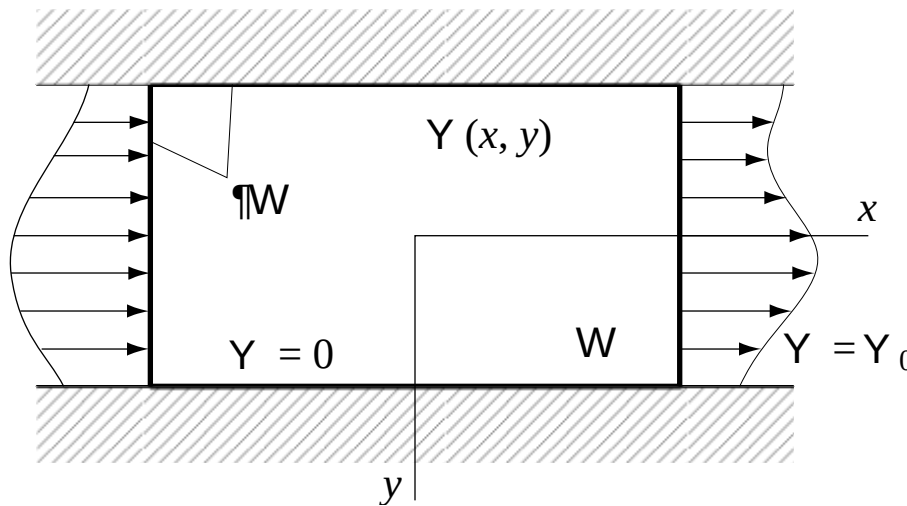
$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\tau_{xy} = \partial \Phi / \partial z$$

$$\tau_{xz} = -\partial \Phi / \partial y$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Écoulement irrotationnel plan incompressible



Ψ fonction de courant

Ψ_0 fonction de courant imposée

v_x, v_y vitesses de l'écoulement

$$v_x = \partial \Psi / \partial y$$

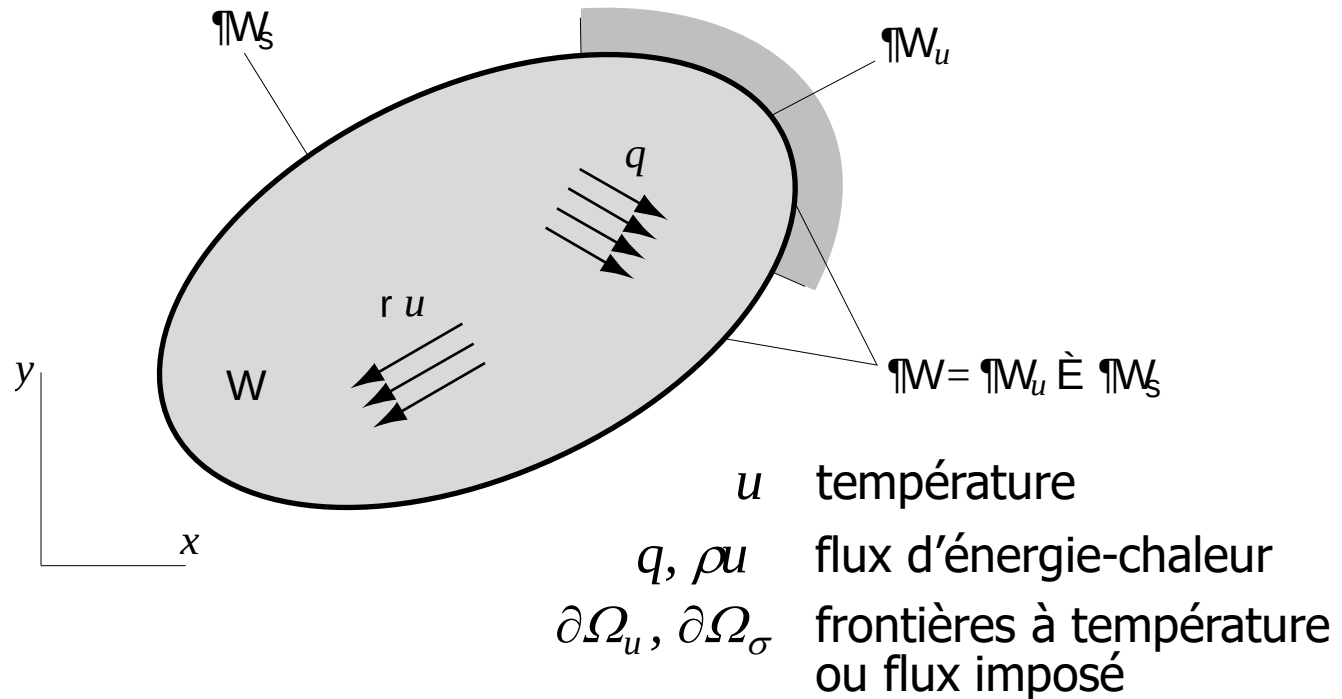
$$v_y = -\partial \Psi / \partial x$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Laplace

$$\Psi = \Psi_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

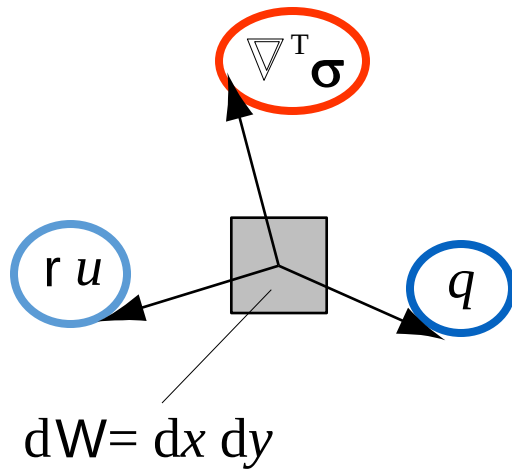
Problème modèle du transfert-chaaleur par conduction



Milieu bidimensionnel soumis à un transfert-chaaleur par conduction (régime permanent)

Formulation forte du problème

- Principe de conservation (bilan des flux d'énergie-chaleur dans un volume de contrôle $d\Omega$)



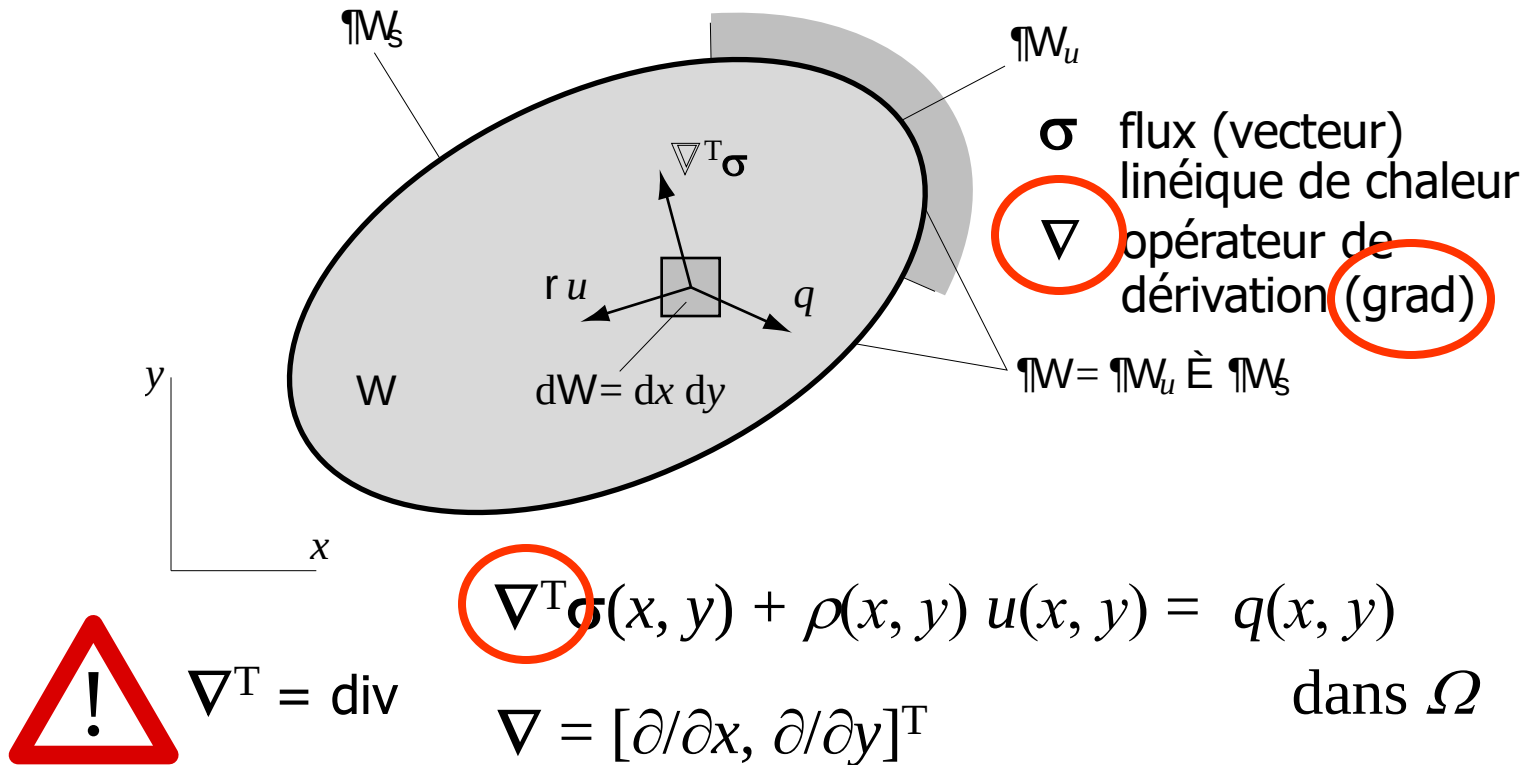
- Flux interne d'énergie-chaleur pénétrant
- Flux interne d'énergie-chaleur absorbé (dégagé) par un puits (source) surfacique de chaleur proportionnel à la température
- Flux interne d'énergie-chaleur dégagé (absorbé) par une source (puits) surfacique de chaleur indépendante de la température



Signe des flux internes
d'énergie-chaleur

Formulation forte du problème

- Équation d'équilibre



Formulation forte du problème

- Loi de comportement (loi de Fourier)

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = - \kappa(x, y) \nabla u(x, y)$$

κ coefficient de conductibilité thermique

∇u gradient du champ de température



Linéarité du gradient de température

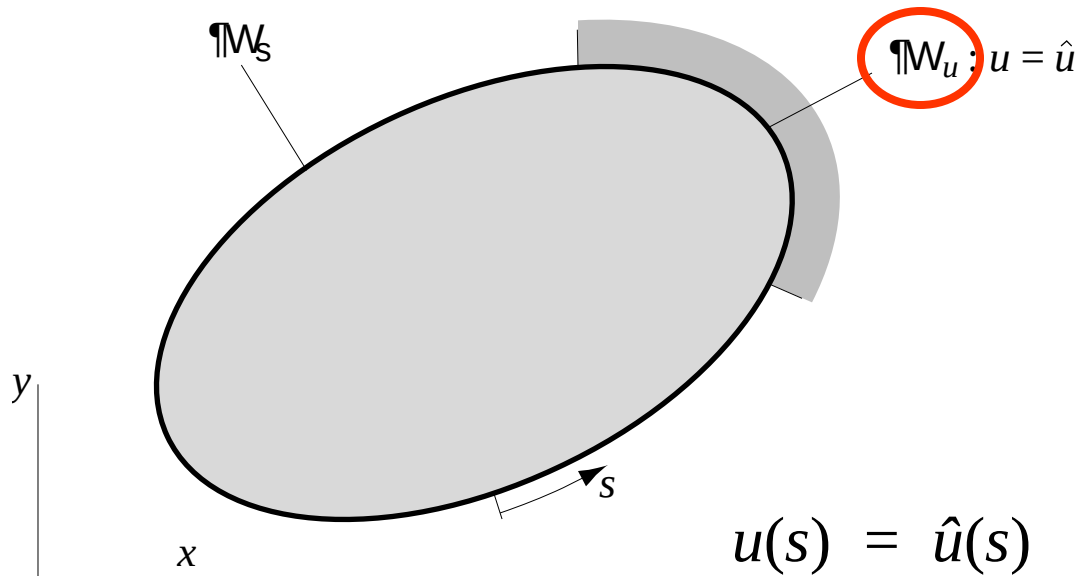
- Séparation de la frontière en limites essentielle et naturelle

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$$

$$\emptyset = \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Conditions aux limites essentielles sur le bord $\partial\Omega_u$

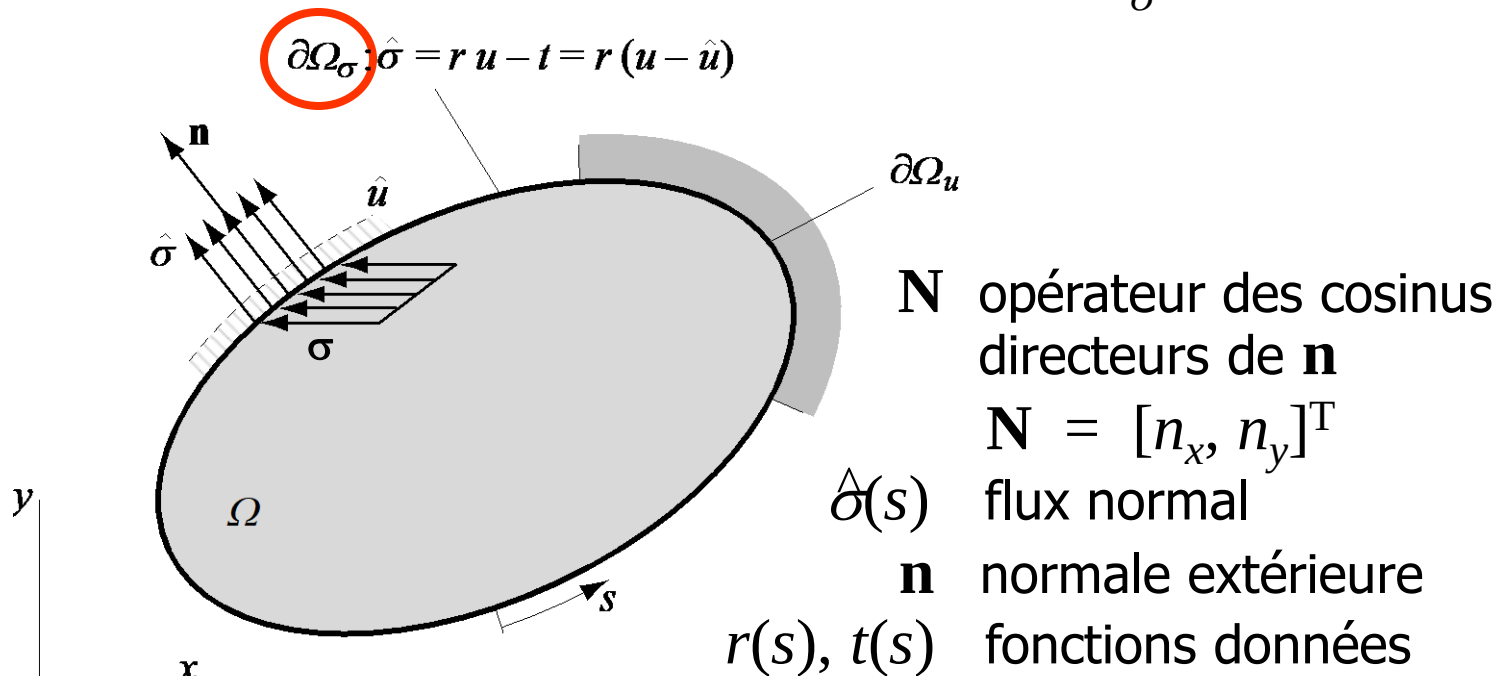


$$u(s) = \hat{u}(s) \quad \forall s \in \partial\Omega_u$$

$\hat{u}(s)$ température fixée

Formulation forte du problème

- Conditions aux limites naturelles sur le bord $\partial\Omega_\sigma$



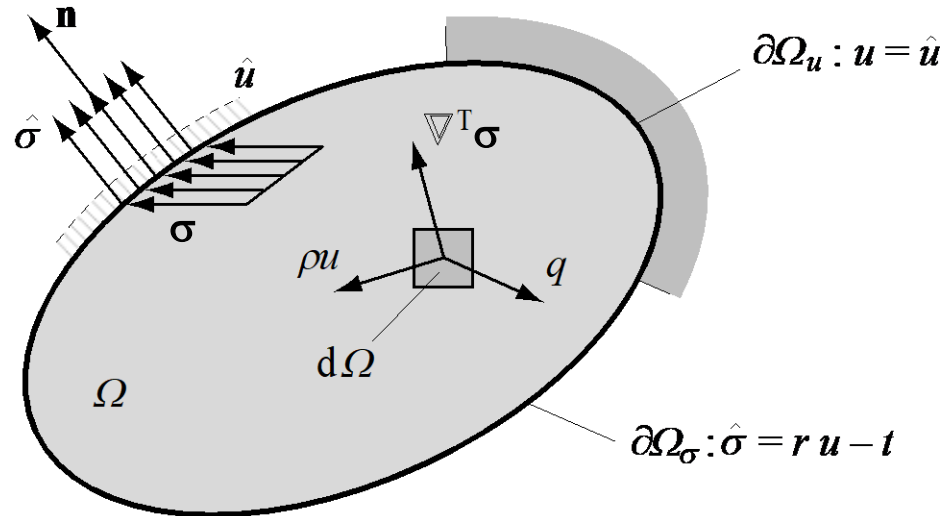
$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}(s) = \hat{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s) \cdot \mathbf{n} = r(s)u(s) - t(s) \quad \forall s \in \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



Dérivée
directionnelle



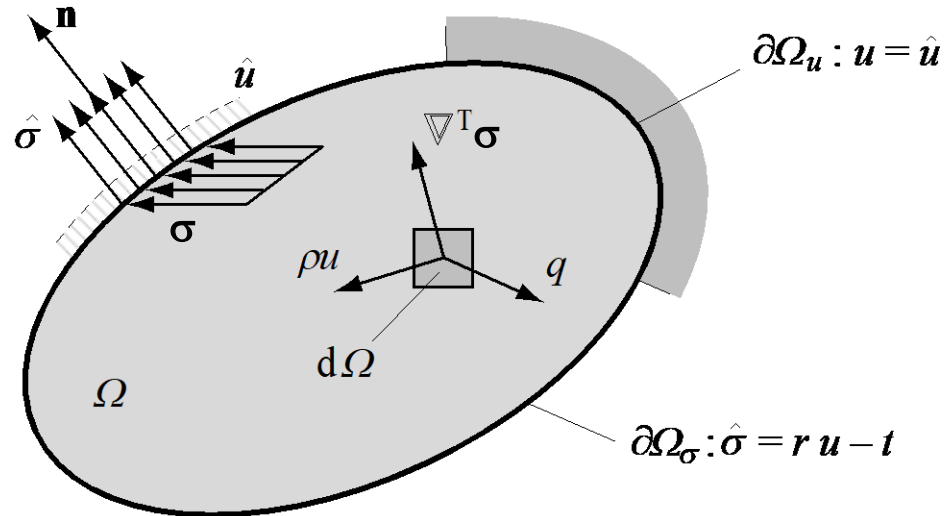
$$u \in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u = q \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = \hat{u} \quad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) &= -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa (\partial u / \partial n) \\ &= ru - t \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



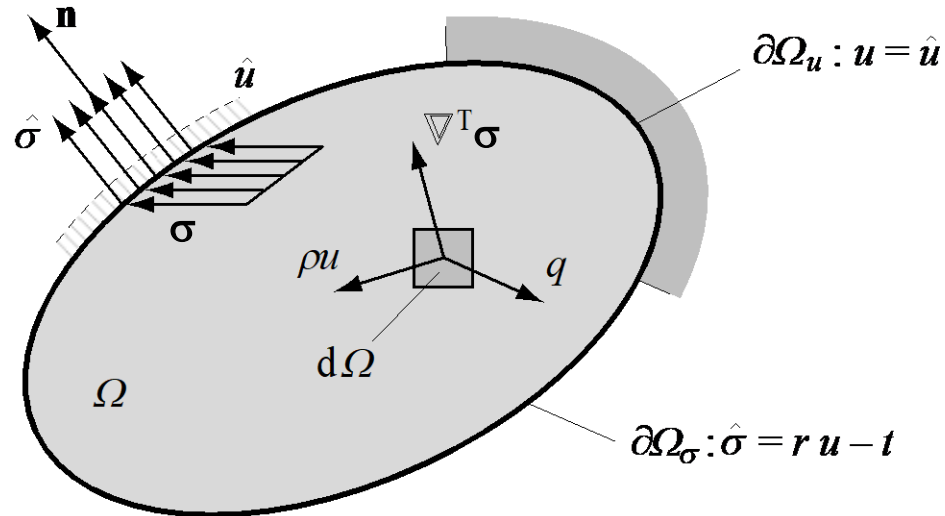
$$\begin{aligned}
 u &\in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u = q && \text{dans } \Omega \\
 \bar{\Omega} &= \Omega \cup \partial\Omega && u = \hat{u} \quad \text{sur } \partial\Omega_u \\
 \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) &= -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa (\partial u / \partial n) && = ru - t \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma
 \end{aligned}$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



Régularité des
fonctions



$$u \in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u = q \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = \hat{u} \quad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) &= -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa (\partial u / \partial n) \\ &= ru - t \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Forme intégrale

$$\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u - q] \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

δu température virtuelle

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle pour l'intégration par parties du terme $\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u)] \delta u \, dx \, dy$

- Divergence du produit du vecteur $-\kappa \nabla u$ par le scalaire δu

$$\nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] = \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) + (-\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u$$

$$\Rightarrow \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) = \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] + (\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Forme intégrale

$$\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u - q] \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

δu température virtuelle

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle pour l'intégration par parties du terme $\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u)] \delta u \, dx \, dy$

- Divergence du produit du vecteur $-\kappa \nabla u$ par le scalaire δu

$$\nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] = \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) + (-\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u$$

$$\Rightarrow \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) = \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] + (\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)
 - Théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot \mathbf{n} \, ds \end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)

- Théorème de la divergence

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot \mathbf{n} \, ds\end{aligned}$$

- Intégration par parties (théorème de Green – formule de Gauss)

$$\int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \delta u \, ds$$



Théorème de
la divergence

$$- \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)
 - Théorème de la divergence

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot \mathbf{n} \, ds\end{aligned}$$

- Intégration par parties (théorème de Green – formule de Gauss)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \delta u \, ds \\ - \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u\end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites

$$\dots - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

$$\dots - \int_{\partial\Omega_u} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites essentielles

$$\dots - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$



$$\dots - \cancel{\int_{\partial\Omega_u} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds} - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

Température virtuelle
 "thermiquement"
 admissible

$u = \hat{u} \text{ sur } \partial\Omega_u$
 $\Rightarrow \delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites naturelles

$$\dots - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

$$\dots - \int_{\partial\Omega_u} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) \\ &= r(s) u(s) - t(s) \text{ sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites

$$\dots - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

$$\dots - \int_{\partial\Omega_u} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) \\ &= r(s)u(s) - t(s) \text{ sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \, \delta u] \, dx \, dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\sigma} (ru - t) \, \delta u \, ds - \int_{\Omega} q \, \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \, \delta u$$

Formulation faible du problème

- Forme faible du transfert-chaleur par conduction

$$\begin{aligned} u \in U : \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy \\ + \int_{\partial\Omega_\sigma} r u \delta u \, ds \\ = \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_\sigma} t \delta u \, ds \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

$$U = \{u(x, y) \mid u(x, y) \in H^1(\Omega) ; u(s) = \hat{u}(s), \forall s \in \partial\Omega_u\}$$

$$V = \{\delta u(x, y) \mid \delta u(x, y) \in H^1(\Omega) ; \delta u(s) = 0, \forall s \in \partial\Omega_u\}$$

$$H^1(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial x \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial y \in L^2(\Omega)\}$$

Formulation faible du problème

- Forme faible du transfert-chaleur par conduction

$$\begin{aligned}
 u \in U : \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy & \quad \text{Conditions naturelles} \\
 & + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} r u \delta u \, ds \\
 = \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} t \delta u \, ds & \quad \forall \delta u \in V
 \end{aligned}$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

$$\begin{aligned}
 U &= \{u(x, y) \mid u(x, y) \in H^1(\Omega) ; u(s) = \hat{u}(s), \forall s \in \partial\Omega_u\} \\
 V &= \{\delta u(x, y) \mid \delta u(x, y) \in H^1(\Omega) ; \delta u(s) = 0, \forall s \in \partial\Omega_u\} \\
 H^1(\Omega) &= \{u \mid u \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial x \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial y \in L^2(\Omega)\}
 \end{aligned}$$

Conditions
essentielles