Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Formulation faible approchée

- Approximation des températures réelle et virtuelle

$$u \approx u^h \in U^h \subset U$$

$$\delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

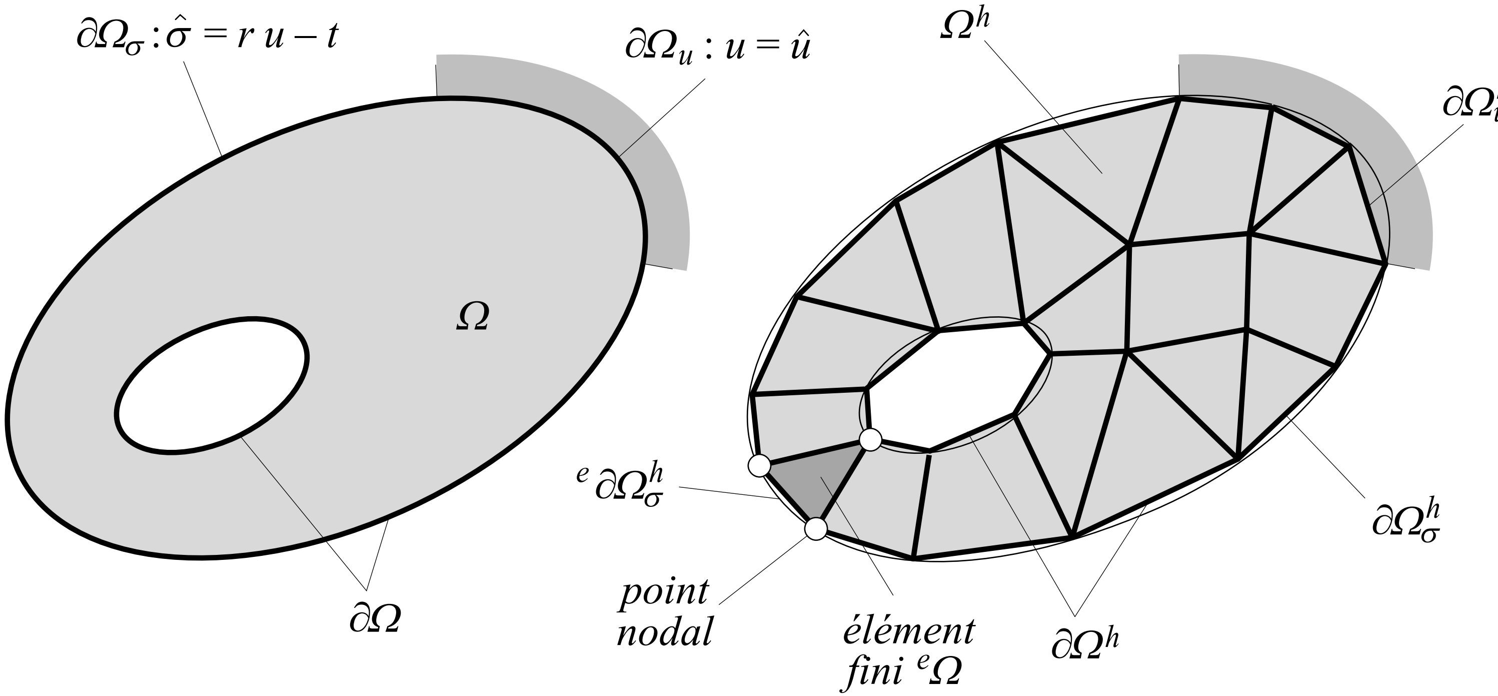
- Forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_{\Omega^h} [\kappa\,(\nabla u^h)^{\mathrm{T}}\,\nabla \delta u^h + \rho\, u^h\, \delta u^h]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega^h_\sigma} r\, u^h\, \delta u^h\, \mathrm{d}s$$

$$= \int_{\Omega^h} q\, \delta u^h\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega^h_\sigma} t\, \delta u^h\, \mathrm{d}s \quad \forall\ \delta u^h \in V^h$$

! Domaine et frontière naturelle approchés

Méthode des éléments finis



Discrétisation en éléments finis triangulaires et quadrangulaires

Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation des températures par la méthode des éléments finis : association d'une fonction de forme à chacun des p nœuds

Méthode dérivée de la technique de Galerkin

$$u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y)\,\mathbf{q}$$
$$\delta u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y)\,\delta\mathbf{q}$$

Fonctions à support compact

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_p]$$

matrice $(1\times p)$ des fonctions de forme nodales $h_i(x, y)$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_p\}^{\mathrm{T}}$$
$$\delta\mathbf{q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_p\}^{\mathrm{T}}$$

vecteurs $(1\times p)$ des températures nodales réelles et virtuelles

Méthode des éléments finis : approche globale

- Critères classiques de convergence (fonctions globales h_i)
  - Critère de complétude ou de complétion

$$h_i(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \dots$$

  - Critère de différentiabilité

$$h_i(x, y) \in H^1(\Omega)$$

Régularité des données

  - Critère de continuité aux nœuds

$$h_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

(x_j, y_j) position du nœud j

  - Critère de continuité aux interfaces élémentaires

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_k = \hat{q}_k,\ \forall\, k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^h} [\kappa\,(\nabla\mathbf{H})^{\mathrm{T}}\,\nabla\mathbf{H} + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}\,\mathrm{d}s$$

matrice ($p\times p$)
de conductivité

$$\nabla\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial\mathbf{H}/\partial x \\ \partial\mathbf{H}/\partial y \end{bmatrix}$$

$$(\nabla\mathbf{H})^{\mathrm{T}}\,\nabla\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial\mathbf{H}/\partial x \\ \partial\mathbf{H}/\partial y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \partial\mathbf{H}/\partial x \\ \partial\mathbf{H}/\partial y \end{bmatrix} = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x}^{\mathrm{T}} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial y}^{\mathrm{T}} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial y}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme faible discrète (*suite*)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} \;=\; \mathbf{r} \qquad (q_k = \hat{q}_k,\ \forall\ k \;\big|\; (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\mathbf{K} \;=\; \int_{\Omega^h} \{\kappa\,[(\partial\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\partial x)\,(\partial\mathbf{H}/\partial x) + (\partial\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\partial y)\,(\partial\mathbf{H}/\partial y)] \;+\; \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\Omega^h} (\kappa\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B} + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}\,\mathrm{d}s$$

$\mathbf{B} = \nabla\mathbf{H}$ matrice-gradient $(2\times p)$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme indicielle de la formulation faible discrète

$$\sum_{j=1}^{p} k_{ij}\, q_j \;=\; r_i \quad (i = 1, 2, ..., p) \quad \left(q_k = \hat{q}_k, \;\forall\; k \;\middle|\; (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h\right)$$

$$\begin{aligned} k_{ij} \;=\; \int_{\Omega^h} \{\kappa\, [(\partial h_i/\partial x)\, (\partial h_j/\partial x) \\ + (\partial h_i/\partial y)\, (\partial h_j/\partial y)] \;+\; \rho\, h_i\, h_j\}\; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r\, h_i\, h_j\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$r_i = \int_{\Omega^h} h_i\, q\; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;+\; \int_{\partial\Omega_\sigma^h} h_i\, t\; \mathrm{d}s$$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des contributions élémentaires (m éléments finis)

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{K} \qquad \mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{r} \qquad \left(\Omega^{h} = \bigcup_{e=1}^{m} {}^{e}\Omega\right)$$

- Matrice élémentaire (${}^{e}p \times {}^{e}p$) de conductivité (${}^{e}p$ points nodaux)

$$\begin{aligned} {}^{e}\mathbf{K} = \int_{{}^{e}\Omega} \{ {}^{e}\kappa \, [(\partial\, {}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\partial x)\, (\partial\, {}^{e}\mathbf{H}/\partial x) \\ + (\partial\, {}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\partial y)\, (\partial\, {}^{e}\mathbf{H}/\partial y)] + {}^{e}\rho\, {}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, {}^{e}\mathbf{H}] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ + \int_{{}^{e}\partial\Omega_{\sigma}^{h}} {}^{e}\gamma\, {}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, {}^{e}\mathbf{H} \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$${}^{e}\mathbf{H} = [{}^{e}h_{1}, {}^{e}h_{2}, \ldots, {}^{e}h_{{}^{e}p}]$$

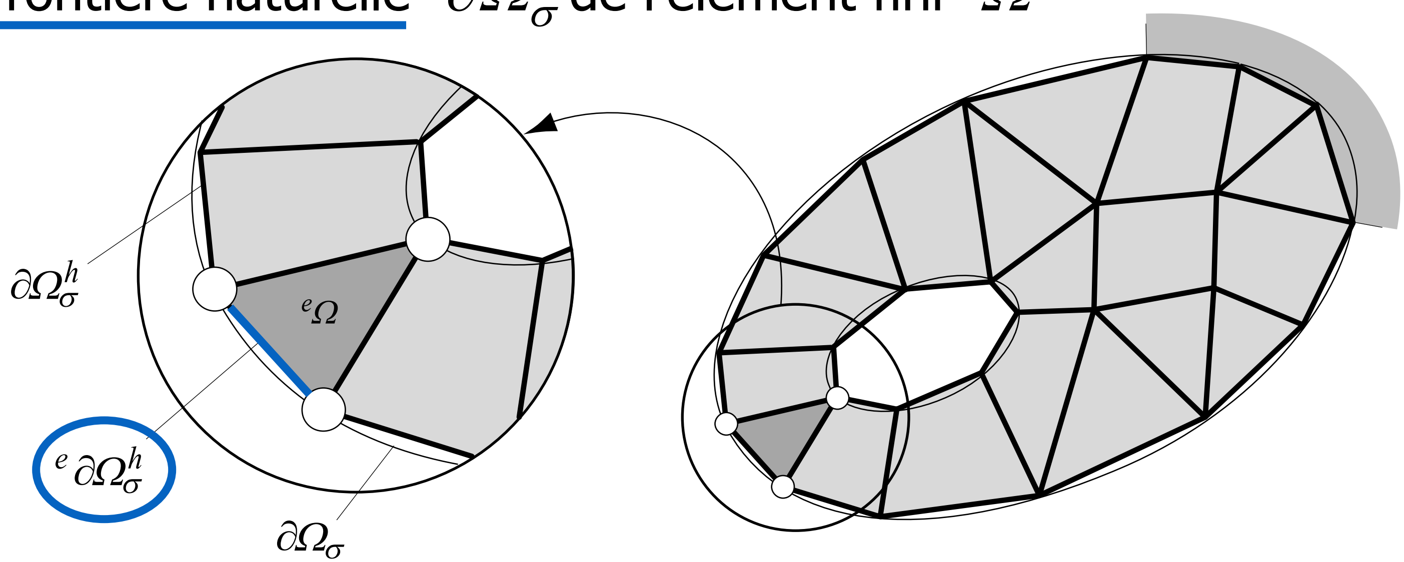
matrice ($1 \times {}^{e}p$) des fonctions de base

Méthode des éléments finis : approche locale

- Vecteur élémentaire (${}^e p \times 1$) des sources d’énergie-chaleur

$$ {}^e\mathbf{r} \;=\; \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, {}^e q \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;+\; \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\, {}^e t \;\mathrm{d}s $$

- Frontière naturelle ${}^e\partial\Omega_\sigma^h$ de l’élément fini ${}^e\Omega$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Forme indicielle des grandeurs élémentaires

$$
\begin{aligned}
{}^e k_{ij} \;=\; \int_{{}^e\Omega} \{ {}^e\kappa \, [(\partial^e h_i/\partial x)\,(\partial^e h_j/\partial x) \\
+ (\partial^e h_i/\partial y)\,(\partial^e h_j/\partial y)] \;+\; {}^e\rho \, {}^e h_i \, {}^e h_j \} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
+ \int_{{}^e\partial\Omega^h_\sigma} {}^e r \, {}^e h_i \, {}^e h_j \,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
{}^e r_i \;=\; \int_{{}^e\Omega} {}^e h_i \, {}^e q \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \;+\; \int_{{}^e\partial\Omega^h_\sigma} {}^e h_i \, {}^e t \,\mathrm{d}s
$$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères classiques de convergence (fonctions locales ${}^e h_i$)
  - Critère de complétude
  - Critère de différentiabilité

    Discontinuités des données

    \+
  - Critère de continuité aux nœuds

    $${}^e h_i({}^e x_j, {}^e y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, {}^e p)$$

    \+
  - Critère de continuité le long des interfaces élémentaires

Éléments finis compatibles ou conformes

Continuité d'ordre 0 $\Rightarrow$

Éléments finis de classe ou compatibilité C^0

Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères complémentaires de continuité
  - Critère de déplacement rigide (température uniforme)

$$\sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) = 1$$

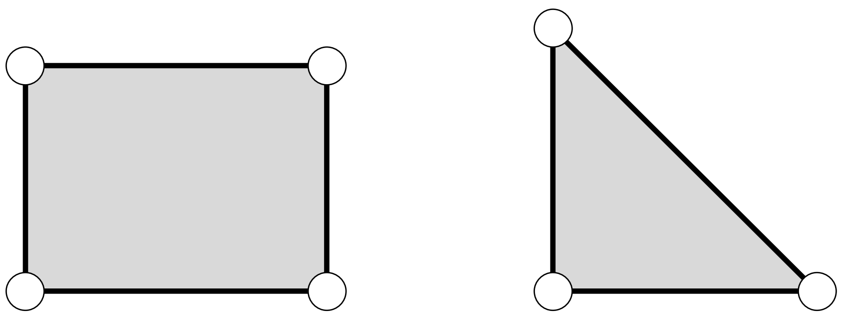
  - Critère de déformation constante (gradient de température constant)

$$\sum_{i=1}^{{}^e p} [\partial^e h_i(x, y)/\partial x] = \sum_{i=1}^{{}^e p} [\partial^e h_i(x, y)/\partial y] = 0$$

Critères valables sur l'ensemble du domaine de l'élément fini

Élaboration d'éléments finis 2D

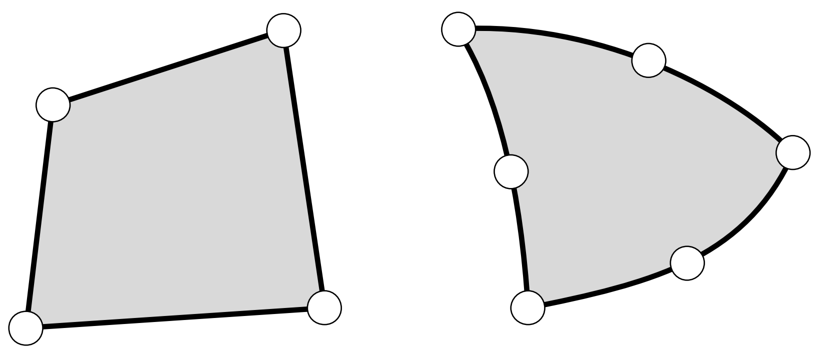
- Discrétisation en éléments finis de forme régulière



Erreurs de discrétisation

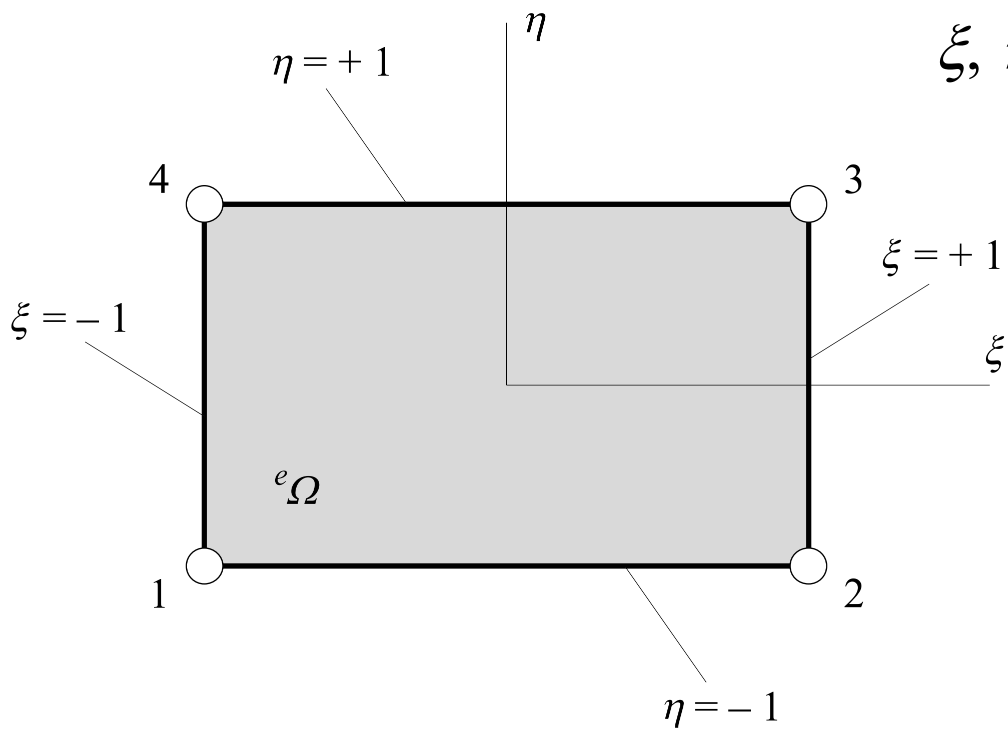
Éléments archétypes

- Discrétisation en éléments finis géométriquement déformés



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Élément fini rectangulaire (carré) linéaire à 4 points nodaux

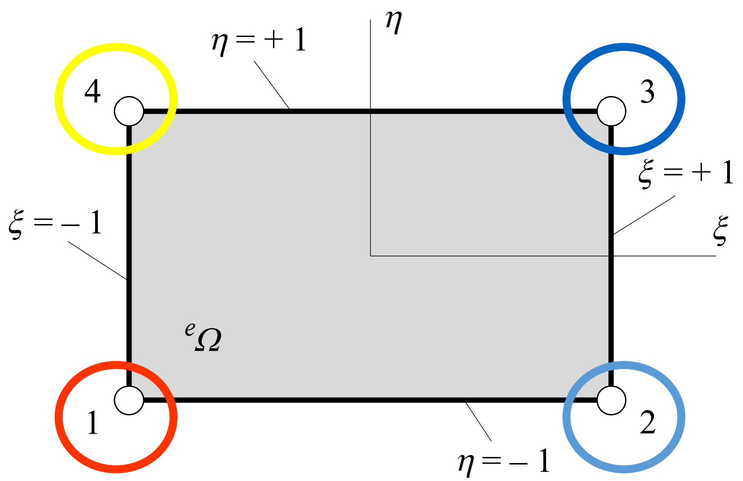


ξ, η coordonnées naturelles

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire linéaire

$$
\begin{aligned}
{}^e h_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi)\cdot\frac{1}{2}(1-\eta) \\
&= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
{}^e h_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
{}^e h_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
{}^e h_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
$$

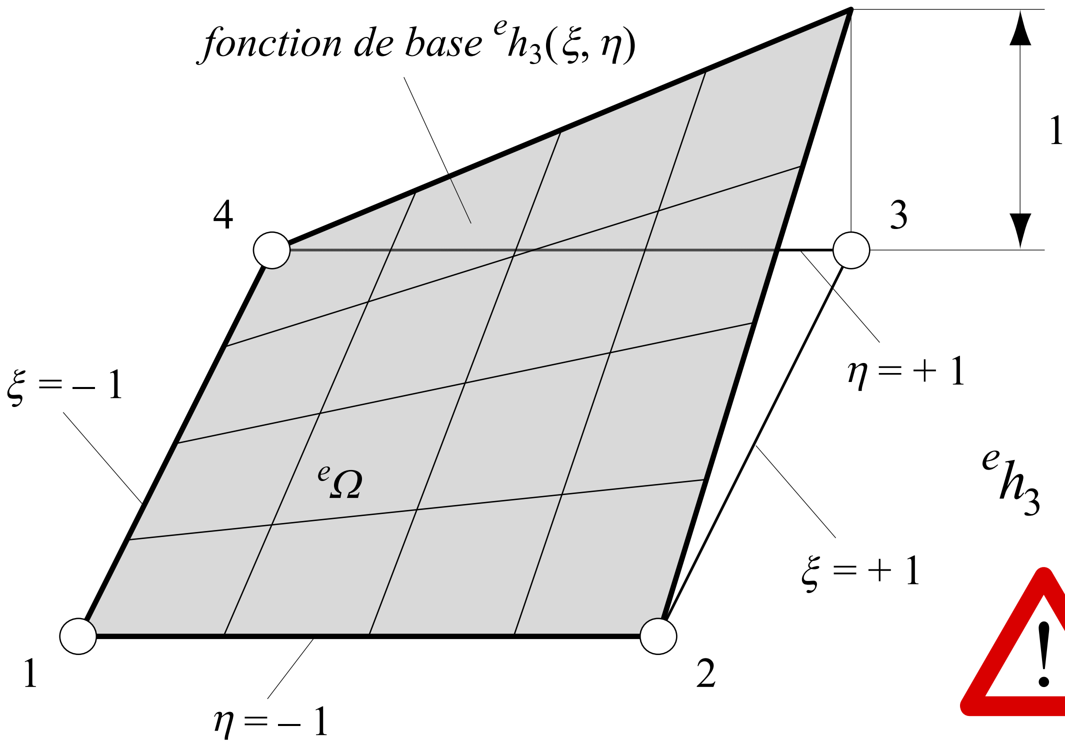


Produit de deux fonctions linéaires en ξ et η

$\Rightarrow$ Élément fini bilinéaire

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l'élément rectangulaire bilinéaire



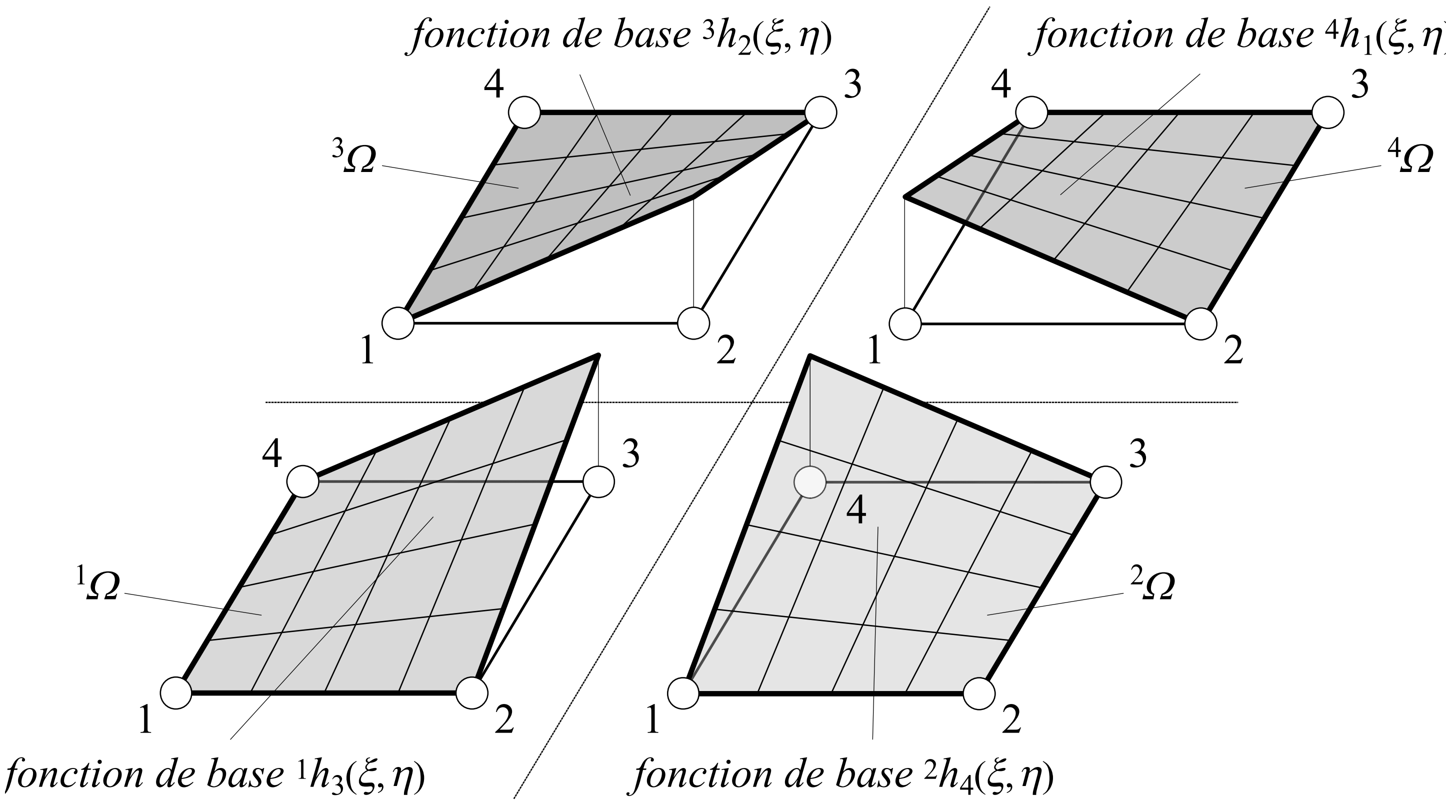
$$^eh_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

Complétude satisfaite

Paraboloïde hyperbolique

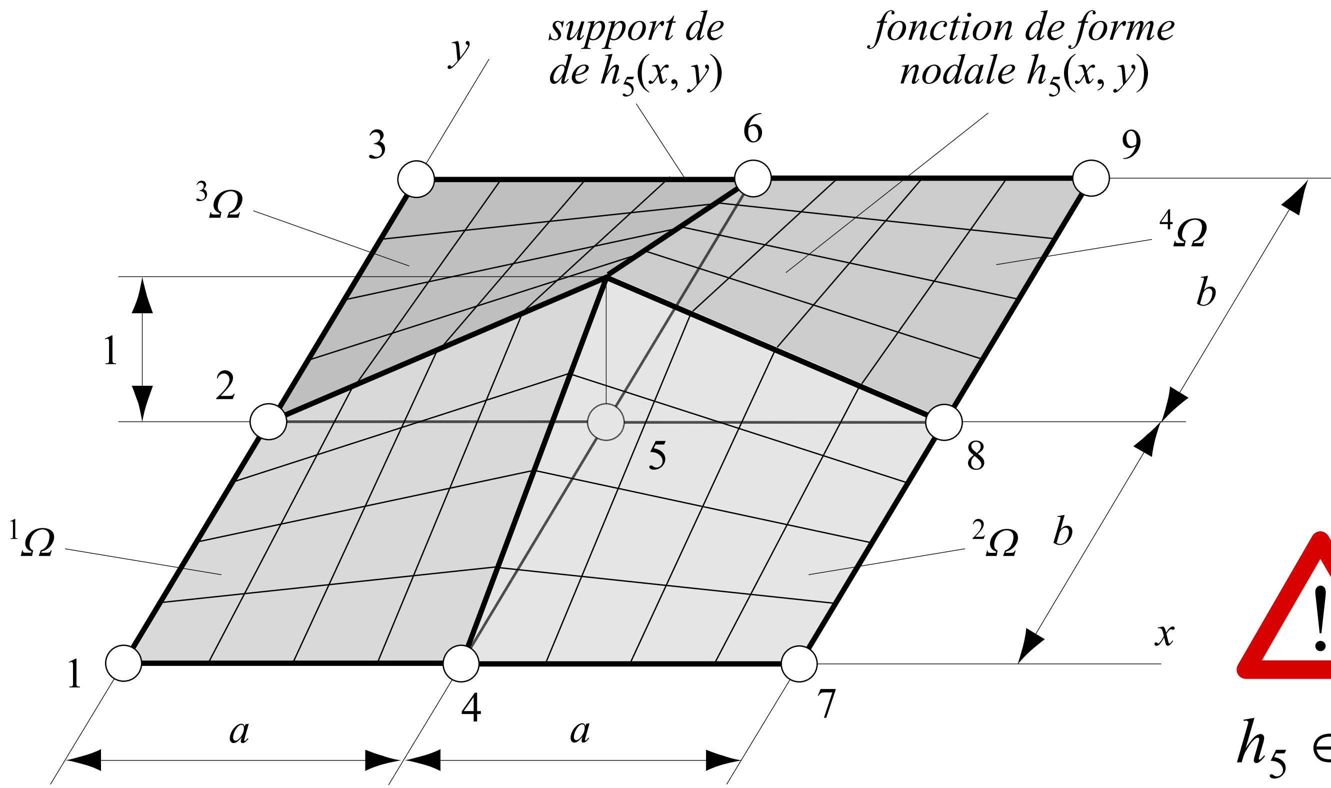
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de différentiabilité et élément fini rectangulaire bilinéaire



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

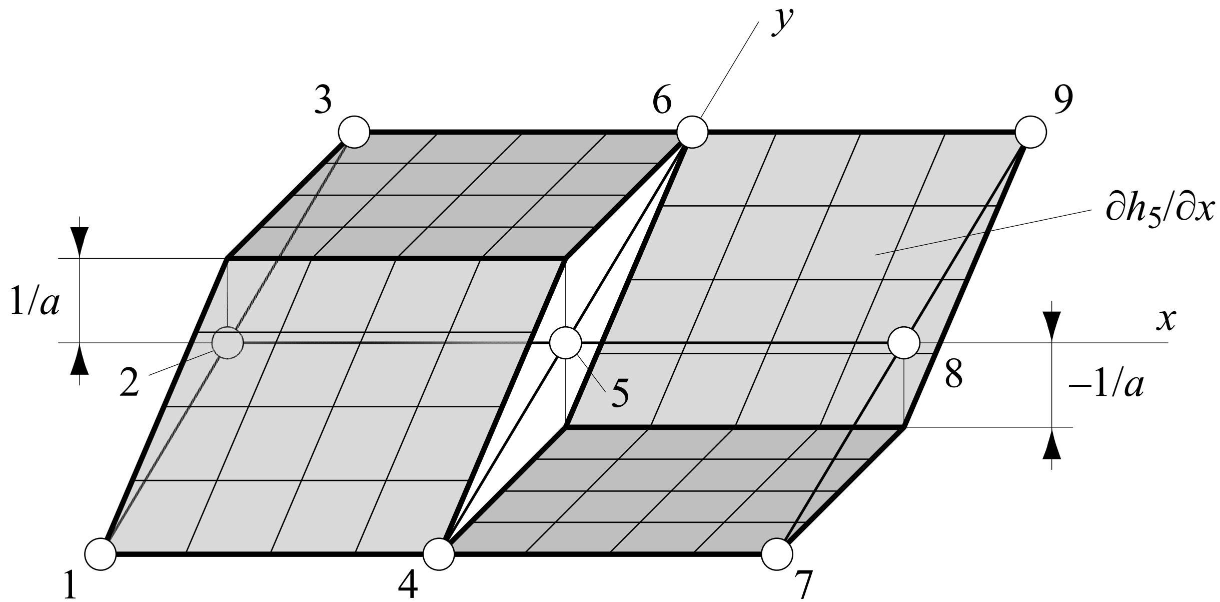
- Critère de différentiabilité et élément rectangulaire bilinéaire (*suite*)



$h_5 \in L^2$

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de différentiabilité et élément rectangulaire bilinéaire (*suite*)



$\partial h_5/\partial x \in L^2$ ($\partial h_5/\partial y \in L^2$)

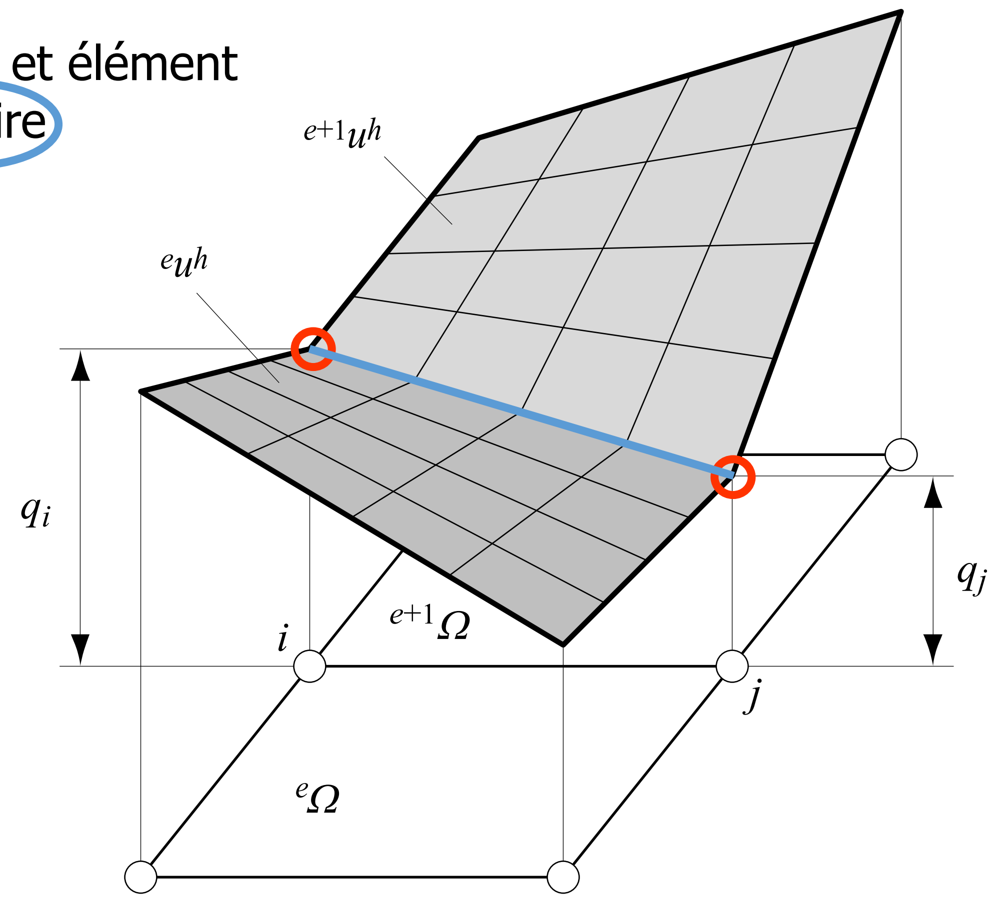
Différentiabilité satisfaite

$h_5 \in H^1$

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

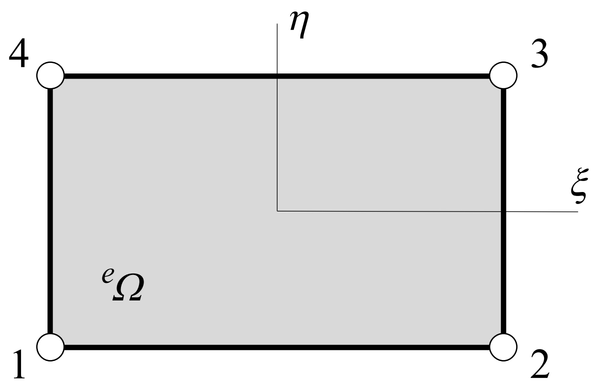
- Critère de continuité et élément rectangulaire bilinéaire

Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces



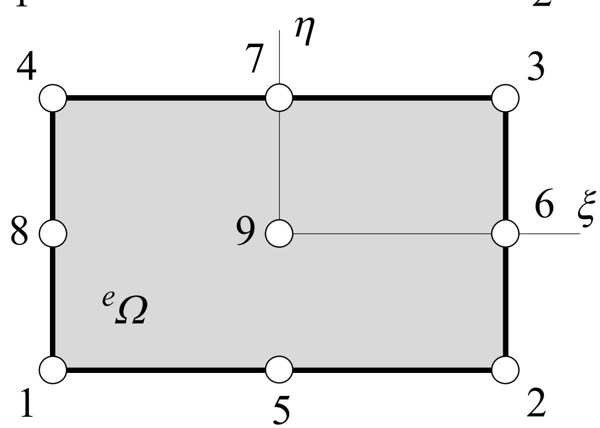
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

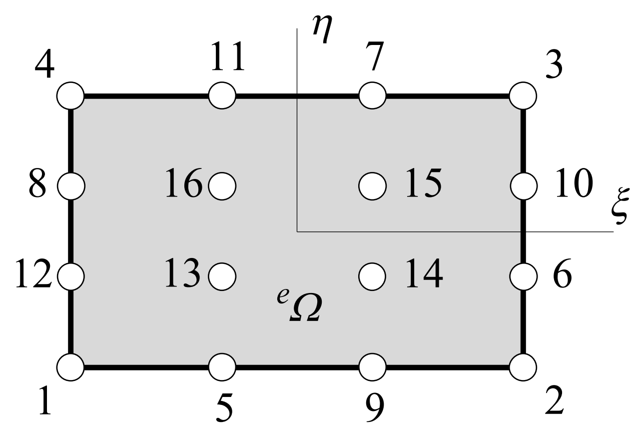
- Famille lagrangienne d’éléments finis rectangulaires réguliers



Fonctions de base = produits de polynômes de Lagrange

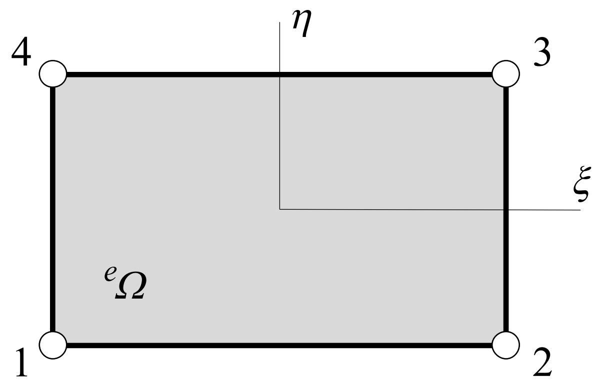
Intérêt : accroissement de la précision





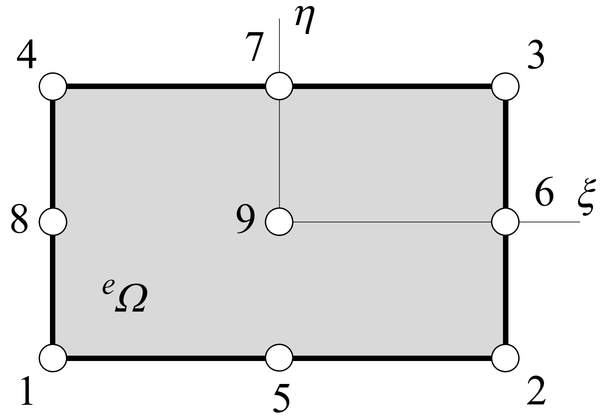
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

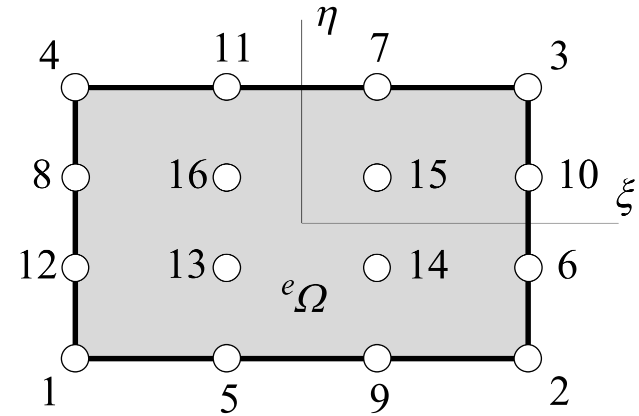
- Famille lagrangienne d'éléments finis rectangulaires réguliers



Fonctions de base = produits de polynômes de Lagrange

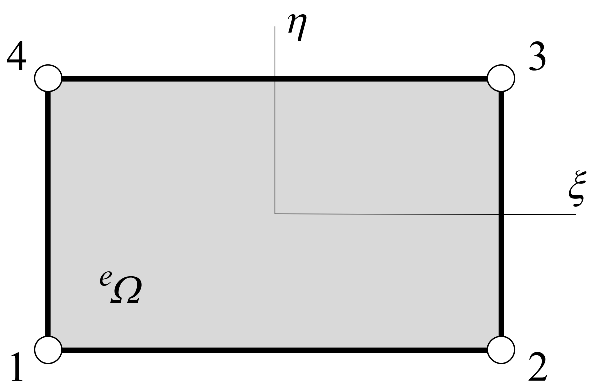
Intérêt : accroissement de la précision





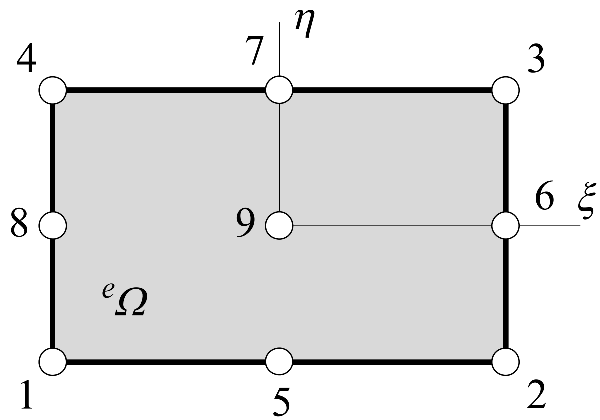
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

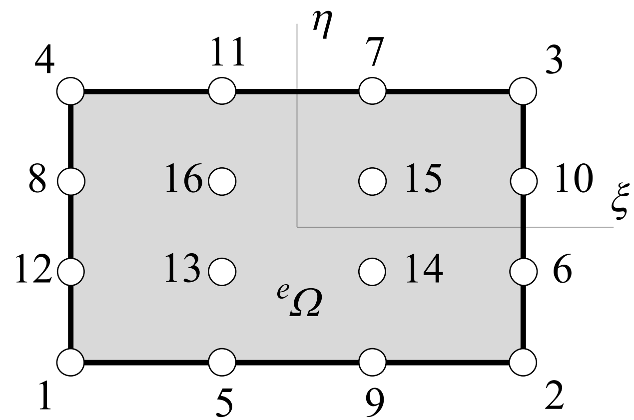
- Famille lagrangienne d'éléments finis rectangulaires réguliers



Fonctions de base = produits de polynômes de Lagrange

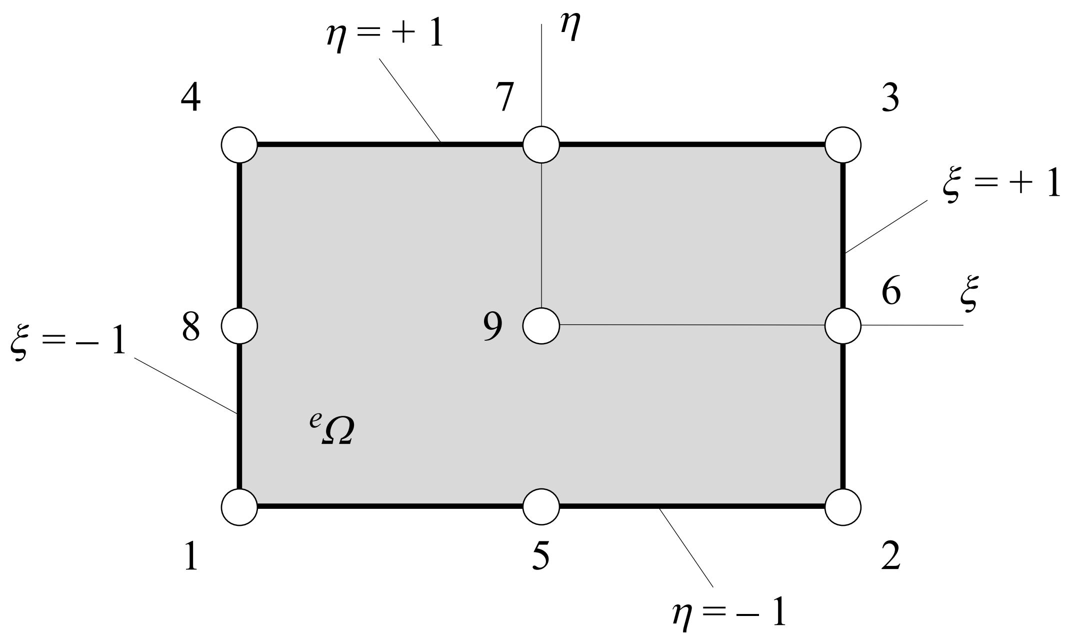
Intérêt : accroissement de la précision





Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Élément fini rectangulaire quadratique à 9 points nodaux



Numérotation des nœuds

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique

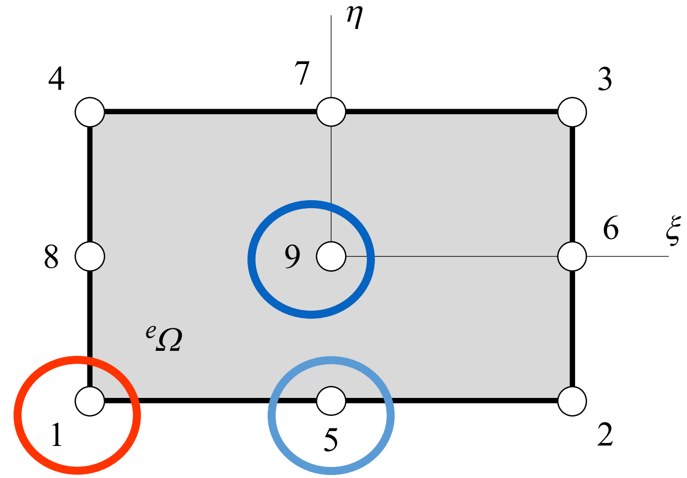
$$ {}^e h_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)\cdot\frac{1}{2}\eta(\eta-1) $$

$$ = \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta) $$

$$ {}^e h_5 = (1-\xi^2)\cdot\frac{1}{2}\eta(\eta-1) $$

$$ = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1) $$

$$ {}^e h_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) $$



Produit de deux fonctions quadratiques en ξ et η

$\Rightarrow$ Élément fini biquadratique

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

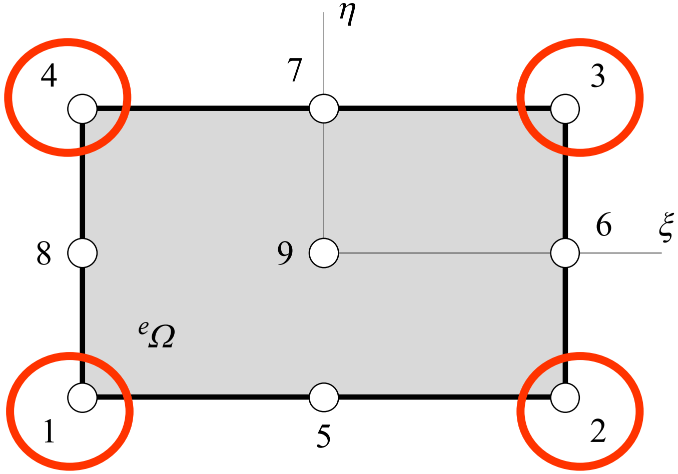
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

$$^{e}h_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1)$$

$$^{e}h_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)$$

$$^{e}h_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)$$

$$^{e}h_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)$$



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

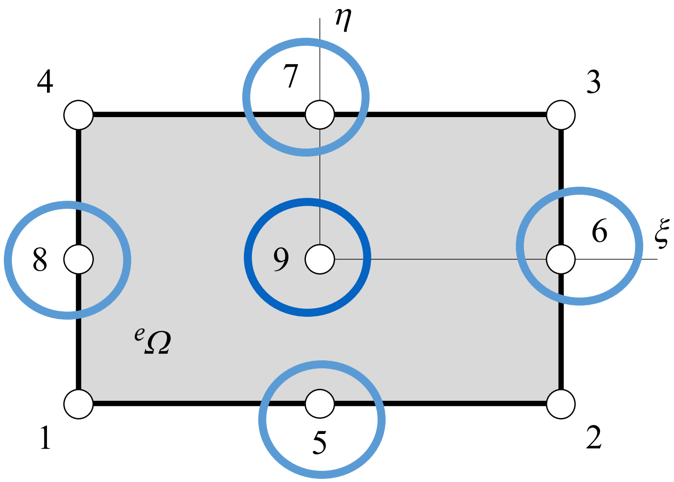
$$^e h_5 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1)$$

$$^e h_6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1-\eta^2)$$

$$^e h_7 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1)$$

$$^e h_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta^2)$$

$$^e h_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

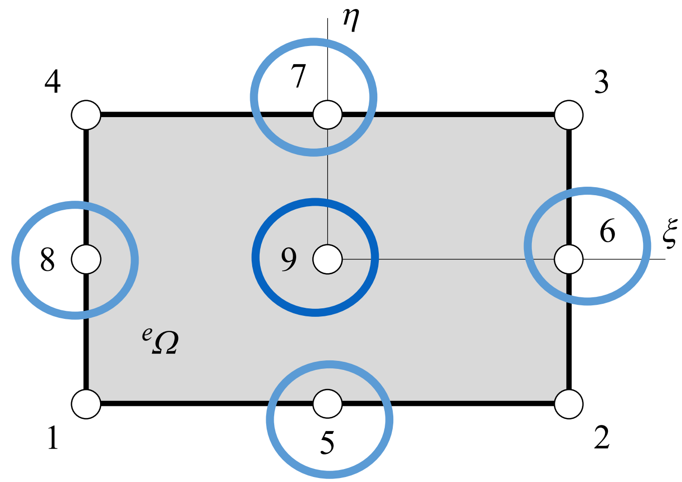
$$^e h_5 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1)$$

$$^e h_6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1-\eta^2)$$

$$^e h_7 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1)$$

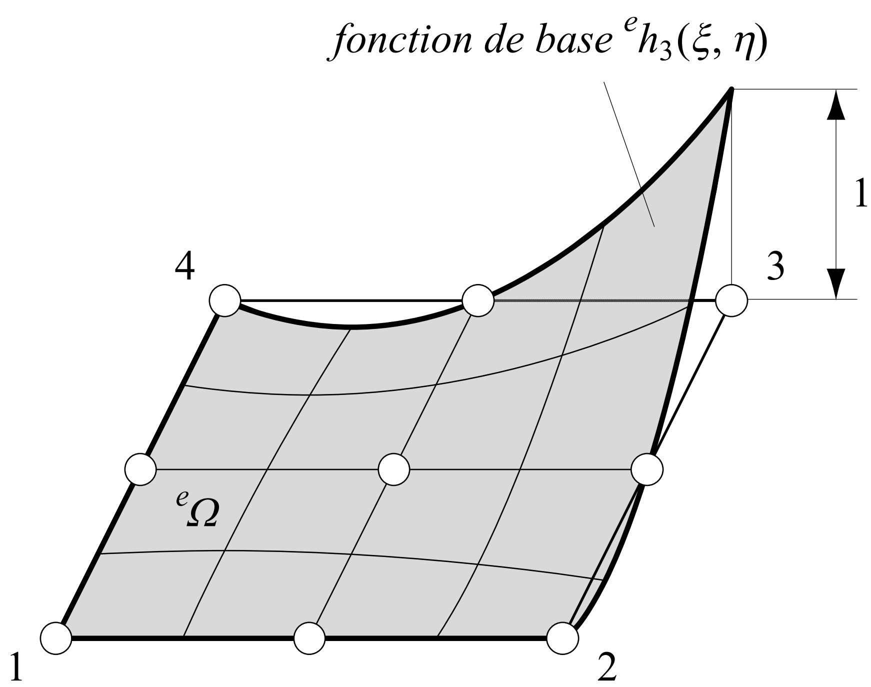
$$^e h_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta^2)$$

$$^e h_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

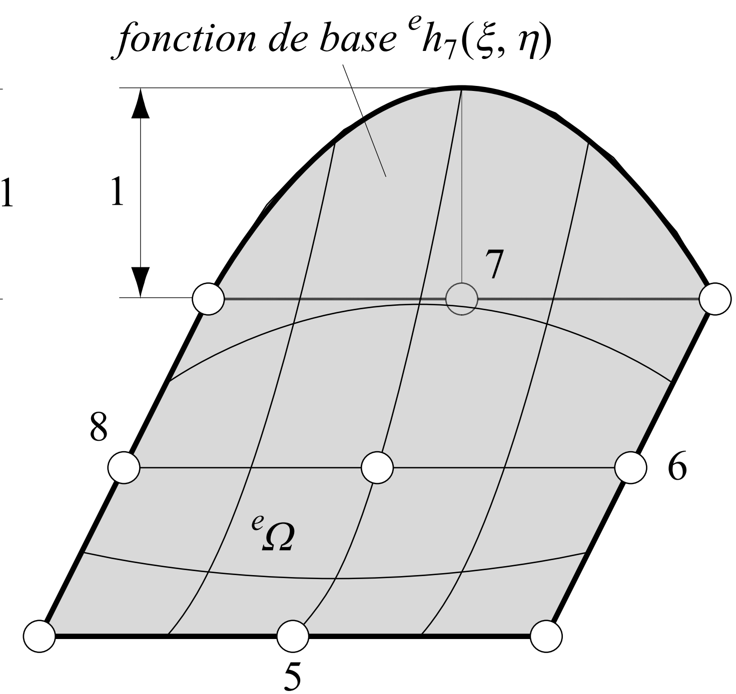


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l’élément rectangulaire biquadratique



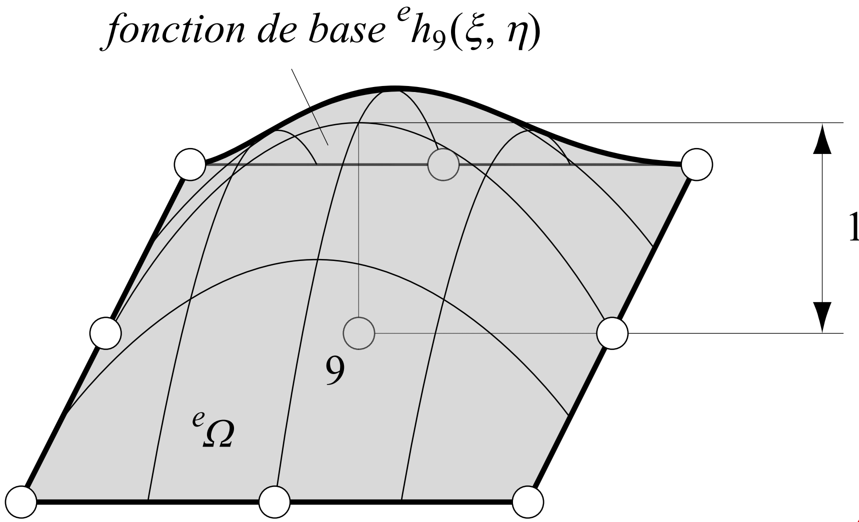
$$^{e}h_3 = \frac{1}{4}\,\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)$$



$$^{e}h_7 = \frac{1}{2}\,\eta(1-\xi^2)(\eta+1)$$

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l'élément biquadratique (*suite*)



$$^e h_9 \;=\; (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

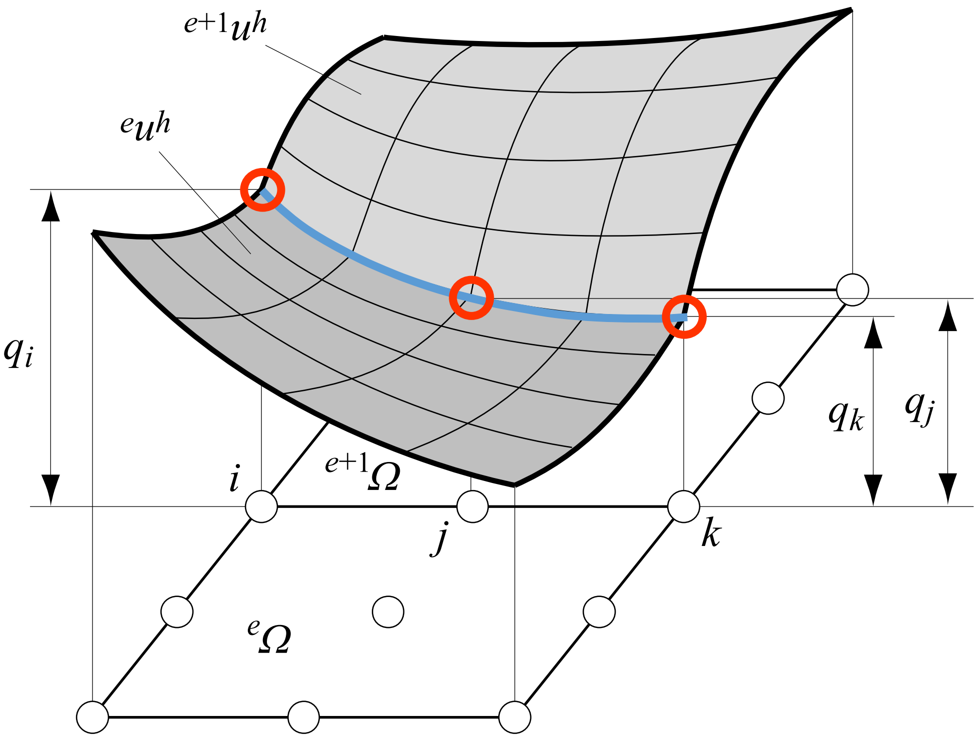
Complétude satisfaite

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critères de différentiabilité et de continuité et élément biquadratique

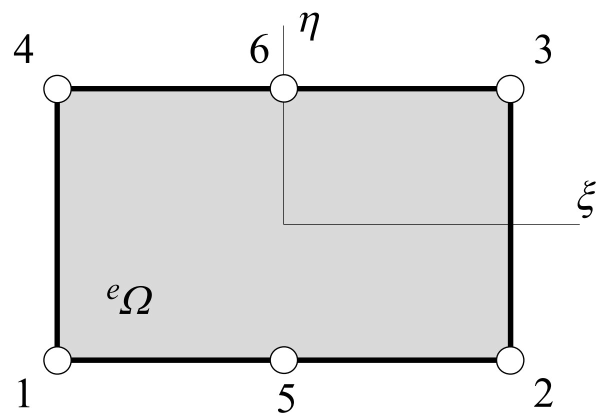
Différentiabilité satisfaite

Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces

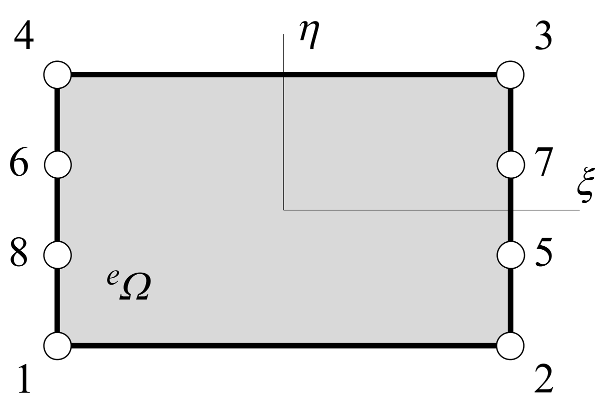


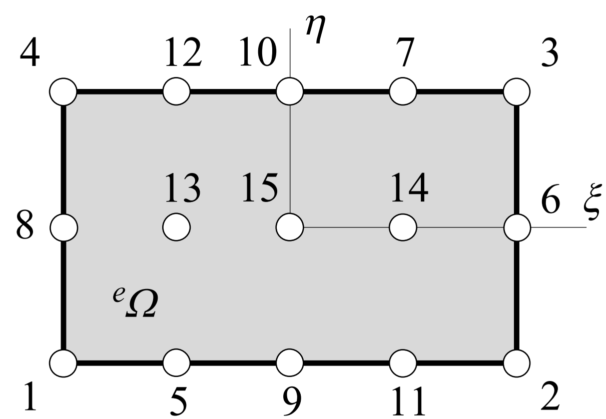
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Famille généralisée d’éléments finis rectangulaires lagrangiens



Fonctions de base = produits de polynômes de Lagrange d’ordres différents selon ξ et η



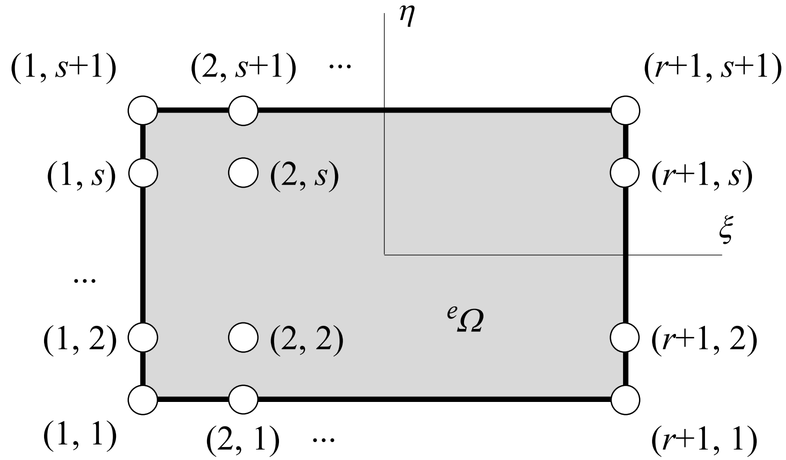


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire généralisé

$$
{}^{e}h_{(i,\,j)}(\xi,\eta) = \prod_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{r+1} \frac{\xi-\xi_p}{\xi_i-\xi_p} \prod_{\substack{q=1\\q\neq j}}^{s+1} \frac{\eta-\eta_q}{\eta_j-\eta_q}
$$

$(i = 1, 2, \ldots, r+1\ ;$
$j = 1, 2, \ldots, s+1)$

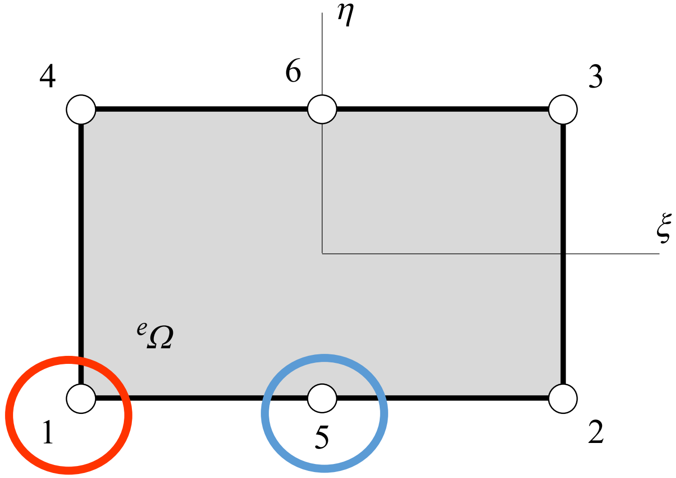


Ordres différents selon ξ et η : précision privilégiée dans une direction

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Exemple d'un élément fini rectangulaire lagrangien généralisé

$$
\begin{aligned}
{}^{e}h_1 &= \frac{1}{2}\,\xi(\xi-1)\cdot\frac{1}{2}(1-\eta)\\
&= \frac{1}{4}\,\xi(\xi-1)(1-\eta)\\
{}^{e}h_5 &= (1-\xi^2)\cdot\frac{1}{2}(1-\eta)\\
&= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)
\end{aligned}
$$



Produit de fonctions quadratique en ξ et linéaire en η $\Rightarrow$ Élément fini quadratique-linéaire

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critères de convergence et élément rectangulaire généralisé

Complétude satisfaite

Différentiabilité satisfaite

Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces