

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Formulation faible approchée

- Approximation des températures réelle et virtuelle

$$u \approx u^h \in U^h \subset U$$

$$\delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

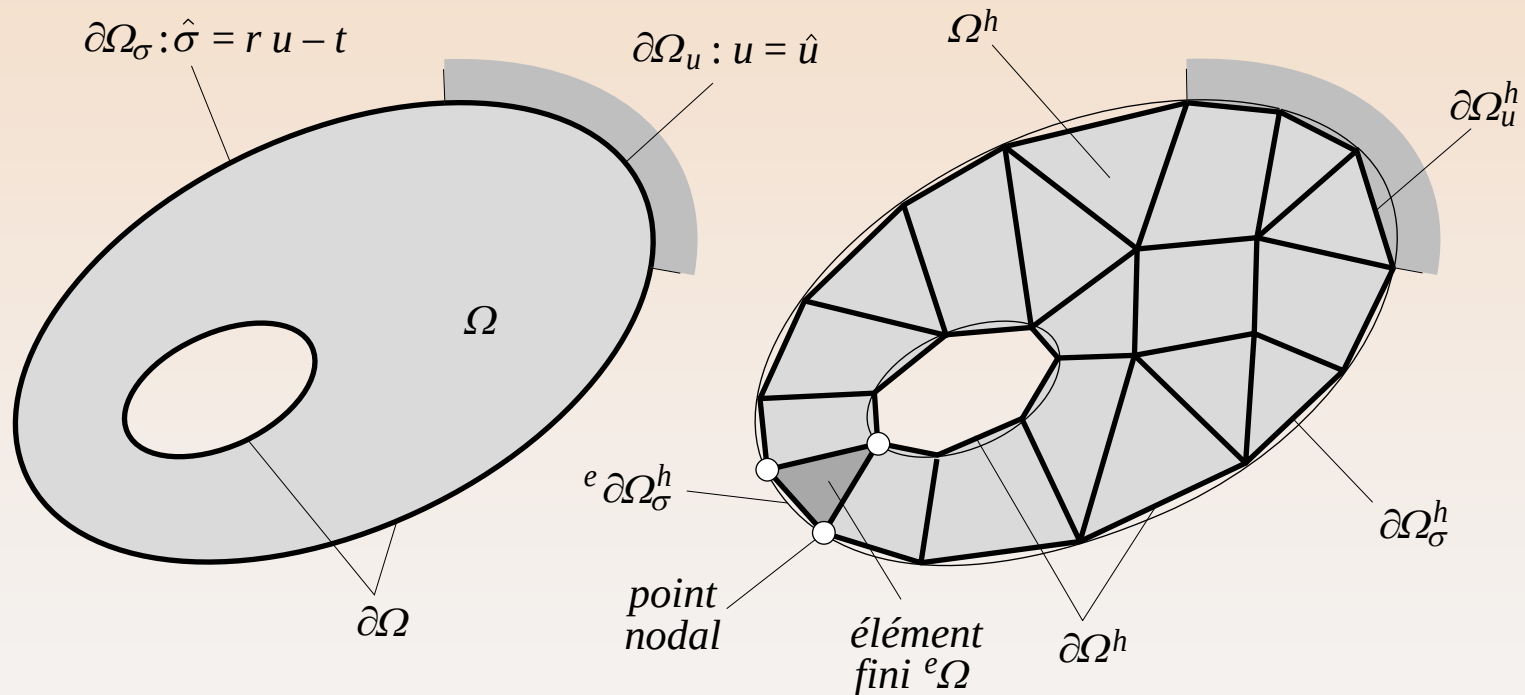
$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_{\Omega^h} [\kappa (\nabla u^h)^T \nabla \delta u^h + \rho u^h \delta u^h] dx dy &+ \int_{\partial \Omega_\sigma^h} r u^h \delta u^h ds \\ = \int_{\Omega^h} q \delta u^h dx dy + \int_{\partial \Omega_\sigma^h} t \delta u^h ds \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$



Domaine et frontière naturelle approchés



Méthode des éléments finis



Discrétisation en éléments finis triangulaires et quadrangulaires

Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation des températures par la méthode des éléments finis : association d'une fonction de forme à chacun des p nœuds

$$u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \delta \mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$$



Méthode dérivée de la
technique de Galerkin

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales $h_i(x, y)$



Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation des températures par la méthode des éléments finis : association d'une fonction de forme à chacun des p nœuds

$$u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \delta \mathbf{q}$$



Fonctions à
support compact

$$\mathbf{H} = [h_1, \textcolor{red}{h_2}, \dots, h_p]$$

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales $h_i(x, y)$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_p\}^T$$

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_p\}^T$$

vecteurs $(1 \times p)$ des
températures nodales
réelles et virtuelles



Méthode des éléments finis : approche globale

- Critères classiques de convergence (fonctions globales h_i)

- Critère de complétude ou de complétion

$$h_i(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \dots$$

- Critère de différentiabilité

$$h_i(x, y) \in H^1(\Omega)$$



Régularité
des données

- Critère de continuité aux nœuds

$$h_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad (x_j, y_j) \text{ position du nœud } j$$

- Critère de continuité aux interfaces élémentaires



Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^h} [\kappa (\nabla \mathbf{H})^T \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx dy + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r \mathbf{H}^T \mathbf{H} ds$$

matrice $(p \times p)$
de conductivité

$$\nabla \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{H} / \partial x \\ \partial \mathbf{H} / \partial y \end{bmatrix}$$

$$(\nabla \mathbf{H})^T \nabla \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{H} / \partial x \\ \partial \mathbf{H} / \partial y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial \mathbf{H} / \partial x \\ \partial \mathbf{H} / \partial y \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}$$



Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme faible discrète (*suite*)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \int_{\Omega^h} \{ & \kappa [(\partial \mathbf{H}^T / \partial x) (\partial \mathbf{H} / \partial x) \\ & + (\partial \mathbf{H}^T / \partial y) (\partial \mathbf{H} / \partial y)] + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \} dx dy \\ & + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r \mathbf{H}^T \mathbf{H} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \int_{\Omega^h} (& \kappa \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}) dx dy \\ & + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r \mathbf{H}^T \mathbf{H} ds \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{H} \quad \underline{\text{matrice-gradient}} \quad (2 \times p)$$



Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme faible discrète (*suite*)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega^h} \mathbf{H}^T q \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} \mathbf{H}^T t \, ds$$

vecteur ($p \times 1$) des sources
d'énergie-chaleur

$$\hat{q}_k \equiv q_k = \mathbf{H}(x_k, y_k) \mathbf{q} = u^h(x_k, y_k)$$

$$\approx u(x_k, y_k) = \hat{u}(x_k, y_k) \quad (\hat{u}(s_k))$$



Interpolation nodale
du champ de
température imposé

température
imposée au nœud k



Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme indicielle de la formulation faible discrète

$$\sum_{j=1}^p k_{ij} q_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega^h} \{ \kappa [(\partial h_i / \partial x) (\partial h_j / \partial x) + (\partial h_i / \partial y) (\partial h_j / \partial y)] + \rho h_i h_j \} dx dy + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} r h_i h_j ds$$

$$r_i = \int_{\Omega^h} h_i q dx dy + \int_{\partial\Omega_\sigma^h} h_i t ds$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des contributions élémentaires (m éléments finis)

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{{}^e\mathbf{K}} \quad \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{{}^e\mathbf{r}} \quad (\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m {}^e\Omega)$$

- Matrice élémentaire (${}^ep \times {}^ep$) de conductivité (ep points nodaux)

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{K} = & \int_{{}^e\Omega} \{ {}^e\kappa [({}^e\mathbf{H}^T/\partial x) ({}^e\mathbf{H}/\partial x) \\ & + ({}^e\mathbf{H}^T/\partial y) ({}^e\mathbf{H}/\partial y)] + {}^ep {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} \} dx dy \\ & + \int_{{}^e\partial\Omega^h_\sigma} {}^e\mathbf{r} {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} ds \end{aligned}$$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des contributions élémentaires (m éléments finis)

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{{}^e\mathbf{K}} \quad \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{{}^e\mathbf{r}} \quad (\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m \mathbf{{}^e\Omega})$$

- Matrice élémentaire (${}^ep \times {}^ep$) de conductivité (ep points nodaux)

$$\begin{aligned} \mathbf{{}^e\mathbf{K}} = & \int_{{}^e\Omega} \{ {}^e\kappa [(\partial \mathbf{{}^e\mathbf{H}}^T / \partial x) (\partial \mathbf{{}^e\mathbf{H}} / \partial x) \\ & + (\partial \mathbf{{}^e\mathbf{H}}^T / \partial y) (\partial \mathbf{{}^e\mathbf{H}} / \partial y)] + {}^e\rho \mathbf{{}^e\mathbf{H}}^T \mathbf{{}^e\mathbf{H}}] dx dy \\ & + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e r \mathbf{{}^e\mathbf{H}}^T \mathbf{{}^e\mathbf{H}} ds \end{aligned}$$

$$\mathbf{{}^e\mathbf{H}} = [{}^eh_1, {}^eh_2, \dots, {}^eh_{e_p}] \quad \text{matrice } (1 \times {}^ep) \text{ des} \\ \text{fonctions de base}$$

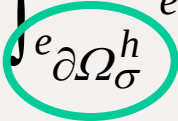
Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des contributions élémentaires (m éléments finis)

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{K} \quad \mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{r} \quad (\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m {}^e\Omega)$$

- Matrice élémentaire (${}^ep \times {}^ep$) de conductivité (ep points nodaux)

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} \{ {}^e\kappa [(\partial {}^e\mathbf{H}^T / \partial x) (\partial {}^e\mathbf{H} / \partial x) + (\partial {}^e\mathbf{H}^T / \partial y) (\partial {}^e\mathbf{H} / \partial y)] + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} \} dx dy$$

$$+ \int_{{}^e\partial\Omega^h_\sigma} {}^e r {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} ds$$

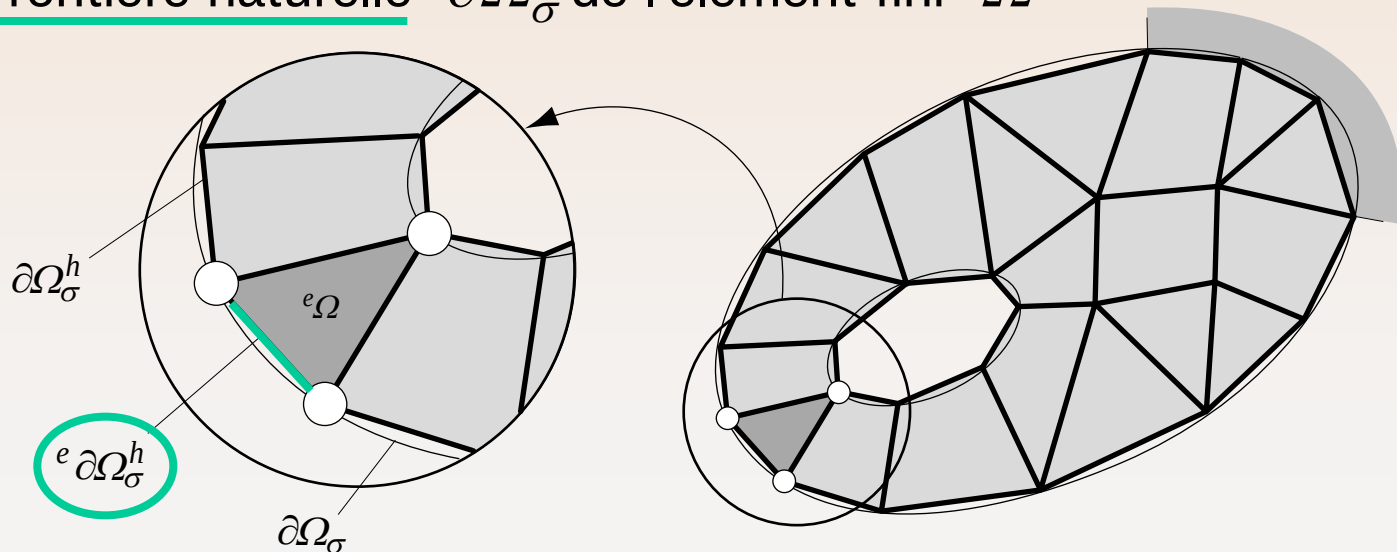
Méthode des éléments finis : approche locale

- Vecteur élémentaire (${}^e p \times 1$) des sources d'énergie-chaleur

$${}^e \mathbf{r} = \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q \, dx \, dy + \int_{{}^e \partial \Omega_\sigma^h} {}^e \mathbf{H}^T {}^e t \, ds$$



- Frontière naturelle ${}^e \partial \Omega_\sigma^h$ de l'élément fini ${}^e \Omega$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Forme indicielle des grandeurs élémentaires

$$\begin{aligned} {}^e k_{ij} = & \int_{{}^e \Omega} \{ {}^e \kappa [(\partial {}^e h_i / \partial x) (\partial {}^e h_j / \partial x) \\ & + (\partial {}^e h_i / \partial y) (\partial {}^e h_j / \partial y)] + {}^e \rho {}^e h_i {}^e h_j \} dx dy \\ & + \int_{{}^e \partial \Omega_\sigma^h} {}^e r {}^e h_i {}^e h_j ds \end{aligned}$$

$${}^e r_i = \int_{{}^e \Omega} {}^e h_i {}^e q dx dy + \int_{{}^e \partial \Omega_\sigma^h} {}^e h_i {}^e t ds$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères classiques de convergence (fonctions locales ${}^e h_i$)

- Critère de complétude
- Critère de différentiabilité
- Critère de continuité aux nœuds



Discontinuités
des données

$${}^e h_i({}^e x_j, {}^e y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

- Critère de continuité le long des interfaces élémentaires



Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères classiques de convergence (fonctions locales ${}^e h_i$)

- Critère de complétude

- Critère de différentiabilité



Discontinuités
des données

- Critère de continuité aux nœuds

$${}^e h_i({}^e x_j, {}^e y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

- Critère de continuité le long des interfaces élémentaires



Éléments finis
compatibles
ou conformes

Continuité
d'ordre 0



Éléments finis de
classe ou
compatibilité C^0



Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères complémentaires de continuité
 - Critère de déplacement rigide (température uniforme)

$$\sum_{i=1}^{e_p} {}^e h_i(x, y) = 1$$

- Critère de déformation constante (gradient de température constant)

$$\sum_{i=1}^{e_p} [\partial {}^e h_i(x, y) / \partial x] = \sum_{i=1}^{e_p} [\partial {}^e h_i(x, y) / \partial y] = 0$$

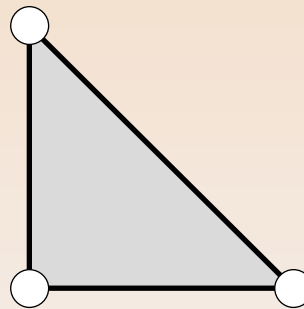
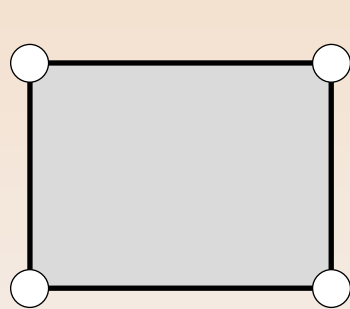


Critères valables sur l'ensemble du
domaine de l'élément fini



Élaboration d'éléments finis 2D

- Discrétisation en éléments finis de forme régulière

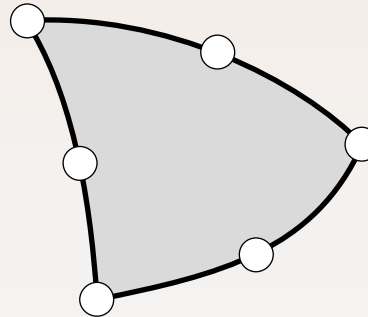
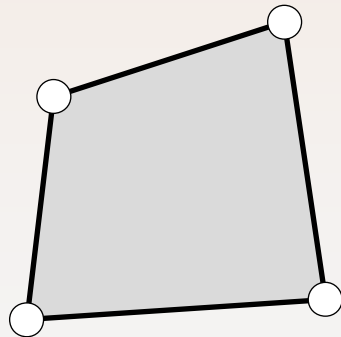


Erreurs de
discrétisation



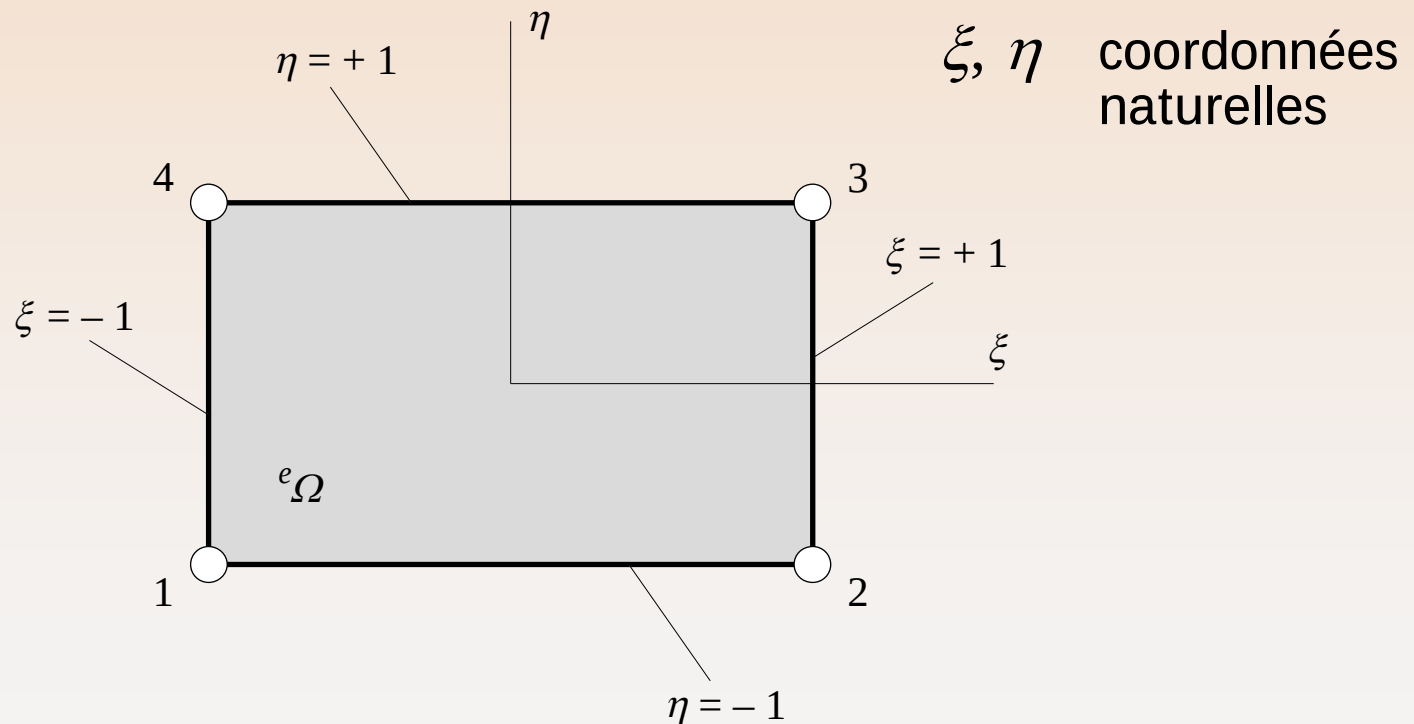
Éléments
archétypes

- Discrétisation en éléments finis géométriquement déformés



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Élément fini rectangulaire (carré) linéaire à 4 points nodaux



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire linéaire

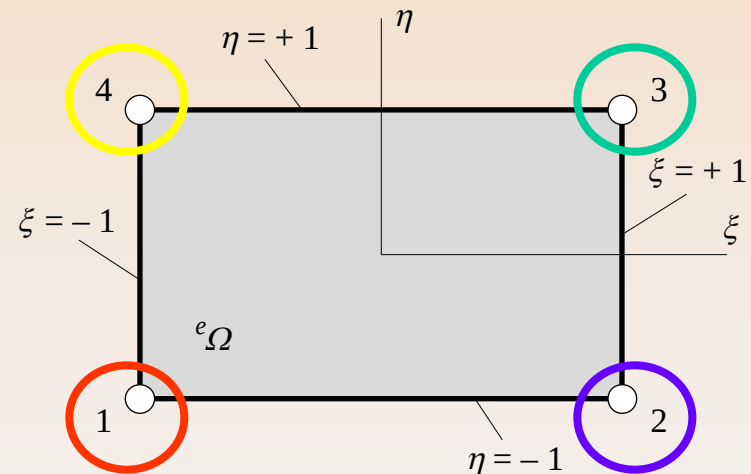
$$^eh_1 = \frac{1}{2} (1-\xi) \cdot \frac{1}{2} (1-\eta)$$

$$= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)$$

$$^eh_2 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)$$

$$^eh_3 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)$$

$$^eh_4 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)$$



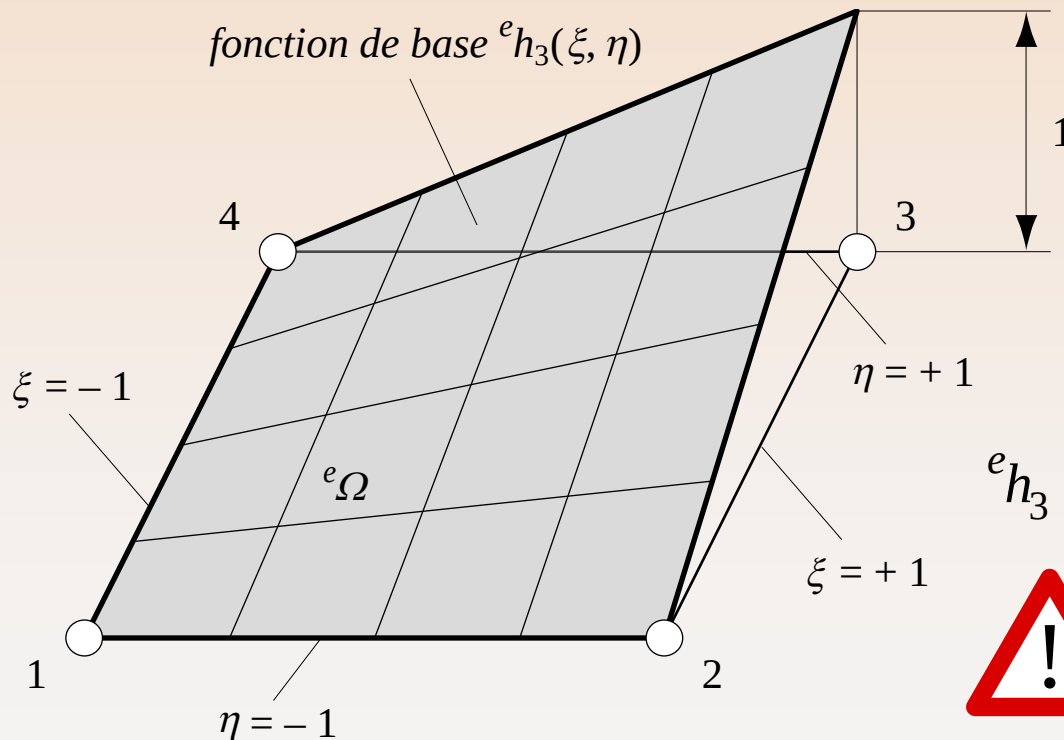
Produit de deux fonctions
linéaires en ξ et η

⇒ Élément fini
bilinéaire



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l'élément rectangulaire bilinéaire



$${}^e h_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

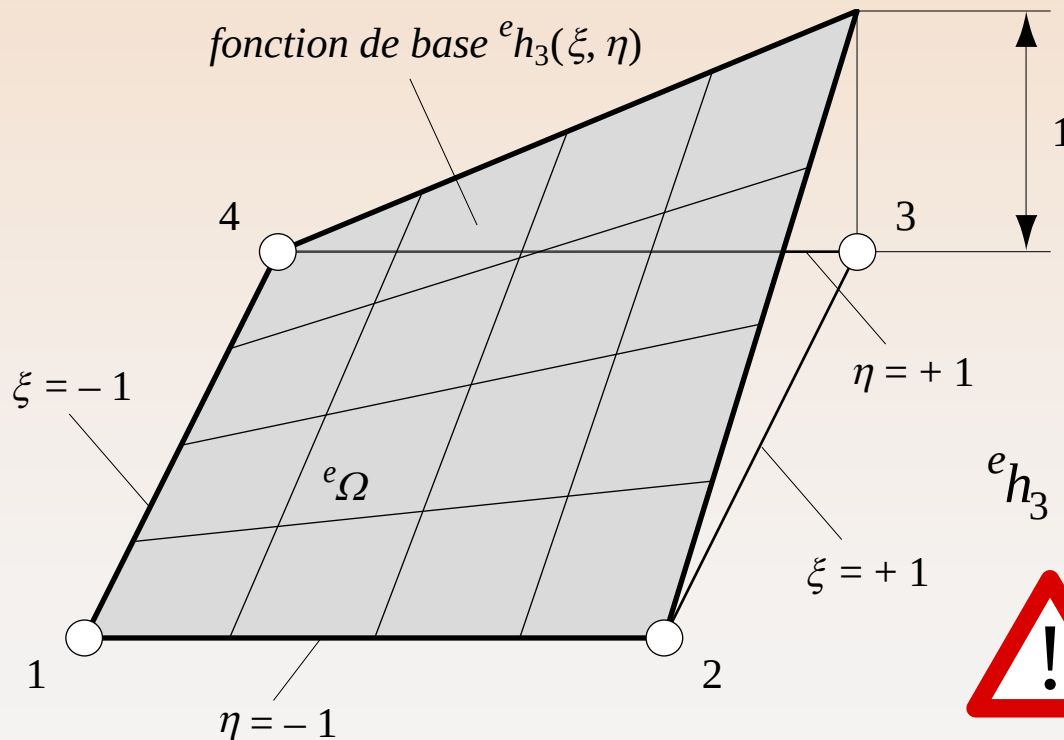


Paraboloïde
hyperbolique



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l'élément rectangulaire bilinéaire



$${}^e h_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

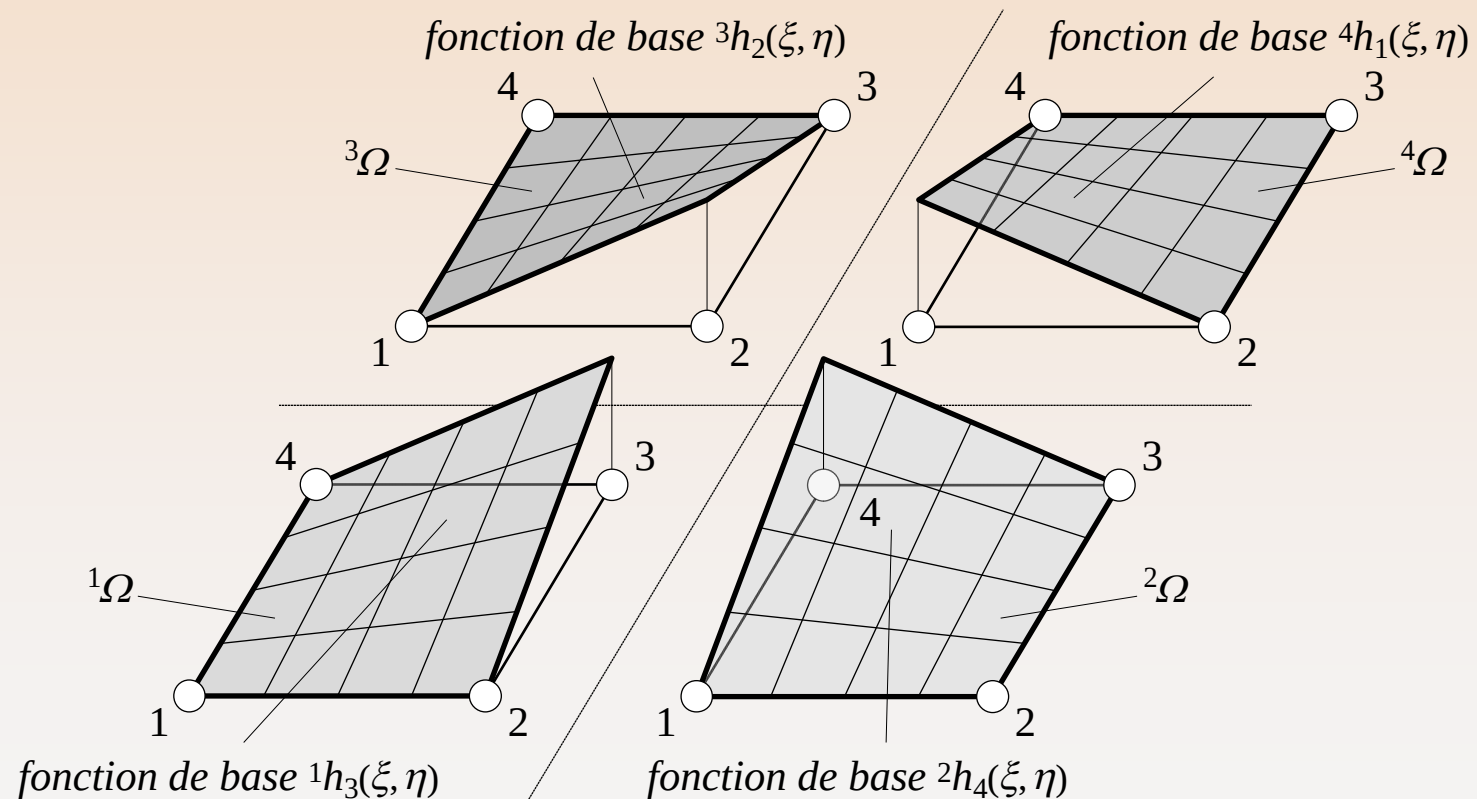


Complétude
satisfaite



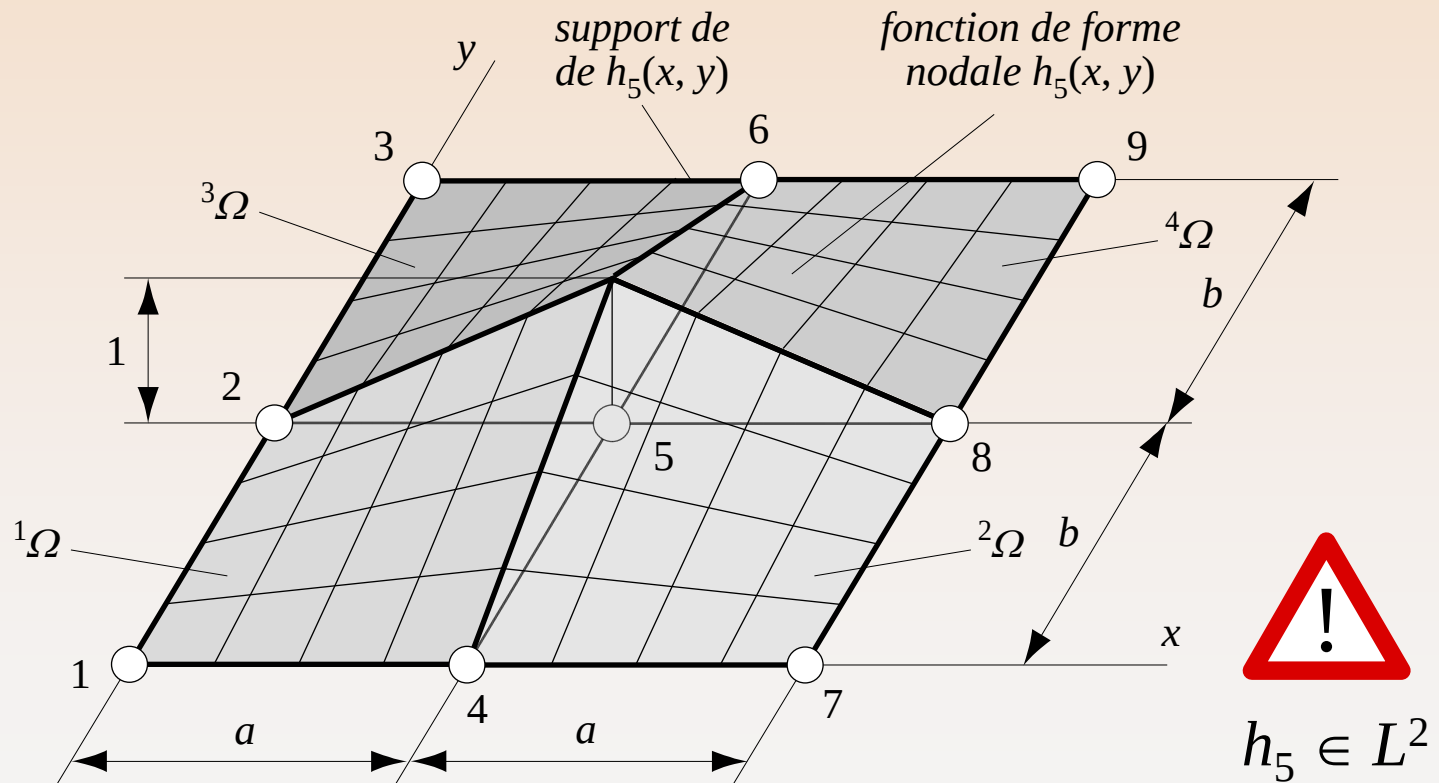
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de différentiabilité et élément fini rectangulaire bilinéaire



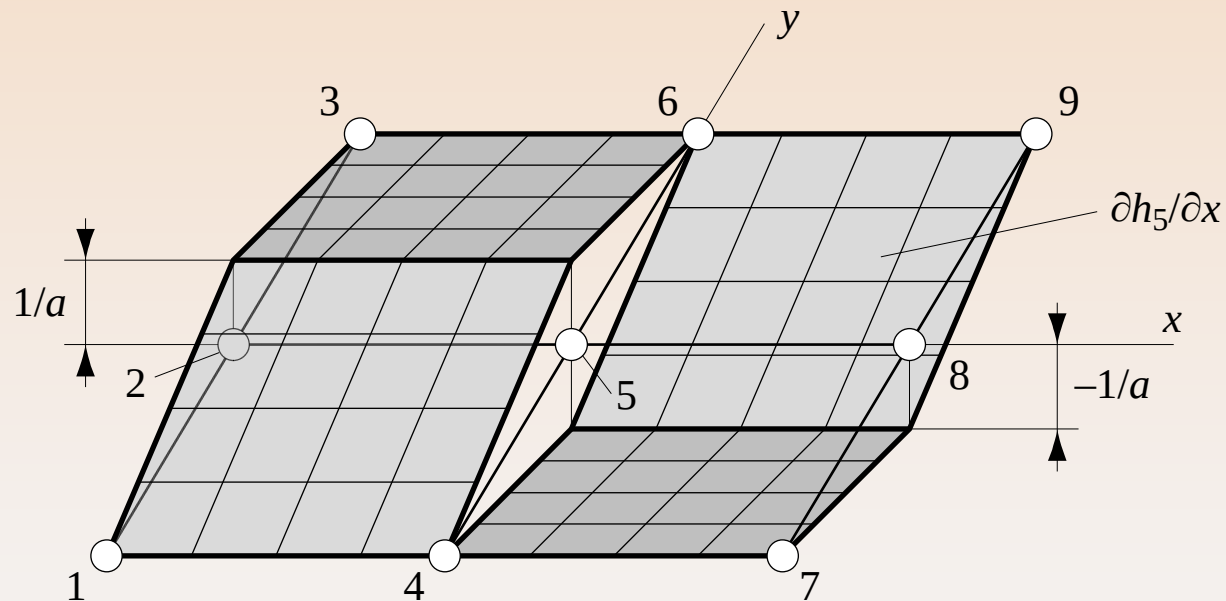
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de différentiabilité et élément rectangulaire bilinéaire (*suite*)



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de différentiabilité et élément rectangulaire bilinéaire (*suite*)



$$\partial h_5 / \partial x \in L^2 \quad (\partial h_5 / \partial y \in L^2)$$



Différentiabilité
satisfaite
 $h_5 \in H^1$

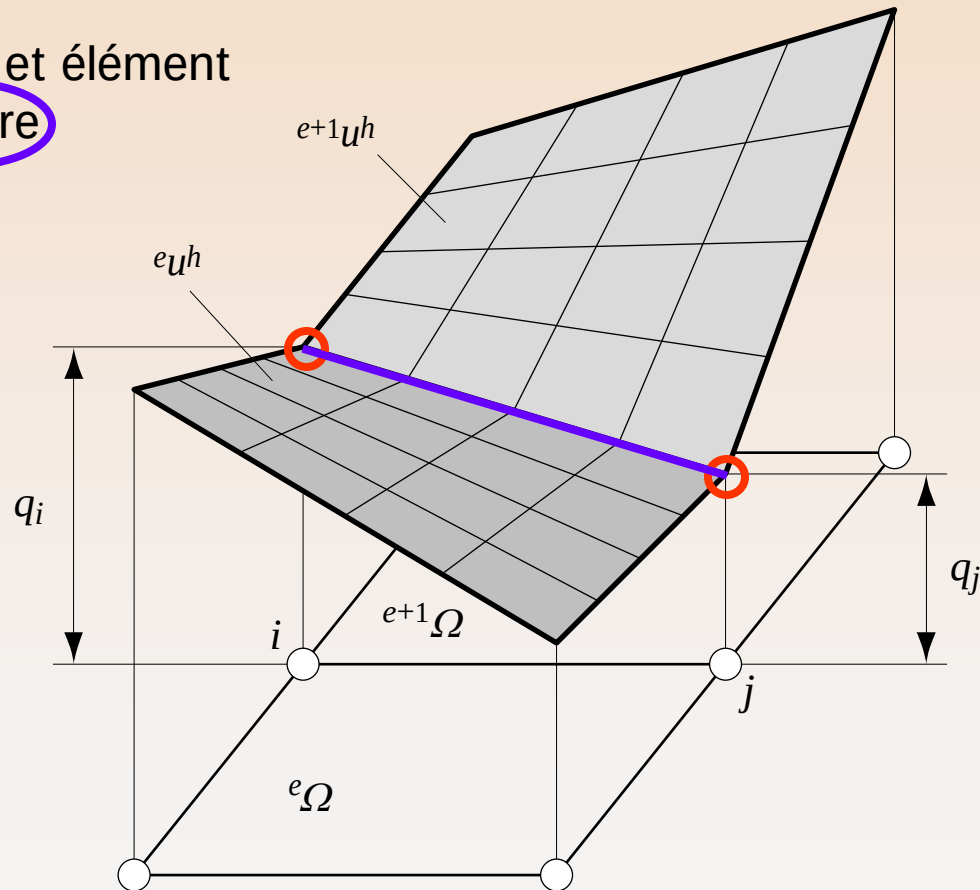


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critère de continuité et élément rectangulaire bilinéaire

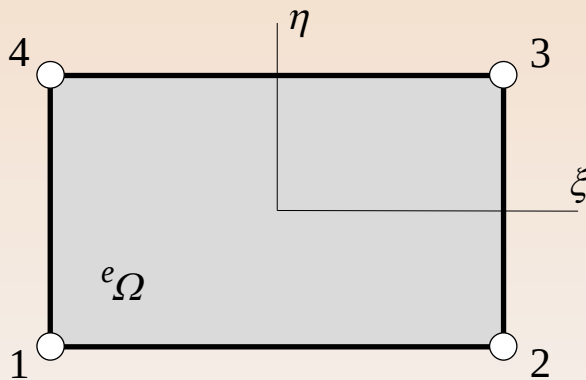


Continuité
satisfaite
aux nœuds
et aux
interfaces



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

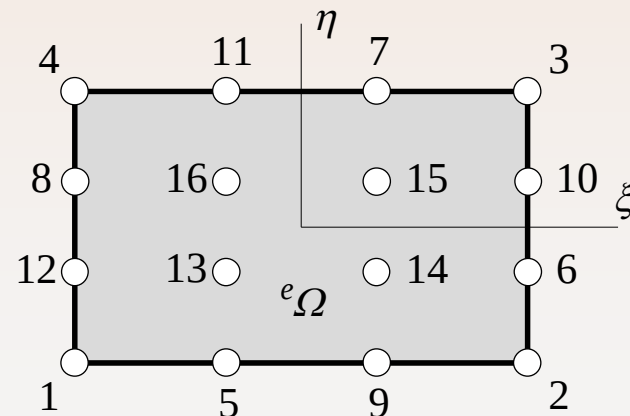
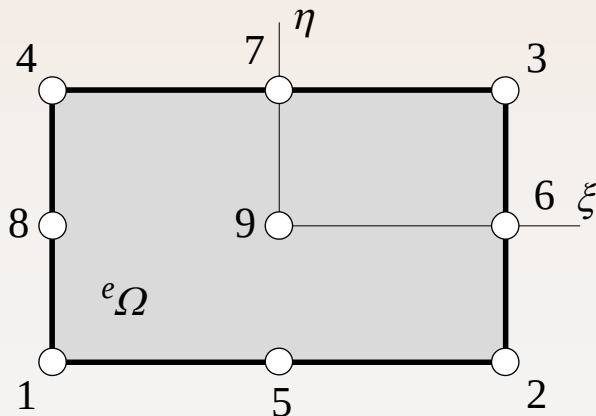
- Famille lagrangienne d'éléments finis rectangulaires réguliers



Fonctions de base =
produits de polynômes
de Lagrange

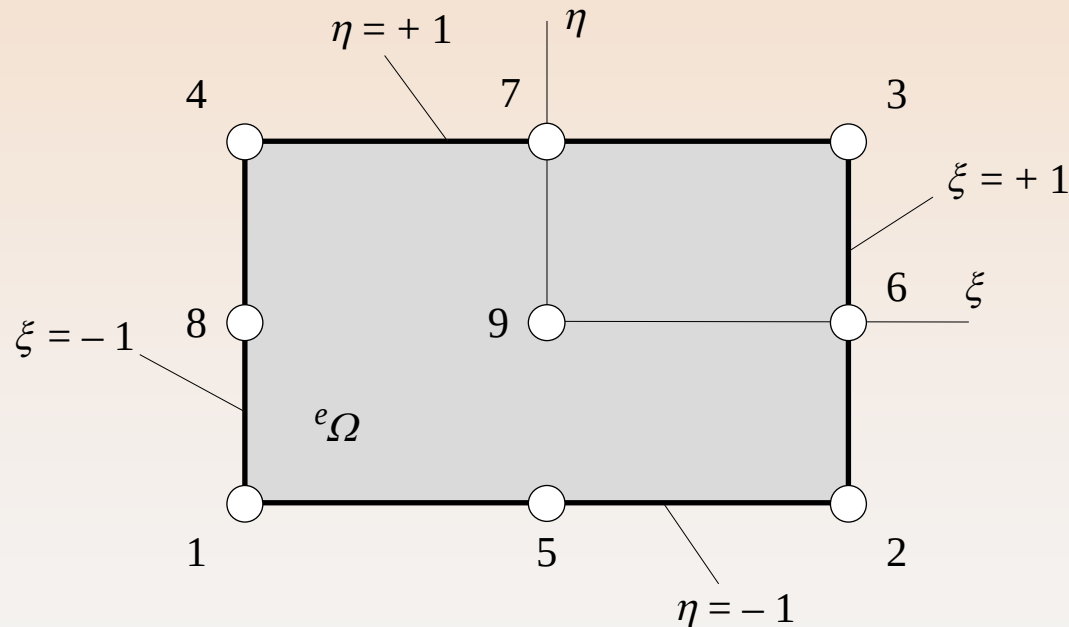


Intérêt : accroissement
de la précision



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Élément fini rectangulaire quadratique à 9 points nœuds



Numérotation des nœuds



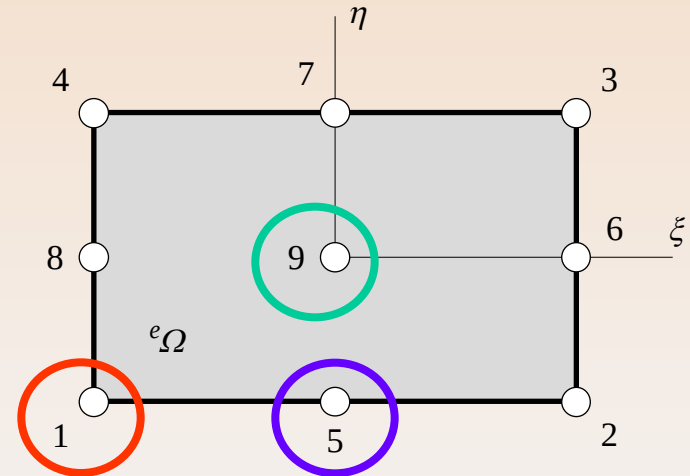
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique

$$\begin{aligned} {}^e h_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \cdot \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) \\ &= \frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi)(1 - \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^e h_5 &= (1 - \xi^2) \cdot \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) \\ &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2)(\eta - 1) \end{aligned}$$

$${}^e h_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$



Produit de deux fonctions
quadratiques en ξ et η

$\Rightarrow$ Élément fini
biquadratique



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

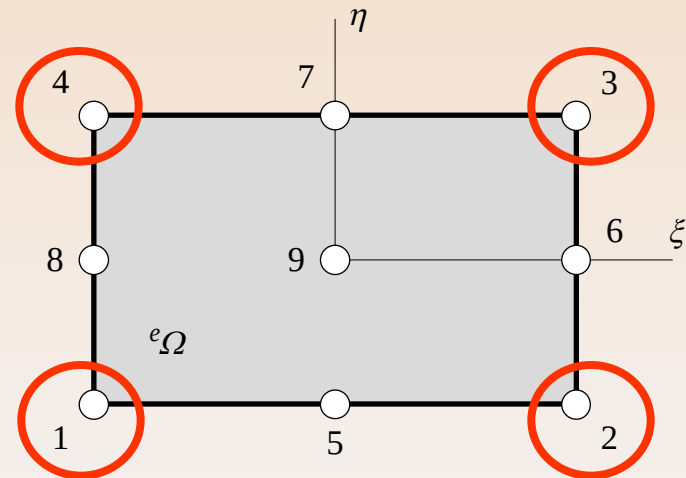
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

$$^eh_1 = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta - 1)$$

$$^eh_2 = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta - 1)$$

$$^eh_3 = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1)$$

$$^eh_4 = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta + 1)$$



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

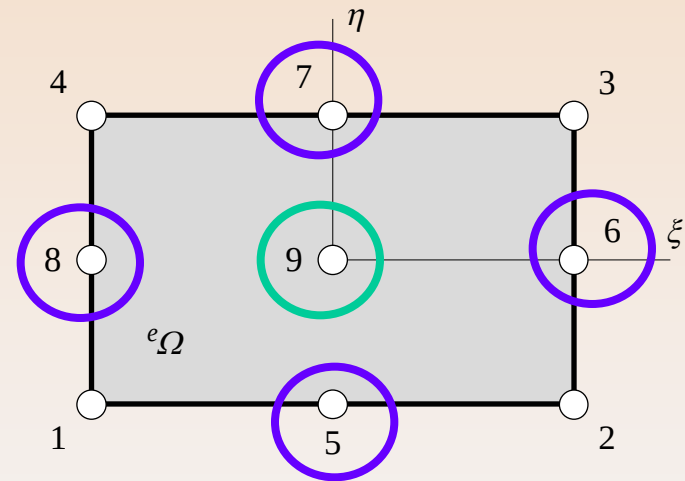
$$^eh_5 = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1)$$

$$^eh_6 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2)$$

$$^eh_7 = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1)$$

$$^eh_8 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2)$$

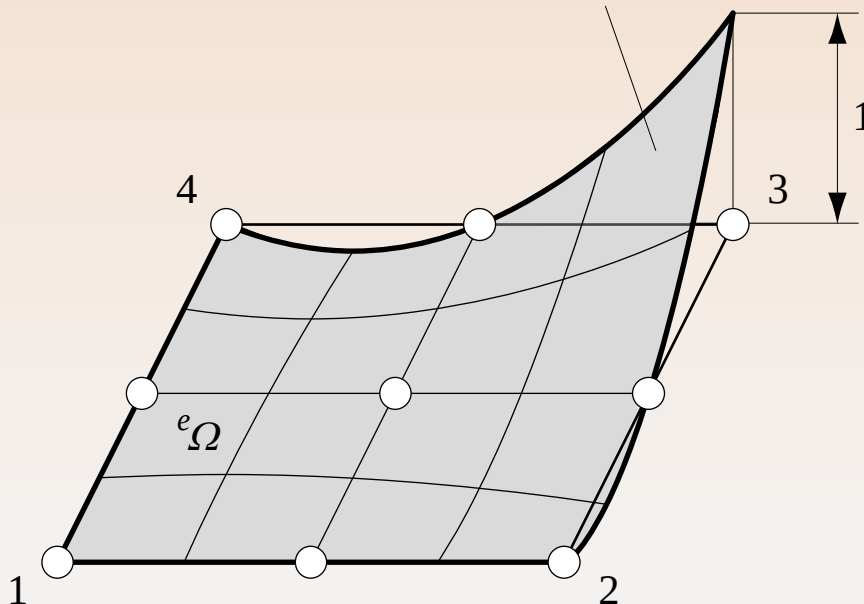
$$^eh_9 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

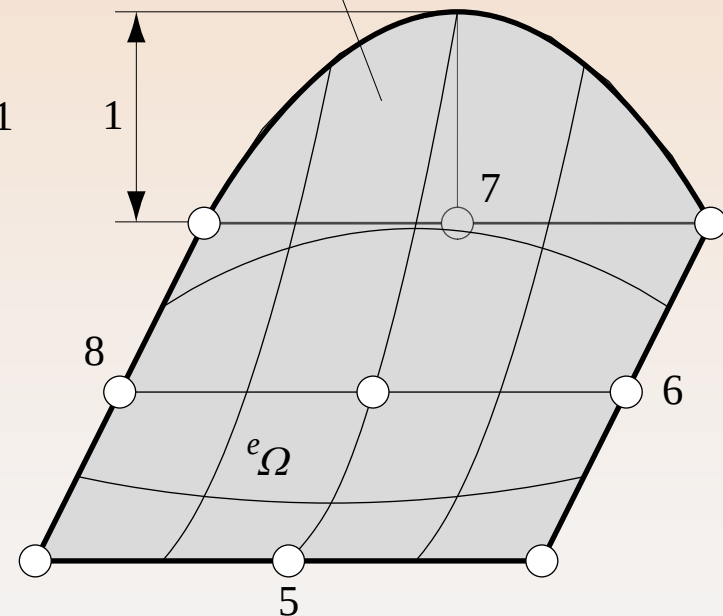
- Allure des fonctions de base de l'élément rectangulaire biquadratique

fonction de base ${}^e h_3(\xi, \eta)$



$${}^e h_3 = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1)$$

fonction de base ${}^e h_7(\xi, \eta)$

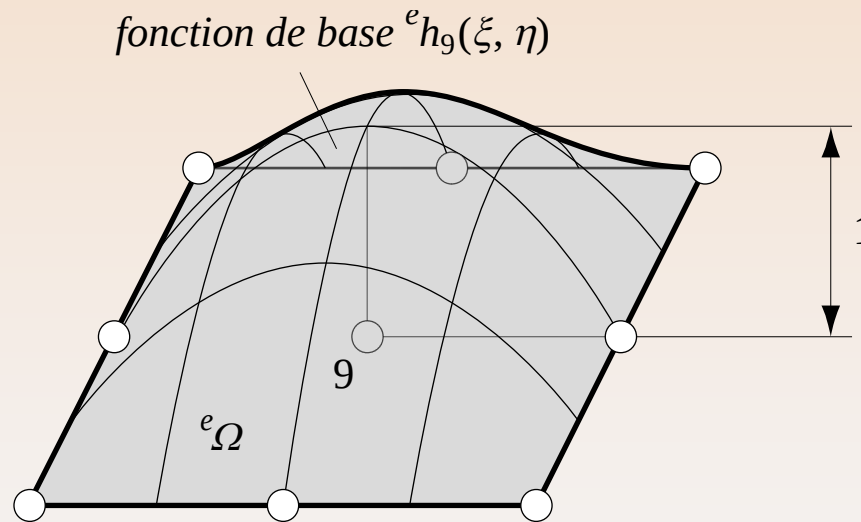


$${}^e h_7 = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1)$$



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Allure des fonctions de base de l'élément biquadratique (*suite*)



$${}^e h_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$



Complétude
satisfaite



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

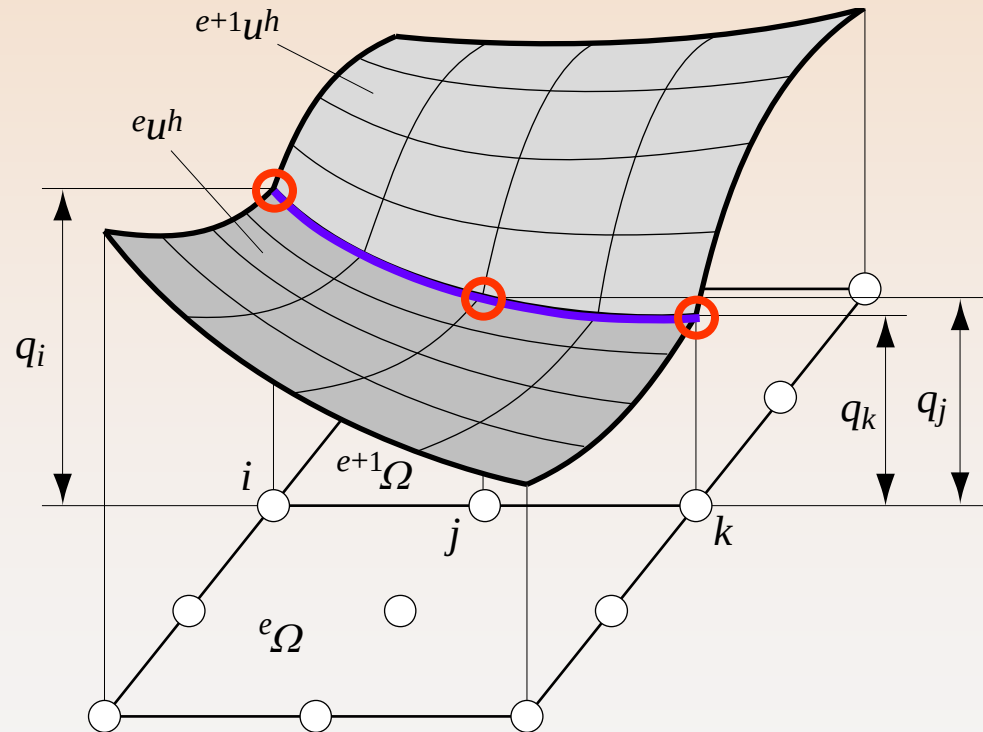
- Critères de différentiabilité et de continuité et élément biquadratique



Différentiabilité
satisfaite

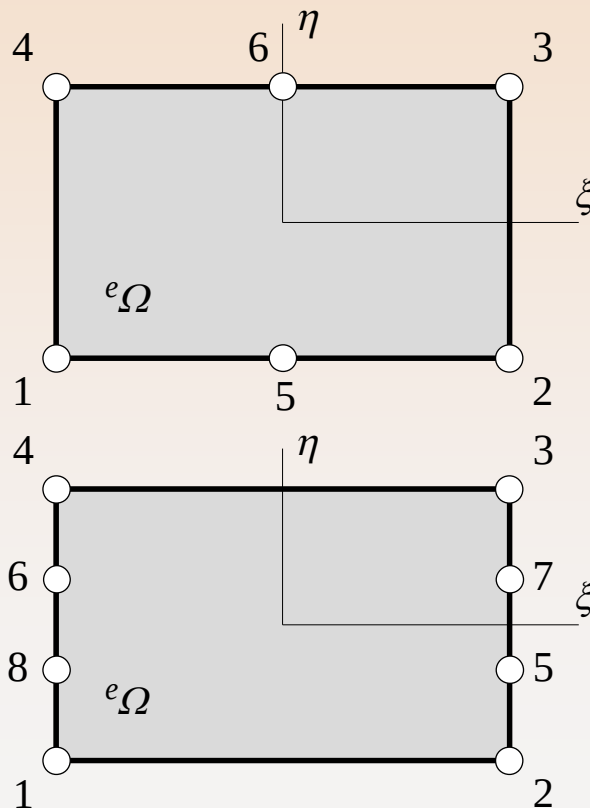


Continuité
satisfaite
aux nœuds
et aux
interfaces

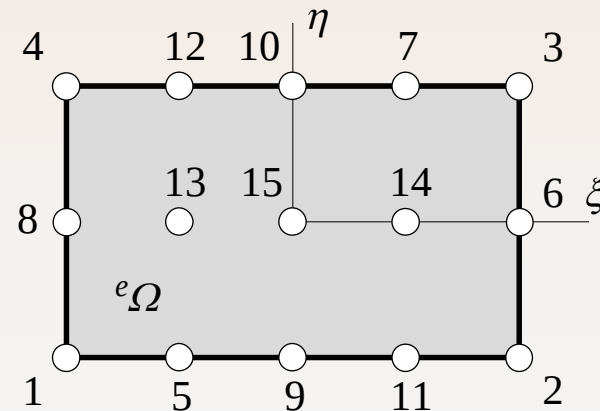


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Famille généralisée d'éléments finis rectangulaires lagrangiens



Fonctions de base =
produits de polynômes
de Lagrange d'ordres
différents selon ξ et η

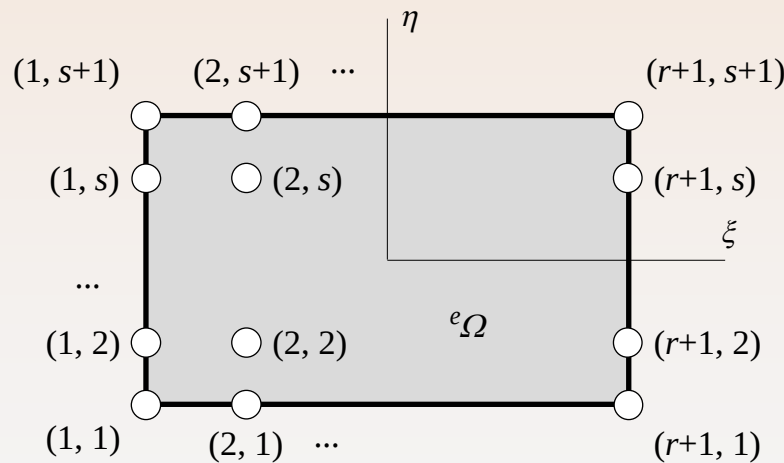


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire généralisé

$$e_{h(i,j)}(\xi, \eta) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{r+1} \frac{\xi - \xi_p}{\xi_i - \xi_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{s+1} \frac{\eta - \eta_q}{\eta_j - \eta_q}$$

$(i = 1, 2, \dots, r+1 ;$
 $j = 1, 2, \dots, s+1)$



Ordres différents
selon ξ et η :
précision privilégiée
dans une direction

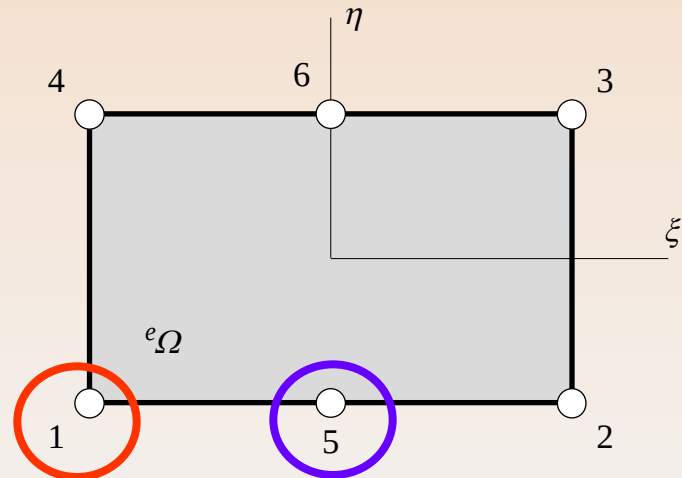


Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Exemple d'un élément fini rectangulaire lagrangien généralisé

$$\begin{aligned} {}^e h_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \cdot \frac{1}{2} (1 - \eta) \\ &= \frac{1}{4} \xi (\xi - 1) (1 - \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^e h_5 &= (1 - \xi^2) \cdot \frac{1}{2} (1 - \eta) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \end{aligned}$$



Produit de fonctions quadratique
en ξ et linéaire en η $\Rightarrow$

Élément fini
quadratique-linéaire



Éléments finis quadrangulaires lagrangiens

- Critères de convergence et élément rectangulaire généralisé



Complétude
satisfaite



Différentiabilité
satisfaite



Continuité
satisfaite
aux nœuds et
aux interfaces

