

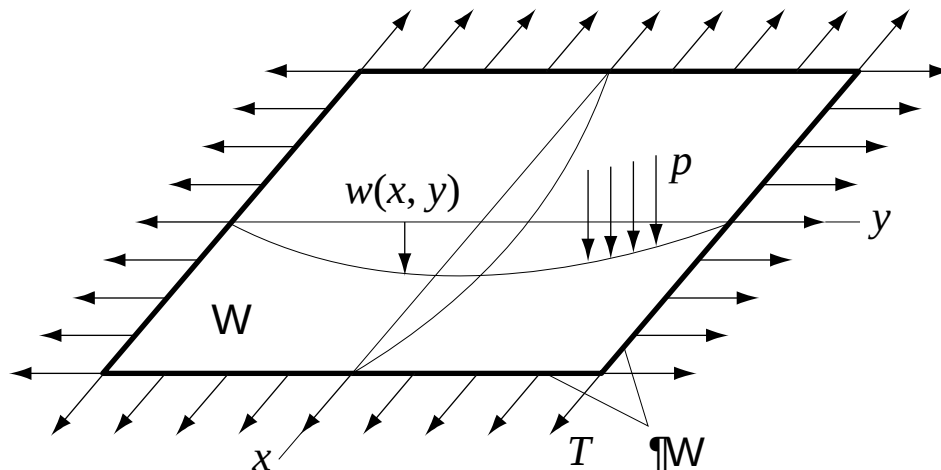
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Déformée transversale d'une membrane tendue



T tension uniforme
 p charge répartie
 w déformée

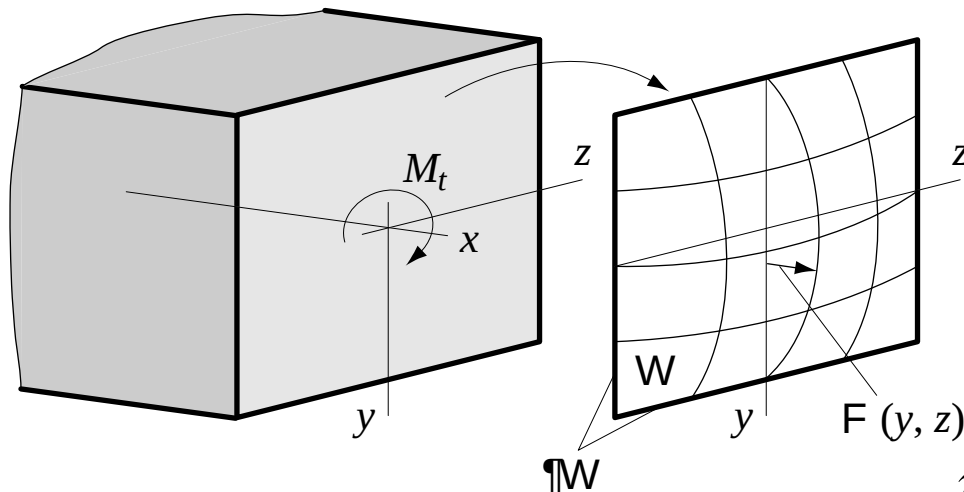
$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

$$w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Torsion d'un barreau non circulaire (analogie de la membrane)



M_t moment de torsion

Φ fonction de contrainte

G module de glissement

θ angle de torsion unitaire

τ_{xy}, τ_{xz} contraintes de cisaillement

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Poisson

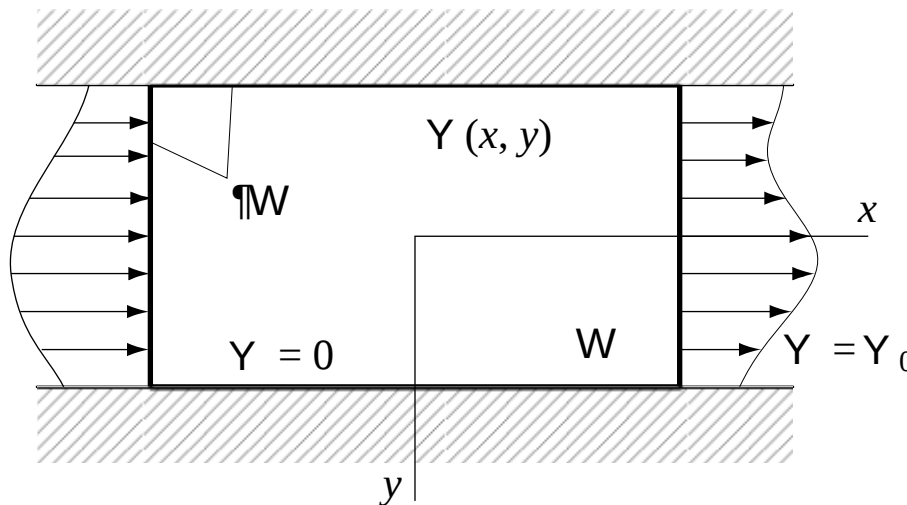
$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\tau_{xy} = \partial \Phi / \partial z$$

$$\tau_{xz} = -\partial \Phi / \partial y$$

Exemples de problèmes 2D à variable scalaire

- Écoulement irrotationnel plan incompressible



Ψ fonction de courant

Ψ_0 fonction de courant imposée

v_x, v_y vitesses de l'écoulement

$$v_x = \partial \Psi / \partial y$$

$$v_y = -\partial \Psi / \partial x$$

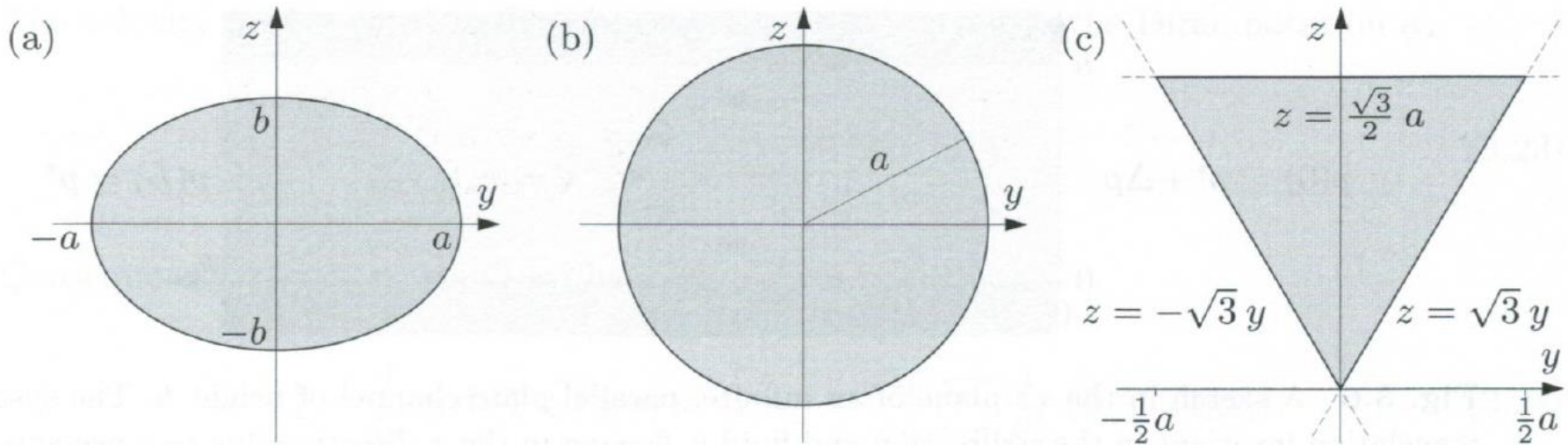
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

équation de Laplace

$$\Psi = \Psi_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Solutions des equations de Navier-Stokes

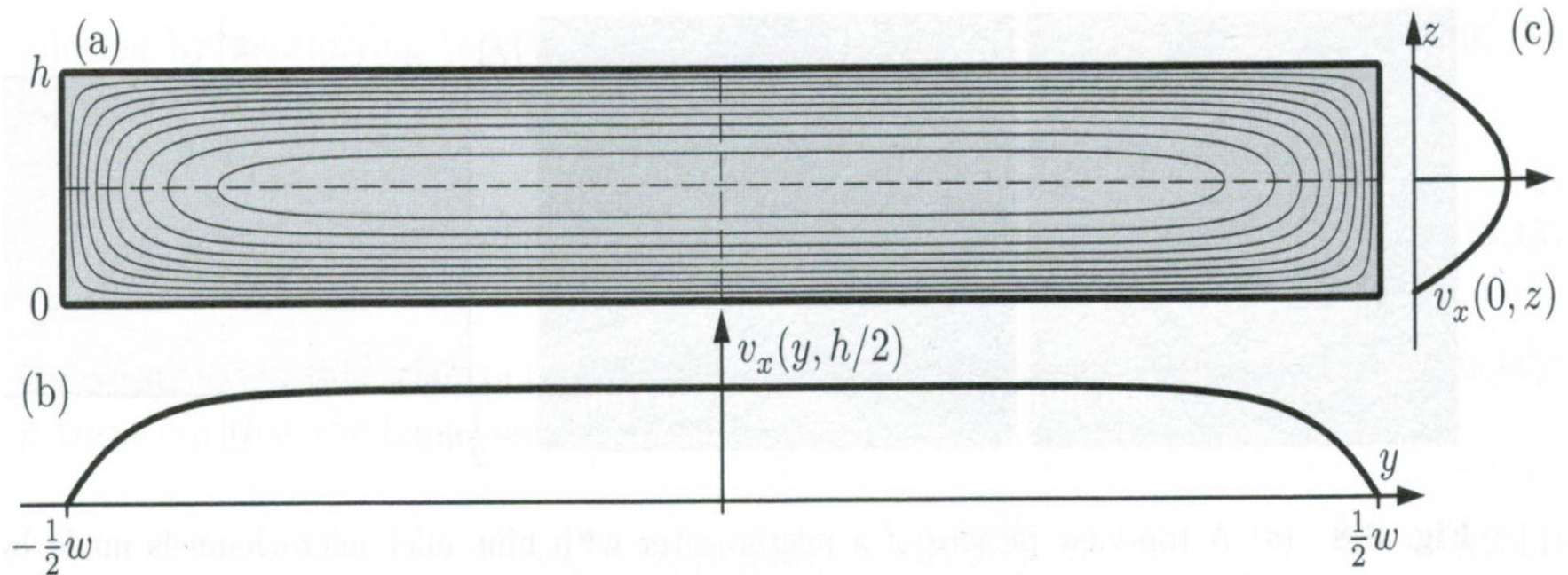
Dans les écoulements strictement parallèles, le terme non-linéaire $u \cdot \text{grad}(u) = 0$



$-w/2$

$w/2$

Ecoulement dans une conduit rectangulaire



$$v_x(y, z) = \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh \left(n\pi \frac{y}{h} \right)}{\cosh \left(n\pi \frac{w}{2h} \right)} \right] \sin \left(n\pi \frac{z}{h} \right).$$

Ecoulement dans une conduite rectangulaire

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}w} dy \int_0^h dz v_x(y, z) \\ &= \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \frac{2h}{n\pi} \left[w - \frac{2h}{n\pi} \tanh \left(n\pi \frac{w}{2h} \right) \right] \\ &= \frac{8h^3 w \Delta p}{\pi^4 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \left[\frac{1}{n^4} - \frac{2h}{\pi w} \frac{1}{n^5} \tanh \left(n\pi \frac{w}{2h} \right) \right] \\ &= \frac{h^3 w \Delta p}{12 \eta L} \left[1 - \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^5} \frac{192}{\pi^5} \frac{h}{w} \tanh \left(n\pi \frac{w}{2h} \right) \right], \end{aligned}$$

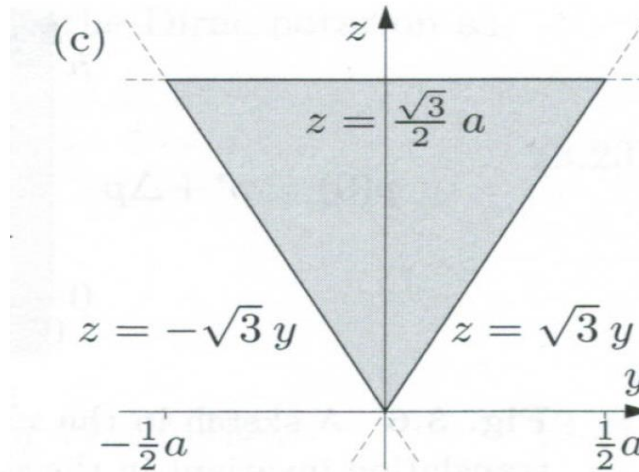
$$\sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Ecoulement dans une conduite rectangulaire

$$\approx \frac{h^3 w \Delta p}{12 \eta L} \left[1 - 0.630 \frac{h}{w} \right], \text{ for } h < w.$$

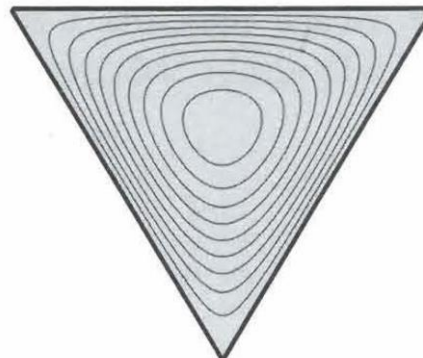
13% pour une section carrée, 0.2% pour un rapport d'allongement de 2

Ecoulement dans un conduit de section triangulaire



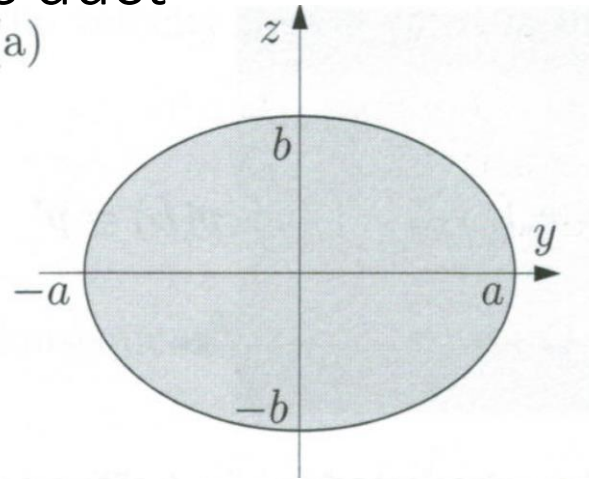
$$v_x(y, z) = \frac{v_0}{a^3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - z \right) (z - \sqrt{3}y) (z + \sqrt{3}y) = \frac{v_0}{a^3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - z \right) (z^2 - 3y^2).$$

$$v_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\Delta p}{\eta L} a^2$$



Flow in an elliptic duct

(a)

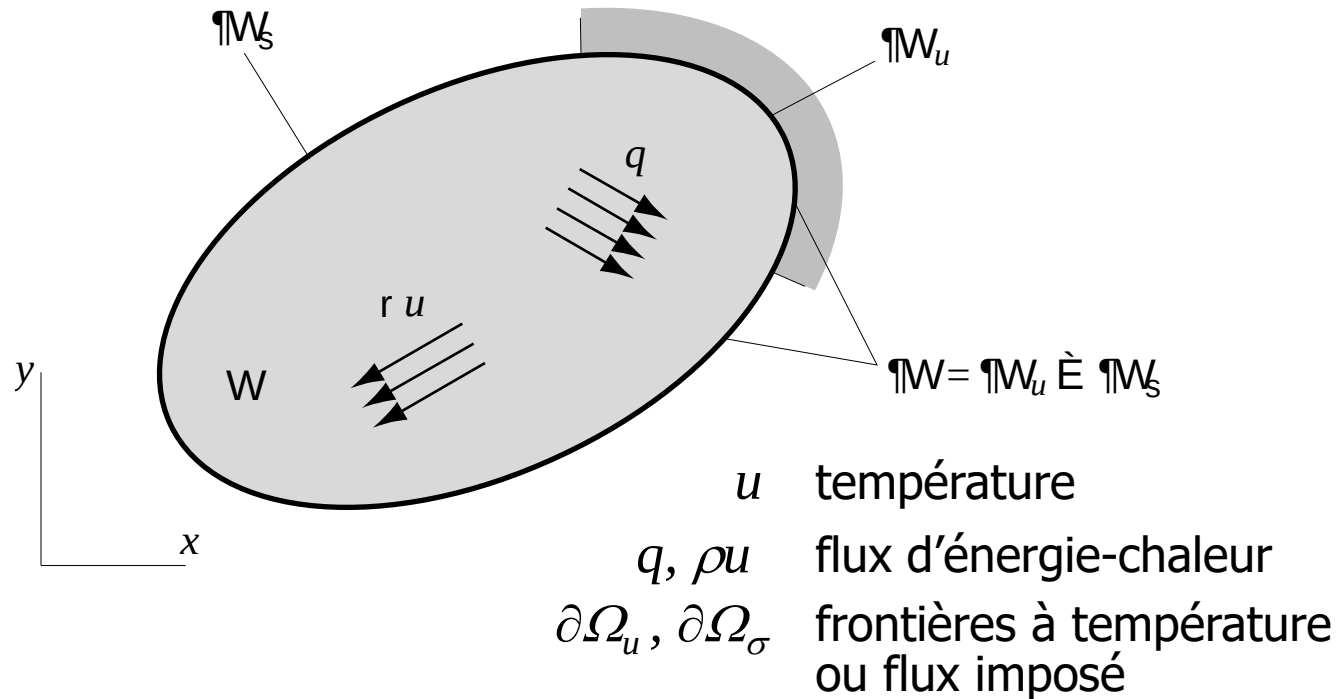


$$v_x(y, z) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$

$$v_0 = \frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$



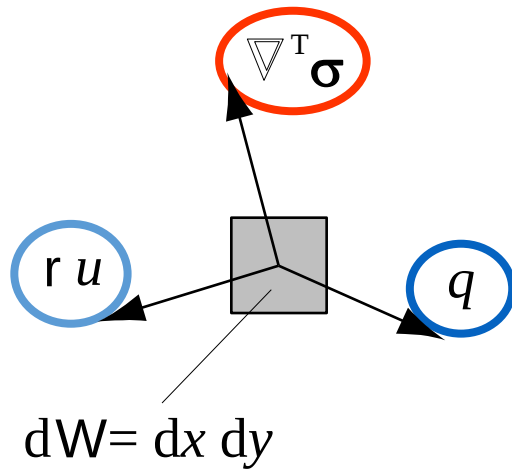
Problème modèle du transfert-chaaleur par conduction



Milieu bidimensionnel soumis à un transfert-chaaleur par conduction (régime permanent)

Formulation forte du problème

- Principe de conservation (bilan des flux d'énergie-chaleur dans un volume de contrôle $d\Omega$)



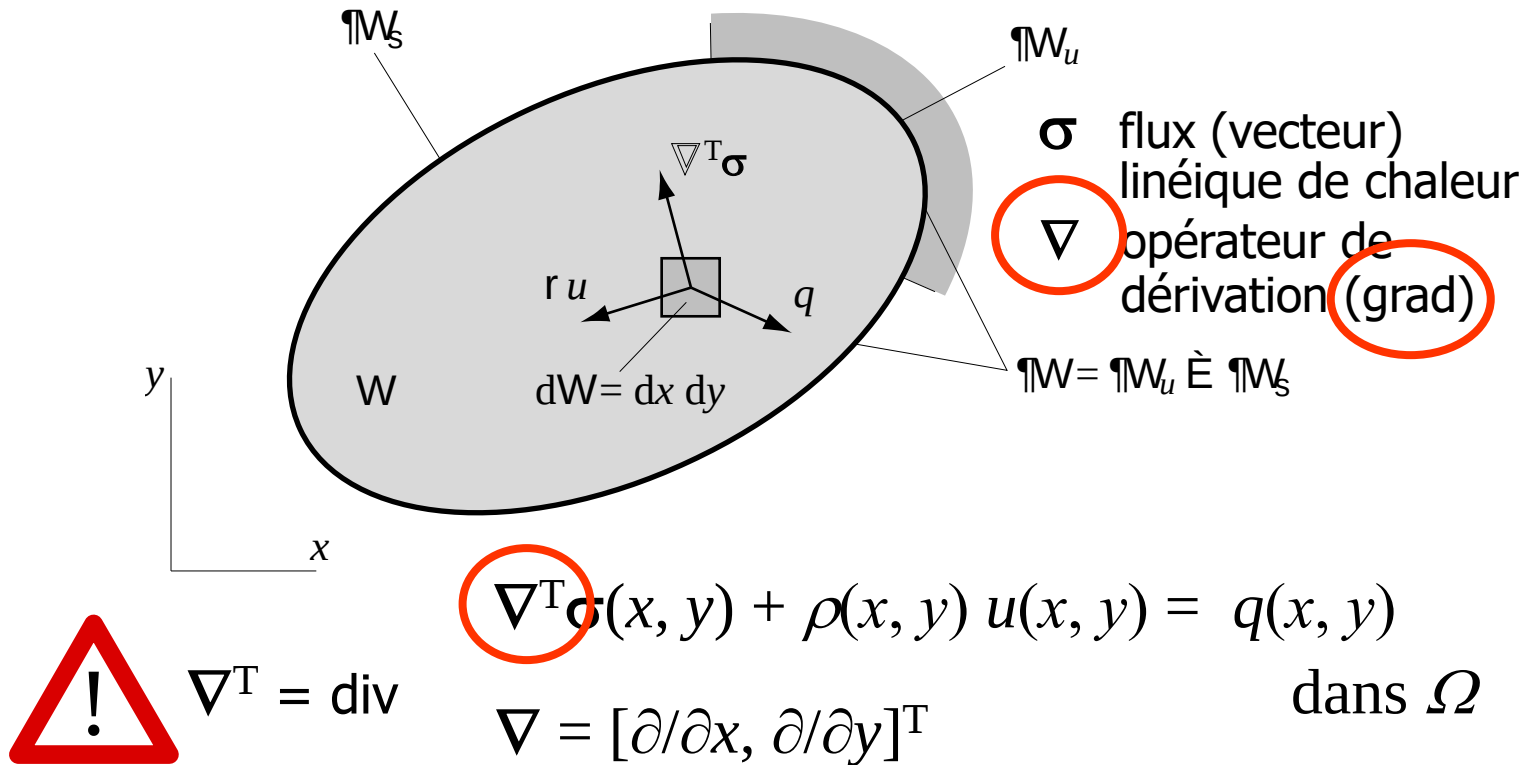
- Flux interne d'énergie-chaleur pénétrant
- Flux interne d'énergie-chaleur absorbé (dégagé) par un puits (source) surfacique de chaleur proportionnel à la température
- Flux interne d'énergie-chaleur dégagé (absorbé) par une source (puits) surfacique de chaleur indépendante de la température



Signe des flux internes
d'énergie-chaleur

Formulation forte du problème

- Équation d'équilibre



Formulation forte du problème

- Loi de comportement (loi de Fourier)

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = - \kappa(x, y) \nabla u(x, y)$$

κ coefficient de conductibilité thermique

∇u gradient du champ de température



Linéarité du gradient de température

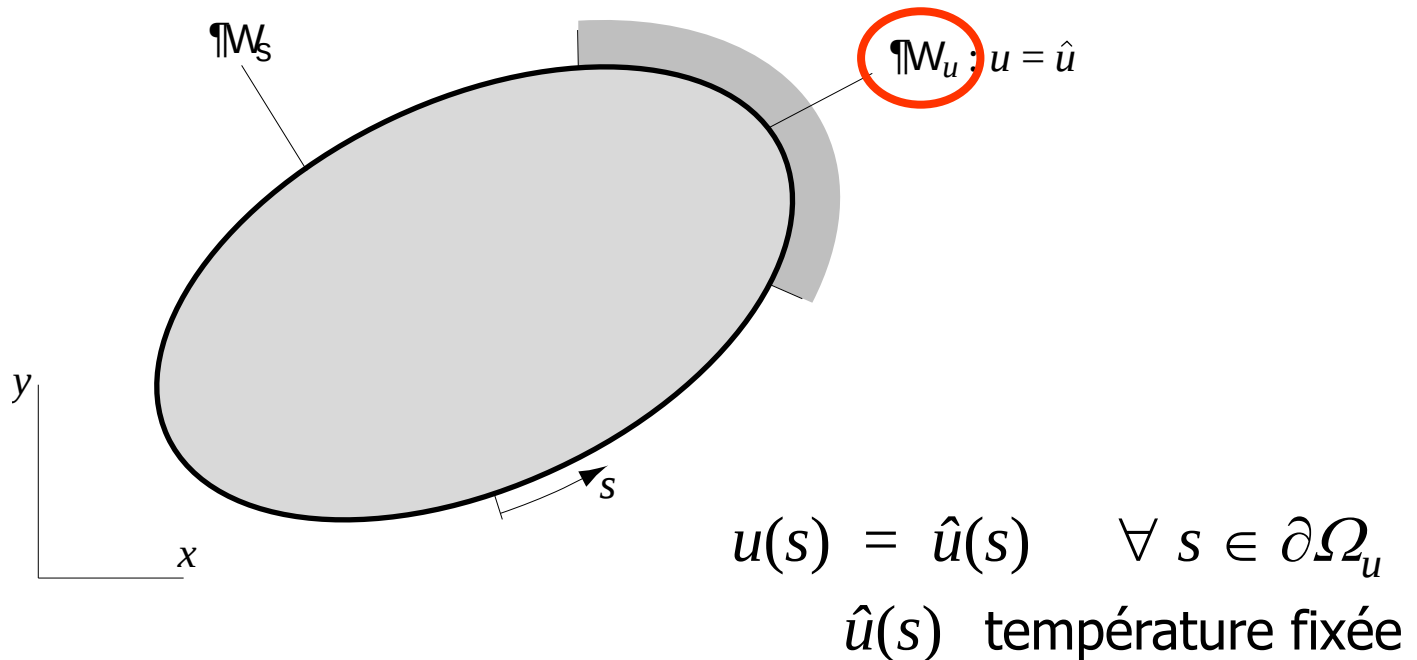
- Séparation de la frontière en limites essentielle et naturelle

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$$

$$\emptyset = \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma$$

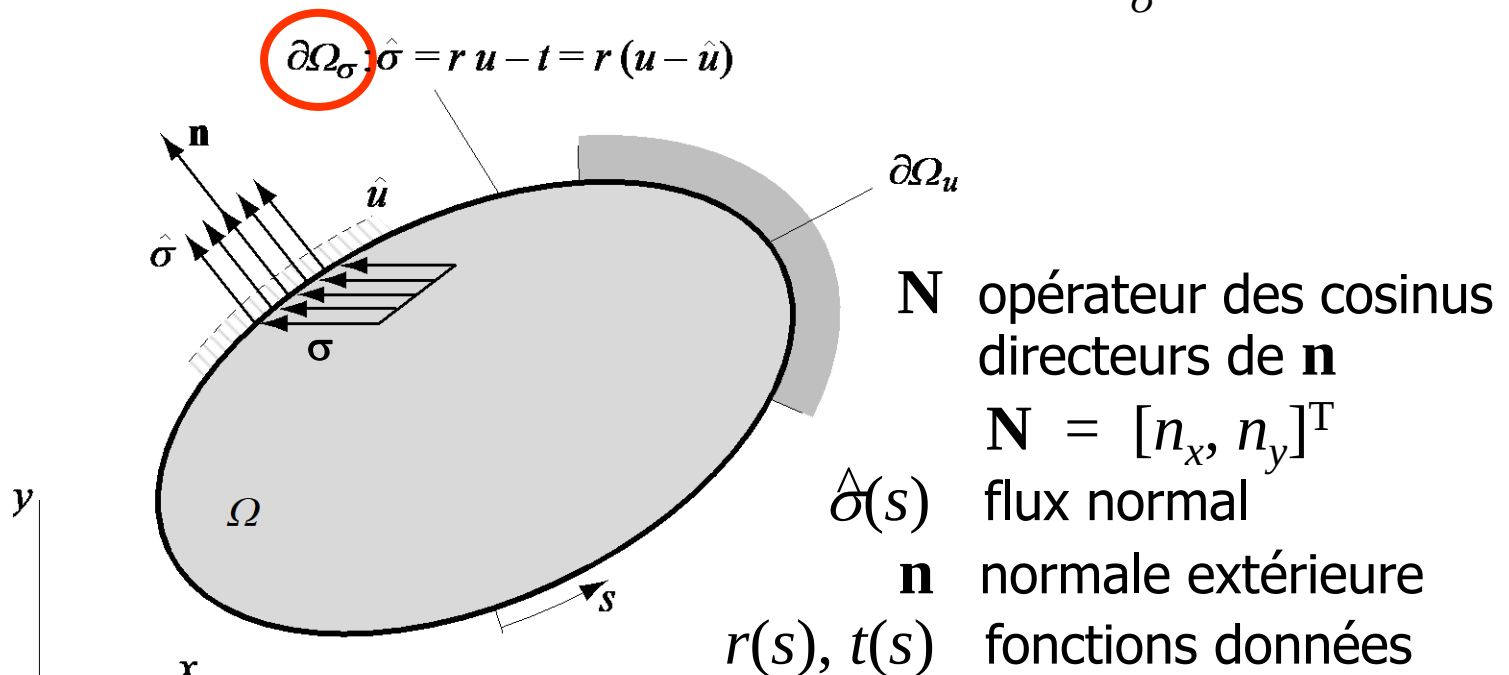
Formulation forte du problème

- Conditions aux limites essentielles sur le bord $\partial\Omega_u$



Formulation forte du problème

- Conditions aux limites naturelles sur le bord $\partial\Omega_\sigma$



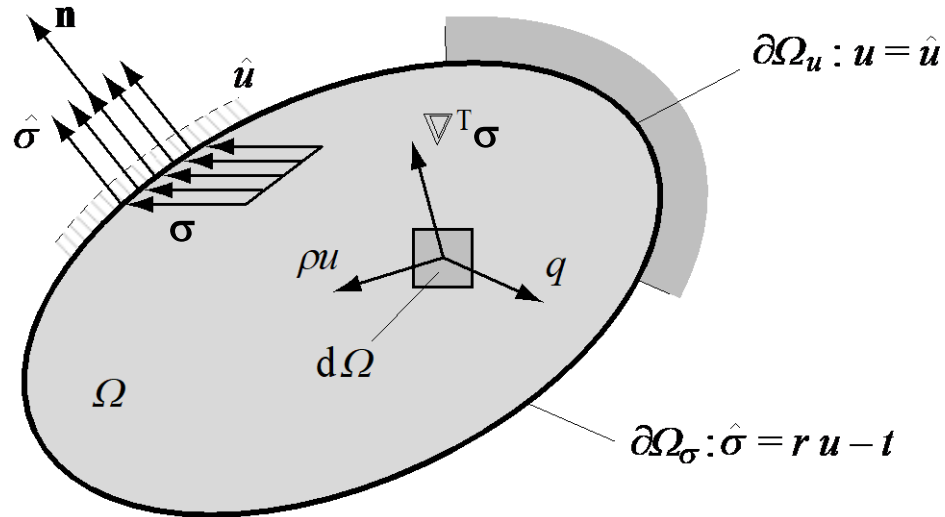
$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}(s) = \hat{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s) \cdot \mathbf{n} = r(s)u(s) - t(s) \quad \forall s \in \partial\Omega_\sigma$$

Formulation forte du problème

- Forme forte



Régularité des
fonctions



$$u \in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u = q \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad u = \hat{u} \quad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u) &= -\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\kappa (\partial u / \partial n) \\ &= r u - t \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Forme intégrale

$$\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u) + \rho u - q] \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

δu température virtuelle

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle pour l'intégration par parties du terme $\int_{\Omega} [\nabla^T (-\kappa \nabla u)] \delta u \, dx \, dy$

- Divergence du produit du vecteur $-\kappa \nabla u$ par le scalaire δu

$$\begin{aligned} \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] &= \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) + (-\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u \\ \Rightarrow \delta u \nabla^T (-\kappa \nabla u) &= \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] + (\kappa \nabla u)^T \nabla \delta u \end{aligned}$$

Forme intégrale du problème

- Rappel de quelques formules d'analyse vectorielle (*suite*)

- Théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^T [(-\kappa \nabla u) \delta u] \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot ds \\ &= \int_{\partial\Omega} [(-\kappa \nabla u) \delta u] \cdot \mathbf{n} \, ds \end{aligned}$$

- Intégration par parties (théorème de Green – formule de Gauss)

$$\int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \delta u \, ds$$



Théorème de
la divergence

$$- \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

Forme intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites essentielles

$$\dots - \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$



$$\dots - \int_{\partial\Omega_u} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds - \int_{\partial\Omega_\sigma} \kappa \mathbf{N}^T \nabla u \, \delta u \, ds \dots$$

Température virtuelle
"thermiquement"
admissible

$u = \hat{u}$ sur $\partial\Omega_u$
 $\Rightarrow \delta u = 0$ sur $\partial\Omega_u$

$\mathbf{N}^T (-\kappa \nabla u)$
 $= r(s)u(s) - t(s)$ sur $\partial\Omega_\sigma$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\sigma} (ru - t) \delta u \, ds - \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy = 0 \quad \forall \delta u$$

Formulation faible du problème

- Forme faible du transfert-chaleur par conduction

$$\begin{aligned}
 u \in U : \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u + \rho u \delta u] \, dx \, dy & \quad \text{Conditions naturelles} \\
 & + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} r u \delta u \, ds \\
 = \int_{\Omega} q \delta u \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} t \delta u \, ds & \quad \forall \delta u \in V
 \end{aligned}$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

$$\begin{aligned}
 U &= \{u(x, y) \mid u(x, y) \in H^1(\Omega) ; u(s) = \hat{u}(s), \forall s \in \partial\Omega_u\} \\
 V &= \{\delta u(x, y) \mid \delta u(x, y) \in H^1(\Omega) ; \delta u(s) = 0, \forall s \in \partial\Omega_u\} \\
 H^1(\Omega) &= \{u \mid u \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial x \in L^2(\Omega) ; \partial u / \partial y \in L^2(\Omega)\}
 \end{aligned}$$

Conditions
essentielles