

Méthode des éléments finis

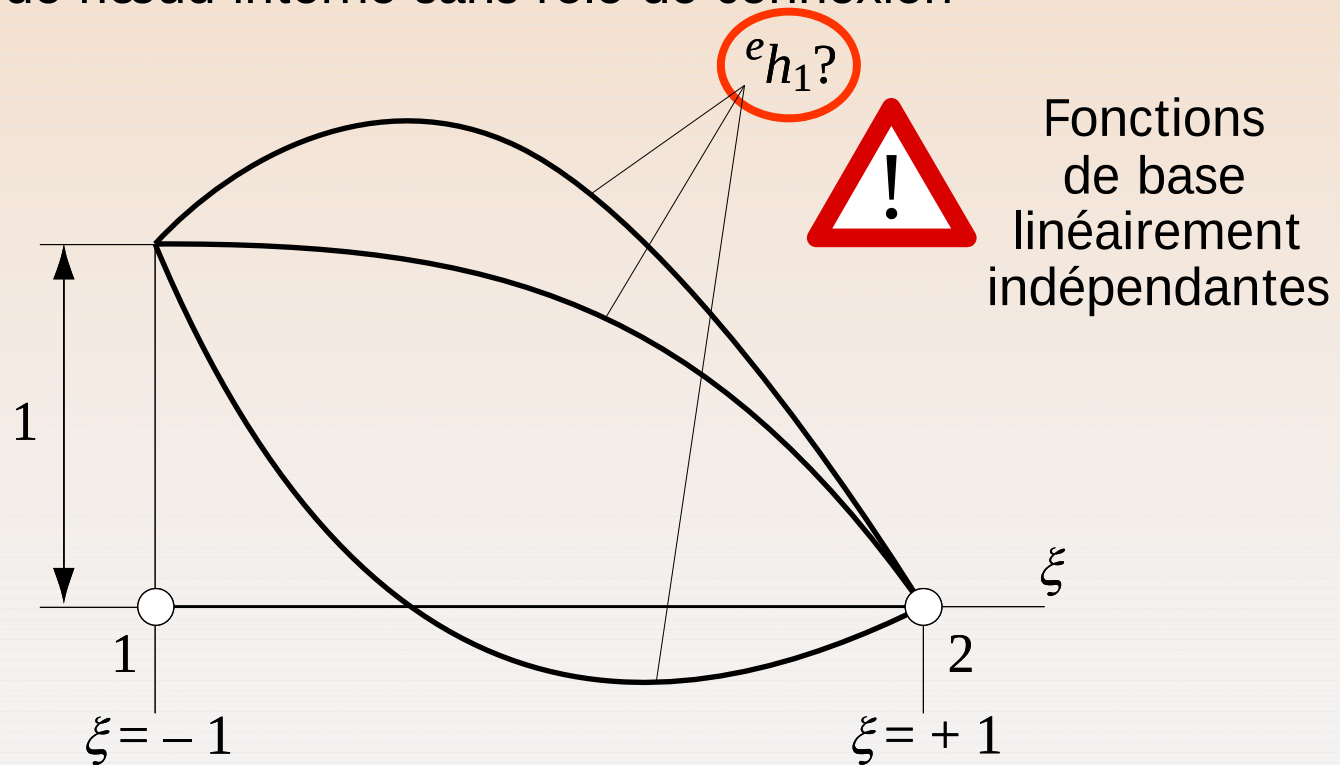
Généralisation de la forme faible aux problèmes unidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

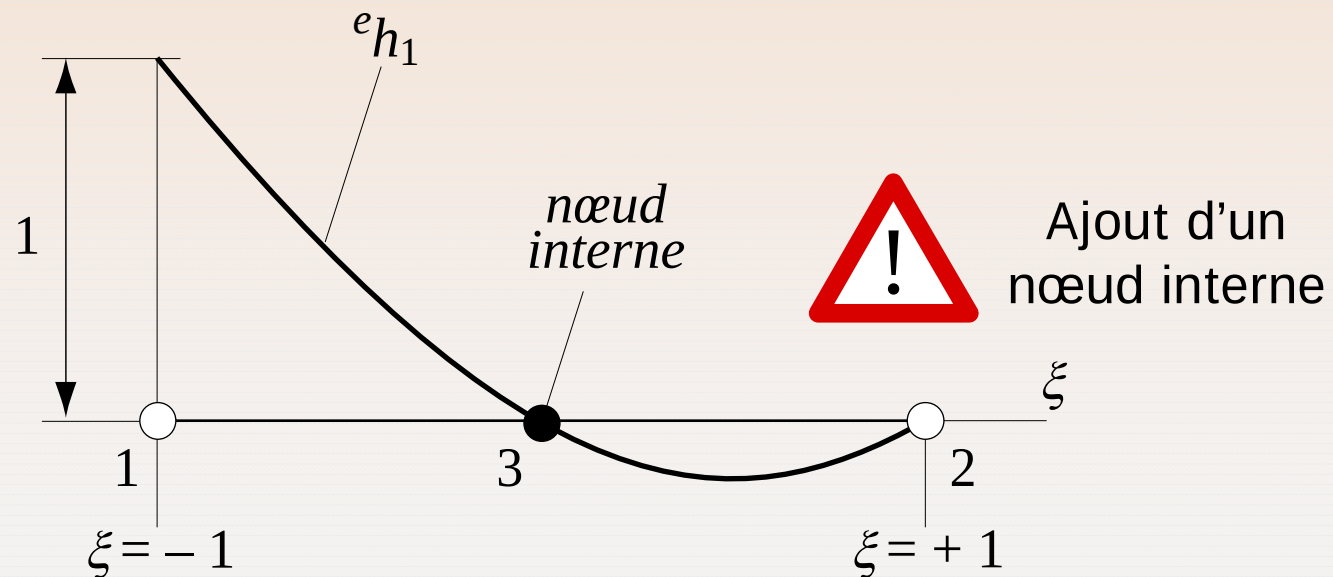
Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Notion de nœud interne sans rôle de connexion



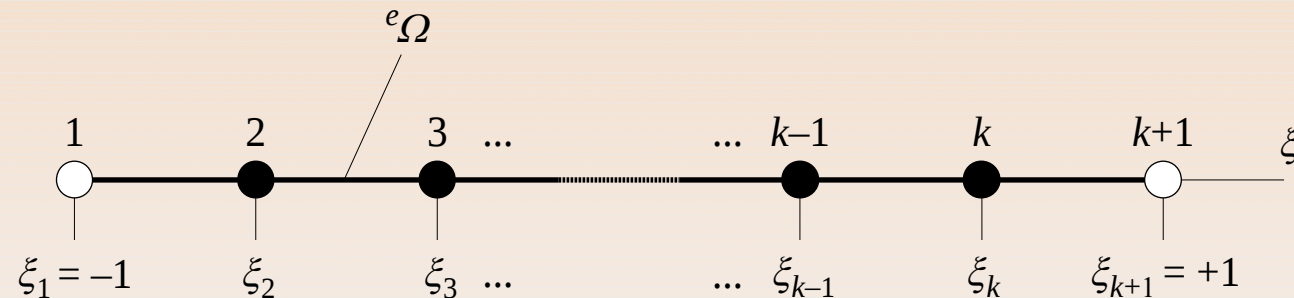
Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Notion de nœud interne sans rôle de connexion



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Construction de fonctions de base d'ordre supérieur



$$e h_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{i-1}) (\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{k+1})}{(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1}) (\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{k+1})}$$

$$= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k+1} \frac{\xi - \xi_p}{\xi_i - \xi_p} \quad (i = 1, 2, \dots, k+1)$$

Polynômes
de Lagrange



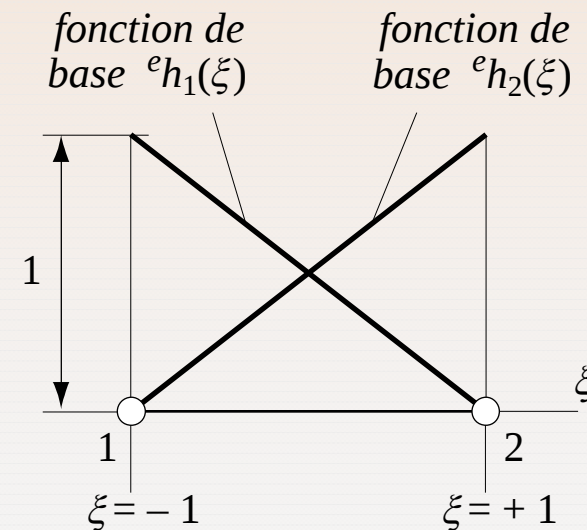
Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Famille lagrangienne d'éléments finis (éléments finis lagrangiens)
 - Élément fini linéaire ($k=1$)



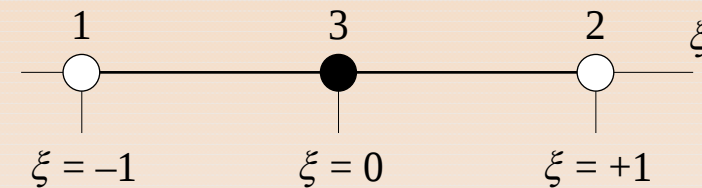
$${}^e h_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$${}^e h_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Élément fini quadratique ($k=2$)



$$^e h_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

$$^e h_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

$$^e h_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = 1 - \xi^2$$

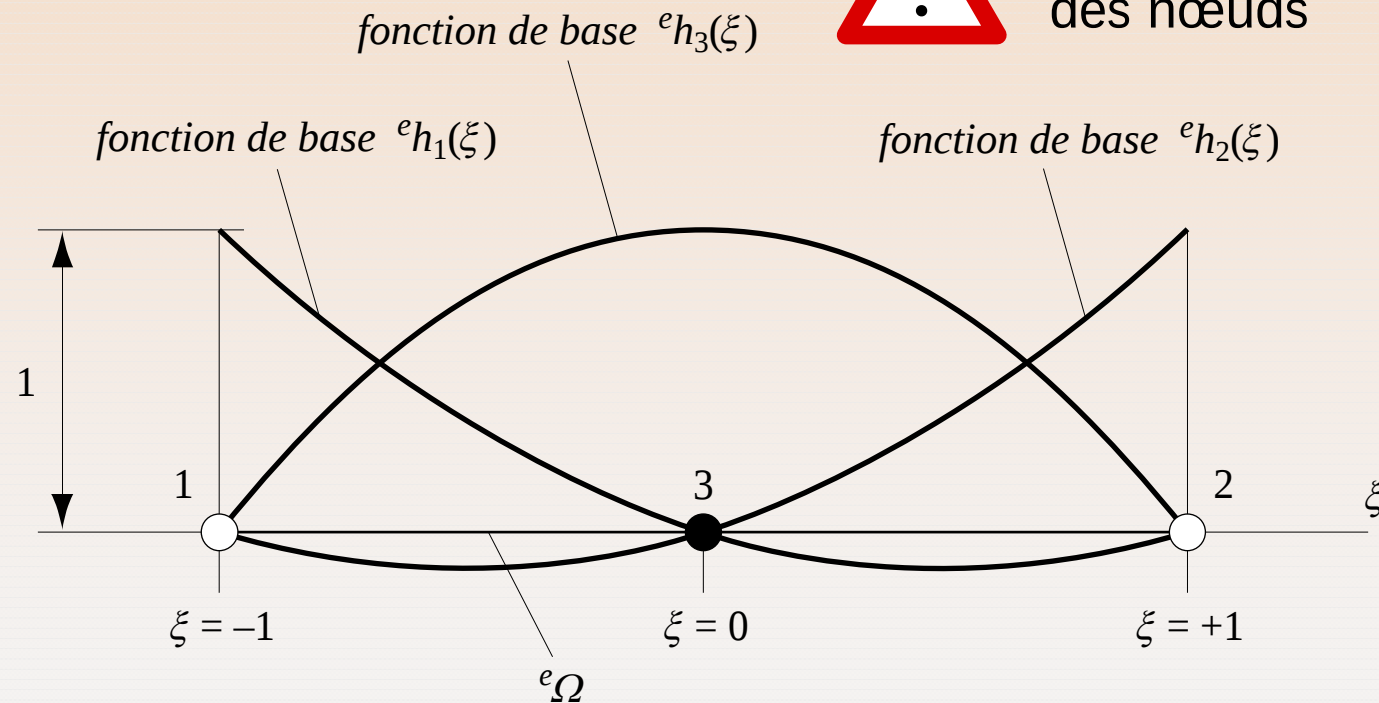


Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Élément fini quadratique (*suite*)



Numérotation
des nœuds

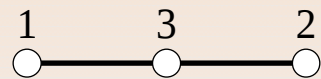


Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Numérotation des nœuds des éléments finis d'ordre supérieur



$${}^e h_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad {}^e h_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$



$${}^e h_3 = 1 - \xi^2$$



$$\sum_{i=1}^p {}^e h_i(x) = 1 \Rightarrow \text{Correction des fonctions de base}$$

$${}^e h_1 \leftarrow {}^e h_1 - \frac{1}{2} {}^e h_3 = \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

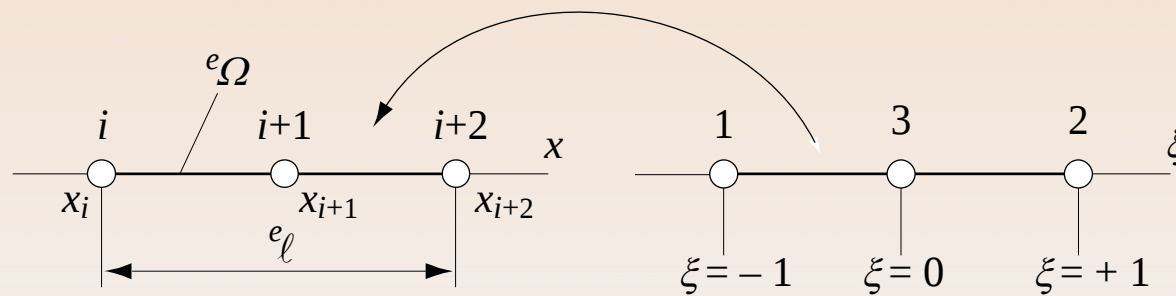


Optimisation du stockage des fonctions de base



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Matrice de rigidité d'un élément fini quadratique
 - Transformation de coordonnées



$$\xi = \frac{1}{e_l} (2x - x_i - x_{i+2})$$

ξ coordonnée naturelle
 e_l longueur de l'élément



Nœud $i+1$ admis centré en $e_l/2$



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Composantes de la matrice de rigidité

$${}^e k_{ij} = \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_i / dx) (d^e h_j / dx) + {}^e \rho {}^e h_i {}^e h_j] dx$$

- Calcul des composantes de la matrice

$$\begin{aligned} {}^e k_{11} &= \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_1 / dx)^2 + {}^e \rho {}^e h_1^2] dx \\ &= \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_1 / d\xi)^2 (d\xi/dx)^2 + {}^e \rho {}^e h_1^2] dx \end{aligned}$$

$$d\xi/dx = 2/{}^e \ell \quad dx = ({}^e \ell / 2) d\xi$$



Transformation linéaire d'un élément quadratique



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Calcul des composantes de la matrice (*suite*)

$${}^e k_{11} = \int_{-1}^{+1} \left[{}^e E {}^e A \left(\frac{1}{2} (2\xi - 1) \right)^2 \left(\frac{2}{e_\ell} \right)^2 + \frac{{}^e \rho}{4} \xi^2 (\xi - 1)^2 \right] \frac{e_\ell}{2} d\xi$$

$$= 7 {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) + 2 {}^e \rho {}^e \ell / 15$$

$${}^e k_{12} = {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) - {}^e \rho {}^e \ell / 30 = {}^e k_{21}$$

$${}^e k_{13} = -8 {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) + {}^e \rho {}^e \ell / 15 = {}^e k_{31}$$

$${}^e k_{22} = 7 {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) + 2 {}^e \rho {}^e \ell / 15$$



Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

- Calcul des composantes de la matrice (*suite*)

$${}^e k_{23} = -8 {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) + {}^e \rho {}^e \ell / 15 = {}^e k_{32}$$

$${}^e k_{33} = 16 {}^e E {}^e A / (3 {}^e \ell) + 8 {}^e \rho {}^e \ell / 15$$

- Matrice de rigidité

$${}^e \mathbf{K} = \frac{{}^e E {}^e A}{3 {}^e \ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + \frac{{}^e \rho {}^e \ell}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$



Matrice (3×3)
indépendante de la
position de l'élément



Paramètres de la matrice :
matériau (${}^e E$, ${}^e \rho$) et
géométrie (${}^e A$, ${}^e \ell$)



Intégration numérique de Gauss-Legendre

- Rappel de la quadrature de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi \approx \sum_{i=1}^r (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i} \omega_i$$

ξ_i abscisse du point d'intégration i

ω_i coefficient de pondération du point i



r points
de Gauss



Intégration exacte d'un
polynôme de degré $2r - 1$
(erreur d'ordre $2r$)



Polynôme $(\cdot)$ de
Lagrange normé



Intégration numérique de Gauss-Legendre

- Quadrature de Gauss-Legendre : règles unidimensionnelles

<i>Abscisse ξ</i>	<i>Coefficient de pondération ω</i>	<i>Précision</i>
0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000	ordre 1
$\pm$ 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	ordre 3
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556	ordre 5
$\pm$ 0.33998 10435 84856 $\pm$ 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454	ordre 7
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.53846 93101 05683 $\pm$ 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189	ordre 9



Intégration numérique de Gauss-Legendre

- Exemple d'application : évaluation d'une composante de la matrice de rigidité élastique d'un élément quadratique

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{3 {}^e\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$${}^e k_{11} = \int_{-1}^{+1} {}^eE {}^eA \left(\frac{1}{2} (2\xi - 1) \right)^2 \left(\frac{2}{{}^e\ell} \right)^2 \frac{{}^e\ell}{2} d\xi$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{{}^eE {}^eA}{2 {}^e\ell} (2\xi - 1)^2 d\xi$$



2 points de Gauss
pour une
intégration exacte



Intégration numérique de Gauss-Legendre

- Exemple d'application : évaluation d'une composante de la matrice de rigidité élastique d'un élément quadratique (*suite*)

$$\frac{{}^eE {}^eA}{2 {}^e\ell} (2\xi - 1)^2 \Big|_{\xi=\pm\sqrt{3}/3} = \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 \mp 4\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^ek_{11} &= (1) \cdot \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 - 4\sqrt{3}) + (1) \cdot \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 + 4\sqrt{3}) \\ &= 7 {}^eE {}^eA / (3 {}^e\ell) \end{aligned}$$



Valeur exacte



Intégration numérique de Gauss-Legendre

- Exemple d'application : évaluation d'une composante de la matrice de rigidité élastique d'un élément quadratique (*suite*)

$$\frac{{}^eE {}^eA}{2 {}^e\ell} (2\xi - 1)^2 \Big|_{\xi=\pm\sqrt{3}/3} = \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 \mp 4\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^ek_{11} &= (1) \cdot \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 - 4\sqrt{3}) + (1) \cdot \frac{{}^eE {}^eA}{6 {}^e\ell} (7 + 4\sqrt{3}) \\ &= 7 {}^eE {}^eA / (3 {}^e\ell) \end{aligned}$$



3 points de Gauss nécessaires en cas de distorsion de l'élément (nœud du milieu non centré) et pour le calcul de la matrice de masse

⇒ Règle : 3 nœuds = 3 points de Gauss



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

- Rappel de la définition de l'erreur et de ses normes principales
 - Notion d'erreur dans un modèle d'éléments finis

$$e^h = u - u^h$$

- Norme euclidienne de l'erreur (norme H^0)

$$\| e^h \|_0 = \left[\int_0^\ell (e^h)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Norme énergétique de l'erreur (norme H^1)

$$\| e^h \|_1 = \left[\int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx \right]^{1/2}$$



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

- Estimation asymptotique de l'erreur pour une solution régulière (norme H^m)

$$\| e^h \|_m \leq C_m h^{k+1-m} \| u^h \|_{k+1} \quad (h/\ell \ll 1)$$

C_m facteur de convergence

k degré des fonctions de base

m ordre de dérivation dans la forme faible

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

- Estimation asymptotique générale de l'erreur (norme H^m)

$$\| e^h \|_m \leq C_m h^{\min(k+1-m, r+1-m)} \| u^h \|_r \quad (h/\ell \ll 1)$$

r ordre de régularité de la solution ($u \in H^r$)



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

- Estimation asymptotique de l'erreur (norme H^s ; $0 \leq s \leq m$)

$$\| e^h \|_s \leq C_s h^{k+1-s} \| u^h \|_{k+1} \quad \text{si } s \geq 2m - k - 1$$

$$\| e^h \|_s \leq C_s h^{2(k+1-m)} \| u^h \|_{k+1} \quad \text{si } s \leq 2m - k - 1$$

$$(h/\ell \ll 1)$$



$$s \geq 1 - k$$



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

- Estimation asymptotique de l'erreur (norme H^s ; $0 \leq s \leq m$)

$$\| e^h \|_s \leq C_s h^{k+1-s} \| u^h \|_{k+1} \quad \text{si } s \geq 2m - k - 1$$

$$\| e^h \|_s \leq C_s h^{2(k+1-m)} \| u^h \|_{k+1} \quad \text{si } s \leq 2m - k - 1$$

$$(h/\ell \ll 1)$$

- Estimations asymptotiques pour un problème aux limites régulier ($r > k$) du second ordre ($m = 1$)

$$\| e^h \|_0 \leq C_0 h^{k+1} \quad (h/\ell \ll 1)$$

$$\| e^h \|_1 \leq C_1 h^k$$



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

- Comparaison d'un modèle quadratique avec un modèle linéaire

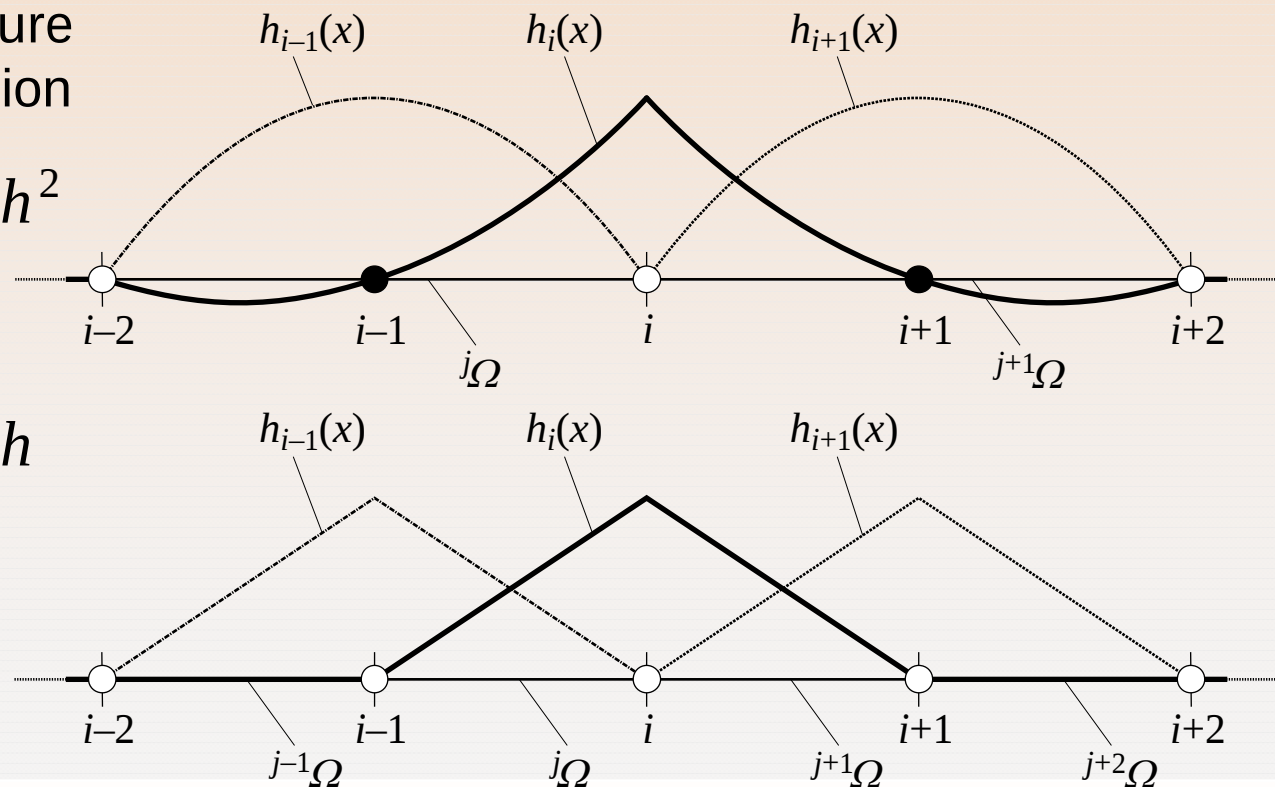


Meilleure
précision

$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h^2$$

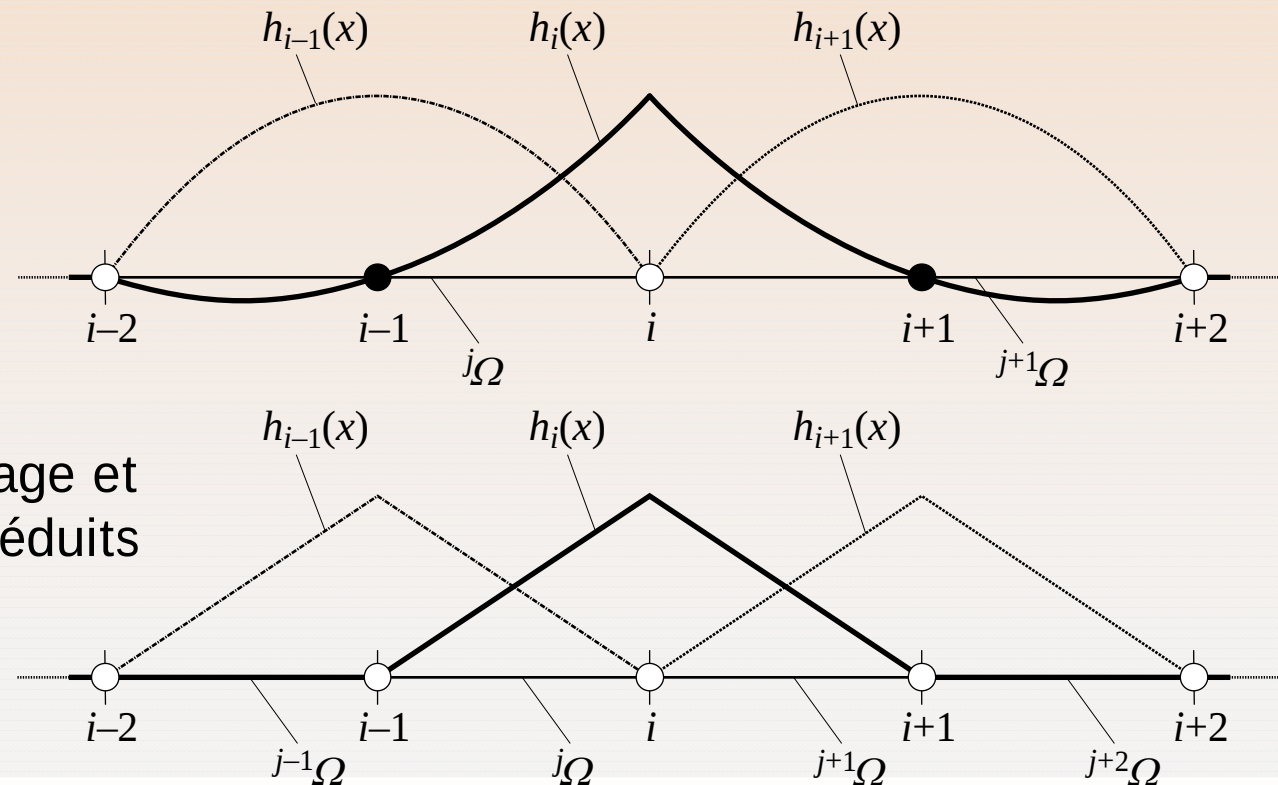


$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h$$



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

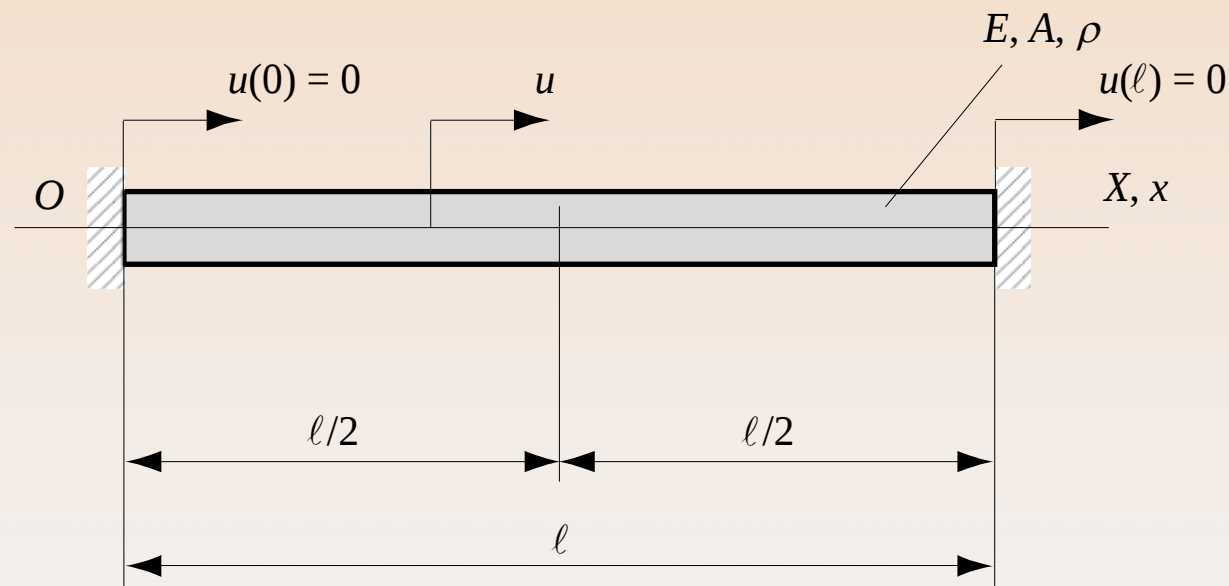
- Comparaison d'un modèle quadratique avec un modèle linéaire



Stockage et
coût réduits



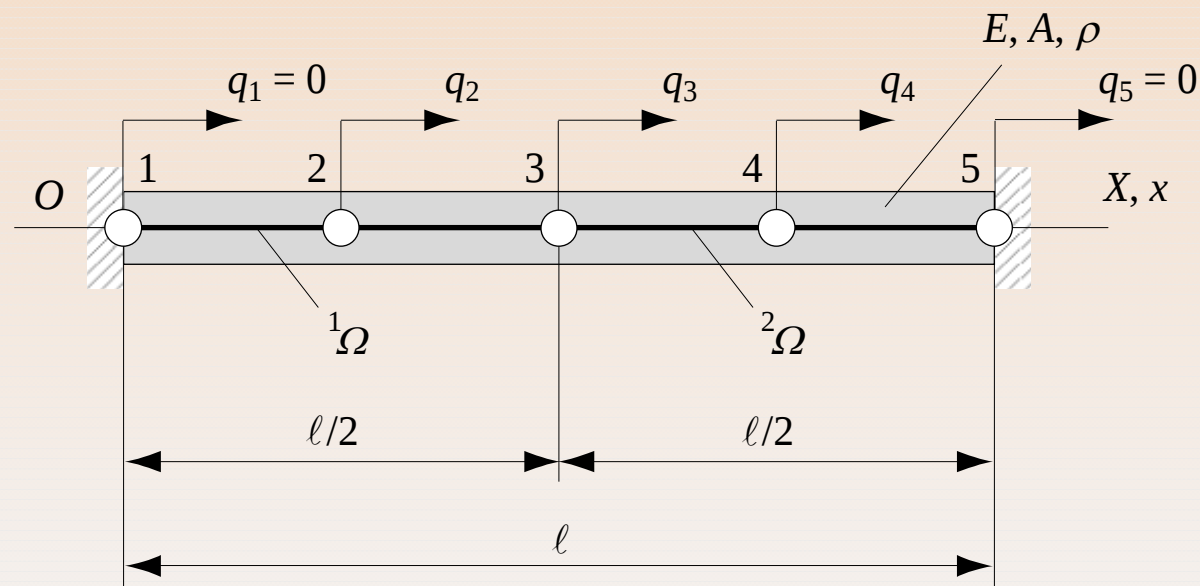
Exemple d'application des éléments finis quadratiques



Analyse modale d'une barre bi-encastée



Exemple d'application des éléments finis quadratiques



Analyse modale d'une barre bi-encastée et subdivisée en deux éléments finis quadratiques



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Équation différentielle de l'élastodynamique de la barre en régime libre

$$-EA (d^2u/dx^2) + \rho A \ddot{u} = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell$$

- Forme forte



Équation de d'Alembert
(mécanique vibratoire)

$$-EA (d^2u/dx^2) - \omega^2 \rho A u = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \quad \omega \text{ pulsation propre}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Équation différentielle de l'élastodynamique de la barre en régime libre

$$-EA (d^2u/dx^2) + \rho A \ddot{u} = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell$$

- Forme forte

$$-EA (d^2u/dx^2) - \omega^2 \rho A u = 0 \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \quad \omega \text{ pulsation propre}$$

- Forme intégrale

$$\int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + \omega^2 \rho A u] \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Intégration par parties

$$\int_0^\ell [EA (du/dx) (d\delta u/dx) - \omega^2 \rho A u \delta u] dx - \cancel{[EA (du/dx) \delta u]} \Big|_0^\ell = 0 \quad \forall \delta u$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow \delta u(0) = 0 \quad u(\ell) = 0 \Rightarrow \delta u(\ell) = 0$$

- Forme faible

$$\begin{aligned} u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx \\ = \omega^2 \int_0^\ell \rho A u \delta u dx \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

$$U = V = \{w(x) \mid w(x) \in H^1(]0, \ell[) ; w(0) = w(\ell) = 0\}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Forme faible discrète (réseau de 2 éléments finis et 5 nœuds)

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (q_1 = q_5 = 0)$$

$$\text{avec } \mathbf{K} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e \quad \text{Matrice de } \underline{\text{rigidité}}$$

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{A}^e \mathbf{M}^e \quad \text{Matrice de } \underline{\text{masse}}$$

$$\text{où } \mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} {}^e E^e A (d^e \mathbf{H}^T / dx) (d^e \mathbf{H} / dx) dx$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} {}^e \rho^e A {}^e \mathbf{H}^T {}^e \mathbf{H} dx$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Matrices élémentaires de rigidité et de masse (élément fini quadratique)



Premier et deuxième blocs de la matrice de rigidité de la barre généralisée

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{3{}^e\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$



Section eA



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Matrices élémentaires de rigidité et de masse (*suite*)

$${}^1\mathbf{K} = {}^2\mathbf{K} = \frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

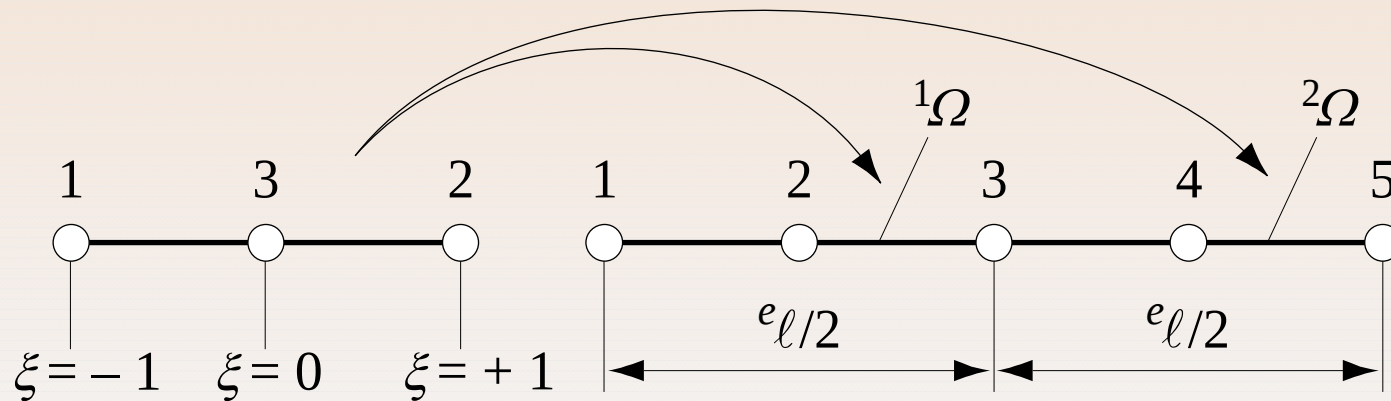
$${}^1\mathbf{M} = {}^2\mathbf{M} = \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Connectivité des éléments

$${}^1\Omega : (1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 2) \quad {}^2\Omega : (1, 2, 3) \rightarrow (3, 5, 4)$$



Numérotation locale $\Leftrightarrow$ numérotation globale



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Système d'équations linéaires

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7+7 \\ & -8 & 16 & -8 \\ & & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \right.$$



Inversion des 2^{èmes}
et 3^{èmes} lignes et
colonnes des
matrices
élémentaires

$$- \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4+4 & 2 & -1 \\ & 2 & 16 & 2 \\ & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Système d'équations linéaires

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7+7 & -8 & 1 \\ & -8 & 16 & -8 \\ & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \right.$$



Largeur
de bande

$$- \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4+4 & 2 & -1 \\ & 2 & 16 & 2 \\ & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Système d'équations linéaires

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7+7 & -8 \\ & -8 & 16 & -8 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \right)$$



Conditions aux
limites
essentielles

$$- \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4+4 & 2 & -1 \\ & 2 & 16 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Système d'équations final

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Équation caractéristique

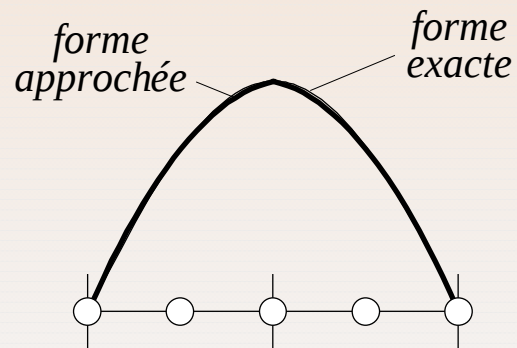
$$\left(\omega^2 - \frac{40E}{\rho \ell^2} \right) \left(\omega^4 - \frac{416E}{3\rho \ell^2} \omega^2 + \frac{1280E^2}{\rho^2 \ell^4} \right) = 0$$



Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Pulsations et formes propres de la barre

$$\omega_1 = 3.153 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 0.4\%)$$

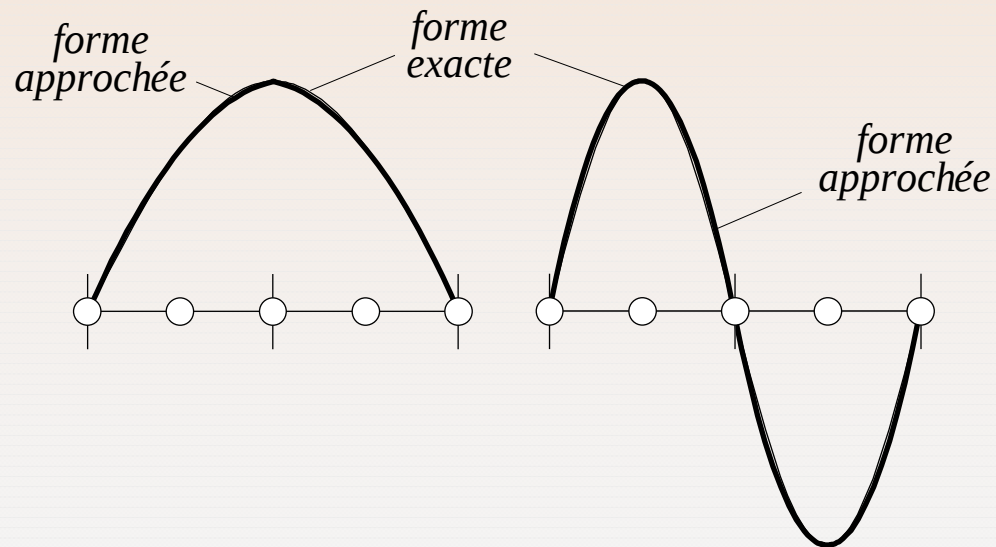


Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Pulsations et formes propres de la barre

$$\omega_1 = 3.153 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 0.4\%)$$

$$\omega_2 = 6.325 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 0.7\%)$$



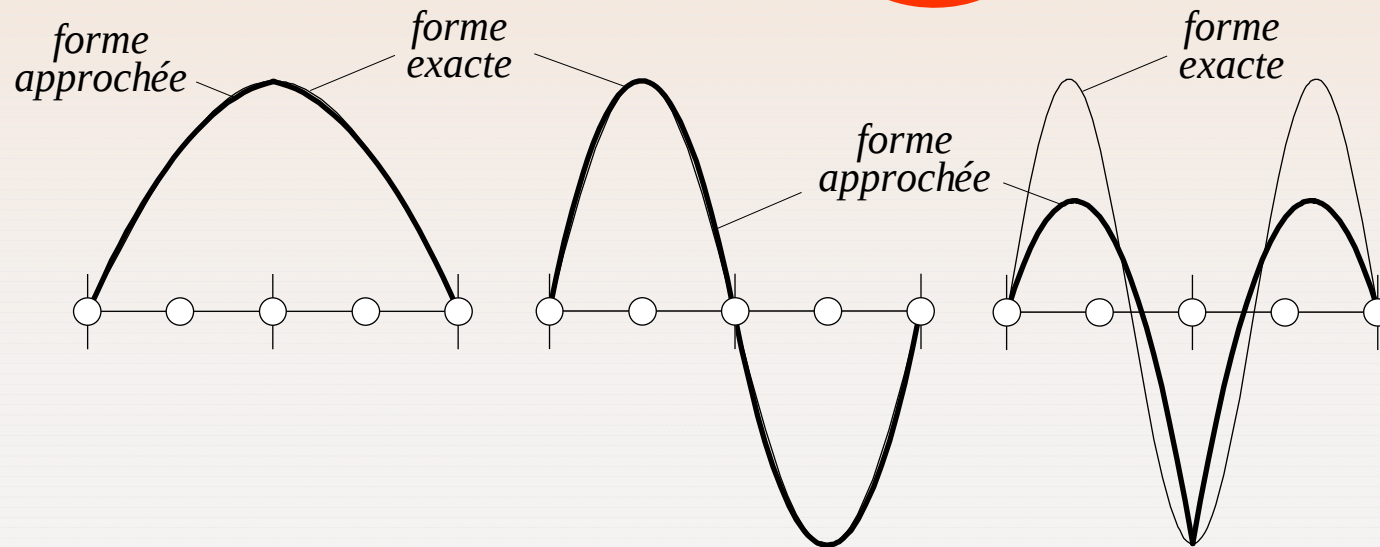
Exemple d'application des éléments finis quadratiques

- Pulsations et formes propres de la barre

$$\omega_1 = 3.153 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 0.4\%)$$

$$\omega_2 = 6.325 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 0.7\%)$$

$$\omega_3 = 11.35 (E/\rho \ell^2)^{1/2} \quad (\text{erreur : } 20.4\%)$$



Exemple d'application (Matlab) : analyse modale d'une barre

```
% ANALYSE MODALE D'UNE BARRE DISCRETISEE EN ELEMENTS  
QUADRATIQUES  
% Initialisation des variables  
close all  
clear all  
syms E A rho L xsi le je dxsidx h H B Ke Me K M  
syms Kr Mr C V D omega  
nelem=4;  
nnode=2*nelem+1;  
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées  
le=L/nelem;  
je=le/2;  
dxsidx=2/le;  
h(1)=xsi*(xsi-1)/2;  
h(2)=xsi*(xsi+1)/2;  
h(3)=1-xsi^2;  
H=[h(1),h(3),h(2)]
```



Exemple d'application (Matlab) : analyse modale d'une barre

```
B=diff(H,xsi)*dxsidx
% Calcul des matrices élémentaires
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
Me=int(rho*A*(transpose(H)*H)*je,xsi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
M(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
    ii=2*i-1
    for j=1:3
        for k=1:3
            K(ii+j-1,ii+k-1)=K(ii+j-1,ii+k-1)+Ke(j,k);
            M(ii+j-1,ii+k-1)=M(ii+j-1,ii+k-1)+Me(j,k);
        end
    end
end
K
M
```



Exemple d'application (Matlab) : analyse modale d'une barre

```
end
% Réduction du problème aux valeurs propres
Kr=K(2:nnode-1,2:nnode-1)
Mr=M(2:nnode-1,2:nnode-1)
% Application numérique
E=1
rho=1
L=1
A=1
% Résolution du problème aux valeurs propres
Kr=eval(Kr)
Mr=eval(Mr)
C=inv(Mr)*Kr
[V,D]=eig(C);
omega=sqrt(diag(D))
w=zeros(nnode,nnode-2);
```



Exemple d'application (Matlab) : analyse modale d'une barre

```
for i=1:nnode-2
    w(2:nnode-1,i)=V(1:nnode-2,i);
end
y=[0:1/(2*nelem):1];
plot(y,real(w))
xlabel('x/L');
ylabel('Forme propre [-]');
```

moodle.epfl.ch : [modal.m](https://moodle.epfl.ch/modal.m) $\Rightarrow$ \MATLAB\work

