

Méthode des éléments finis

Généralisation de la forme faible aux problèmes unidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Formulation faible approchée

- Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel

$$u \approx u^h \in U^h \subset U$$

$$\delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell [EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) + \rho u^h \delta u^h] dx \\ + r u^h(\ell) \delta u^h(\ell) \\ = \int_0^\ell q \delta u^h dx + Q \delta u^h(x_3) + P \delta u^h(\ell) \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

Méthode de Galerkin

- Approximation de Galerkin

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \boldsymbol{\alpha}$$

$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \delta \boldsymbol{\alpha}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n]$ matrice $(1 \times n)$ des fonctions de forme
 $h_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ fonctions de forme linéairement indépendantes

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}^T$ vecteur $(n \times 1)$ des inconnues

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx \quad \text{matrice de rigidité} \\ + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$= \int_0^\ell (EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}) dx \quad (\mathbf{B} = d\mathbf{H}/dx) \\ + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$+ r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$= \int_0^\ell (EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}) dx \quad (\mathbf{B} = d\mathbf{H}/dx)$$

$$+ r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$



Termes
nouveaux

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$+ r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$= \int_0^\ell (EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}) dx \quad (\mathbf{B} = d\mathbf{H}/dx)$$

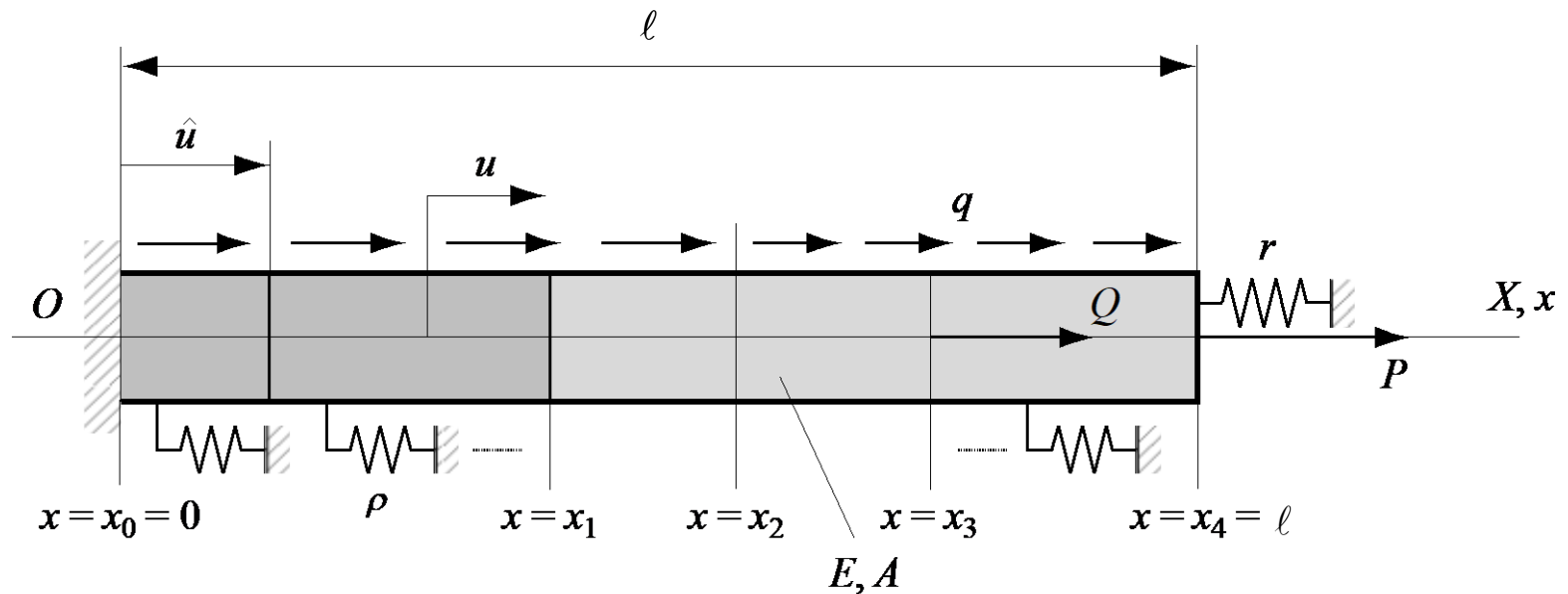
$$+ r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$



Termes dits correctifs

Méthode des éléments finis

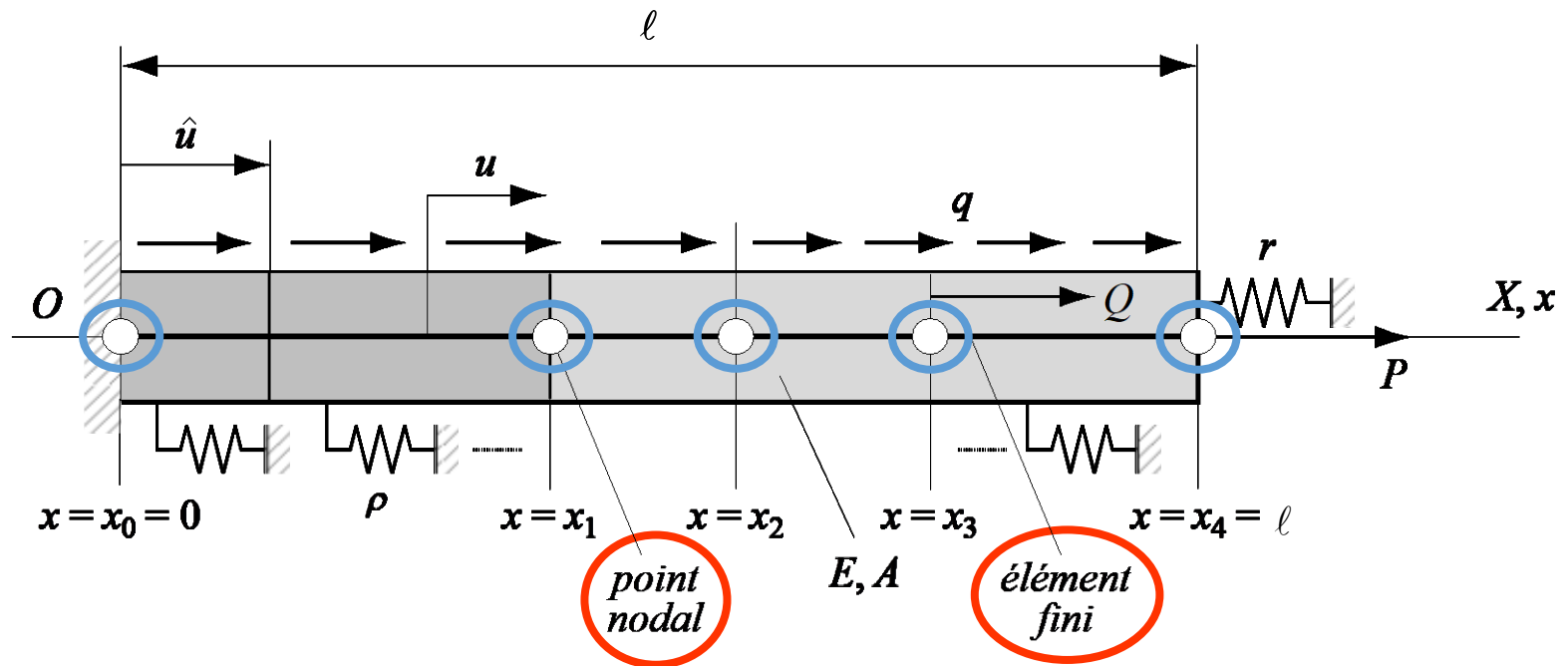


Critère de
différentiabilité



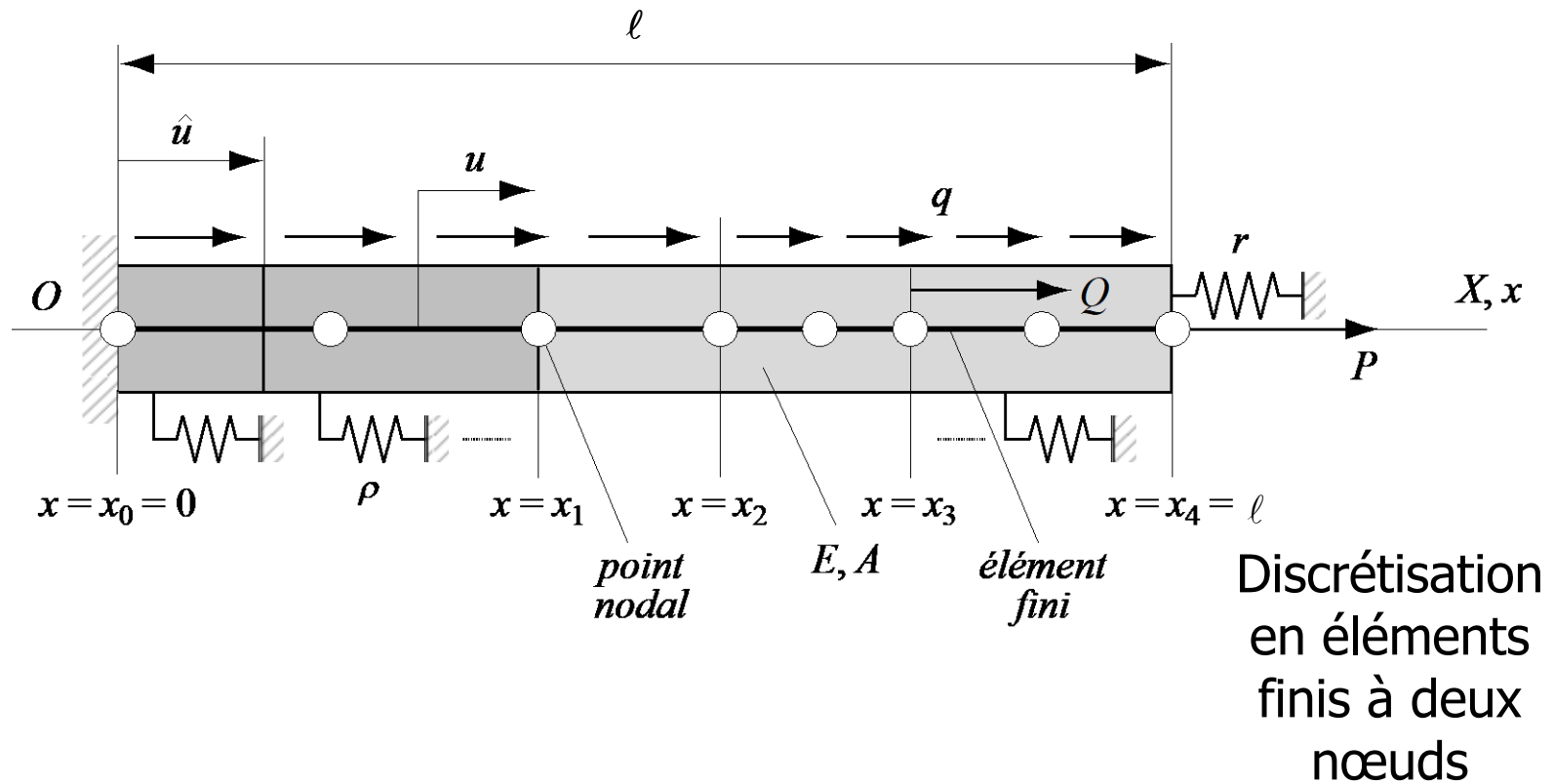
Points nodaux aux
discontinuités

Méthode des éléments finis



Points nodaux aux
discontinuités

Méthode des éléments finis



Méthode des éléments finis

- Approximation des déplacements par éléments finis :
association d'une fonction de forme à chacun des nœuds

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x) \mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x) = \mathbf{H}(x) \delta \mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$$

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales



Fonctions $h_i(x)$ à support compact

Méthode des éléments finis

- Approximation des déplacements par éléments finis :
association d'une fonction de forme à chacun des nœuds

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x) \mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x) = \mathbf{H}(x) \delta \mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$$

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_p\}^T$$

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_p\}^T$$

vecteurs $(p \times 1)$ des
déplacements nodaux
réel et virtuel



Critères de convergence à satisfaire par les fonctions $h_i(x)$

Méthode des éléments finis

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

matrice
de rigidité

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

vecteur des
forces
appliquées

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0) \mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u}$$

déplacement
nodal imposé



$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

Méthode des éléments finis

- Forme faible discrète (analogue à celle dérivée de la méthode de Galerkin)
- $$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

vecteur des forces appliquées

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0) \mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u}$$

déplacement nodal imposé



Fonctions à support compact dans la matrice $\mathbf{H}$

Méthode des éléments finis

- Forme faible discrète (analogue à celle dérivée de la méthode de Galerkin)
 $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = \hat{q})$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H}] dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

Termes correctifs $+ r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0) \mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u} \quad \text{déplacement nodal imposé}$$



Fonctions à support compact dans la matrice $\mathbf{H}$

Méthode des éléments finis

- Approche locale de la formulation (m éléments à ep nœuds)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

Matrice élémentaire
($^ep \times ^ep$) de rigidité

$$^e\mathbf{K} = \int_{^e\Omega} [^eE^e A (d^e\mathbf{H}^T/dx) (d^e\mathbf{H}/dx) + ^e\rho ^e\mathbf{H}^T ^e\mathbf{H}] dx$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e + \mathbf{H}^T(x_3) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

Matrice des
fonctions de base

$$^e\mathbf{r} = \int_{^e\Omega} ^e\mathbf{H}^T ^eq dx$$

Vecteur élémentaire ($^ep \times 1$)
des forces externes

Méthode des éléments finis

- Approche locale de la formulation (m éléments à ep nœuds)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e + \mathbf{r} \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

Matrice élémentaire
($^ep \times ^ep$) de rigidité

$$\mathbf{K}^e = \int_{^e\Omega} [^eE^e A (d^e\mathbf{H}^T/dx) (d^e\mathbf{H}/dx) + ^e\rho ^e\mathbf{H}^T ^e\mathbf{H}] dx$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e + \mathbf{H}^T(x_3) \mathbf{Q} + \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{P}$$

Matrice des
fonctions de base

$$\mathbf{r}^e = \int_{^e\Omega} ^e\mathbf{H}^T ^eq dx$$

Vecteur élémentaire ($^ep \times 1$)
des forces externes



Contributions locales (fonctions à support compact dans $\mathbf{H}$)

Méthode des éléments finis

- Résolution du système d'équations



Pas d'élimination
de colonne

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \dots \\
 p
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc}
 k_{11} & k_{12} & \\
 k_{21} & k_{22} & k_{23} \\
 & k_{32} & k_{33} \\
 & & \ddots \\
 & & &
 \end{array} \right]
 \begin{Bmatrix}
 q_1 \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 \dots \\
 q_p
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 \dots \\
 r_p
 \end{Bmatrix}$$

$\delta q_1 = 0$

$q_1 = \hat{q}$



Condition aux limites essentielle en $x = 0 \Rightarrow \delta q_1 = 0$

Méthode des éléments finis

- Système d'équations réduit

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 3 \\
 \dots \\
 p
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc}
 k_{21} & k_{22} & k_{23} \\
 & k_{32} & k_{33} \\
 & & \ddots \\
 & & & \ddots
 \end{array} \right]
 \begin{Bmatrix}
 \hat{q} \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 \dots \\
 q_p
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 r_2 - k_{21} \cdot \hat{q} \\
 r_3 \\
 \dots \\
 r_p
 \end{Bmatrix}$$

Méthode des éléments finis

- Système d'équations réduit

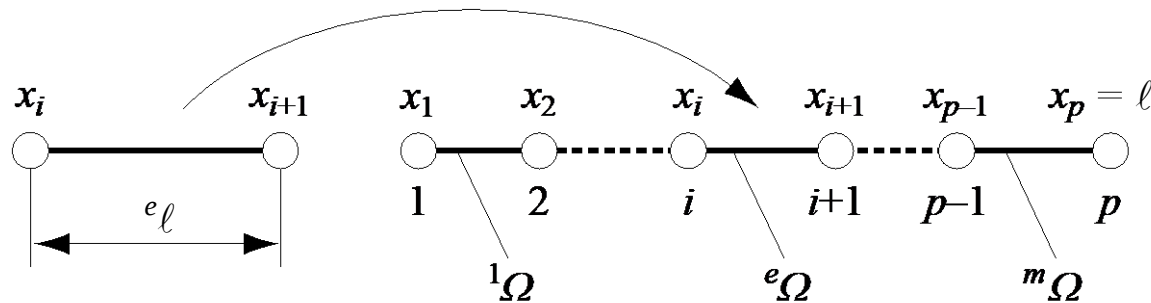
$$\begin{bmatrix} \begin{array}{cc|c} k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} & \\ \vdots & & \end{array} & \begin{array}{c} \hat{q} \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} r_2 - k_{21} \cdot \hat{q} \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{array} \end{bmatrix} =$$



Condensation de la matrice de rigidité

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Élément fini générique à deux points nodaux



- Transformation de coordonnées

$$\xi = \frac{1}{e_l} (2x - x_i - x_{i+1})$$

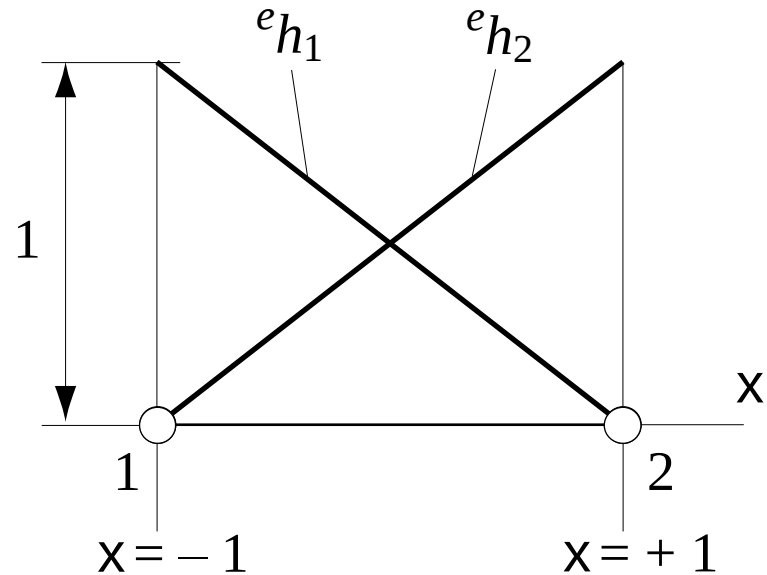
ξ coordonnée naturelle
 e_l longueur de l'élément

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Fonctions de base linéaires de l'élément

$${}^e h_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$${}^e h_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$



Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice élémentaire de rigidité
 - Composantes de la matrice de rigidité des éléments linéaires

$${}^e k_{ij} = \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_i / dx) (d^e h_j / dx) + {}^e \rho {}^e h_i {}^e h_j] dx$$

- Calcul des composantes de la matrice

$${}^e k_{11} = \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_1 / dx)^2 + {}^e \rho {}^e h_1^2] dx$$

$$= \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_1 / d\xi)^2 (d\xi/dx)^2 + {}^e \rho {}^e h_1^2] dx$$

$$d\xi/dx = 2/{}^e \ell$$

$$dx = ({}^e \ell / 2) d\xi$$

Dérivée de la
transformation de
coordonnées

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Calcul des composantes de la matrice (*suite*)

$$\begin{aligned} {}^e k_{11} &= \int_{-1}^{+1} \left[{}^e E {}^e A \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{\ell} \right)^2 + \frac{{}^e \rho}{4} (1 - \xi)^2 \right] \frac{\ell}{2} d\xi \\ &= {}^e E {}^e A / \ell + {}^e \rho \ell / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^e k_{12} &= {}^e k_{21} = \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_1 / dx) (d^e h_2 / dx) \\ &\quad + {}^e \rho {}^e h_1 {}^e h_2] dx \\ &= -{}^e E {}^e A / \ell + {}^e \rho \ell / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^e k_{22} &= \int_{{}^e \Omega} [{}^e E {}^e A (d^e h_2 / dx)^2 + {}^e \rho {}^e h_2^2] dx \\ &= {}^e E {}^e A / \ell + {}^e \rho \ell / 3 \end{aligned}$$

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
indépendante de la
position de l'élément



Matrice définie
strictement positive



Paramètres de la matrice :
matériau (eE , ${}^e\rho$) et
géométrie (eA , ${}^e\ell$)

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
indépendante de la
position de l'élément



Matrice définie
strictement positive



Paramètres de la matrice :
matériau (eE , ${}^e\rho$) et
géométrie (eA , ${}^e\ell$)



Analogie avec une
matrice de masse

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + {}^e\kappa \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
indépendante de la
position de l'élément



Matrice définie
strictement positive



Paramètres de la matrice :
matériau (eE , ${}^e\rho$) et
géométrie (eA , ${}^e\ell$)



Analogie avec une
matrice de masse



Formulation complète
de la matrice

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + {}^e\kappa \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
indépendante de la
position de l'élément



Matrice définie
strictement positive



Paramètres de la matrice :
matériau (eE , ${}^e\rho$) et
géométrie (eA , ${}^e\ell$)



Analogie avec une
matrice de masse

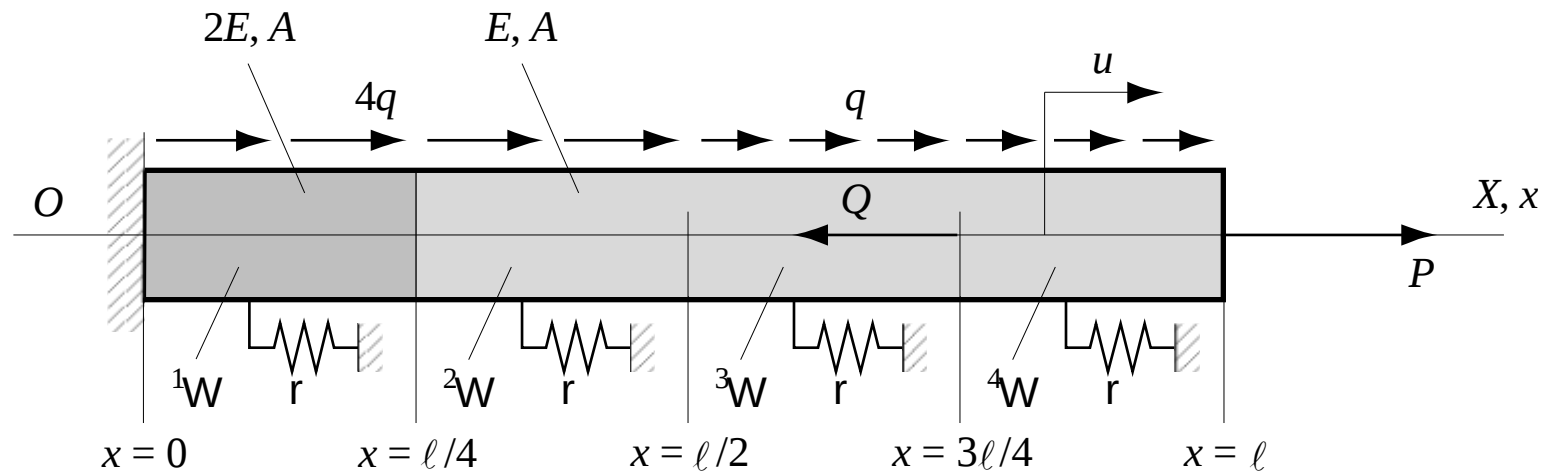


Perte de symétrie



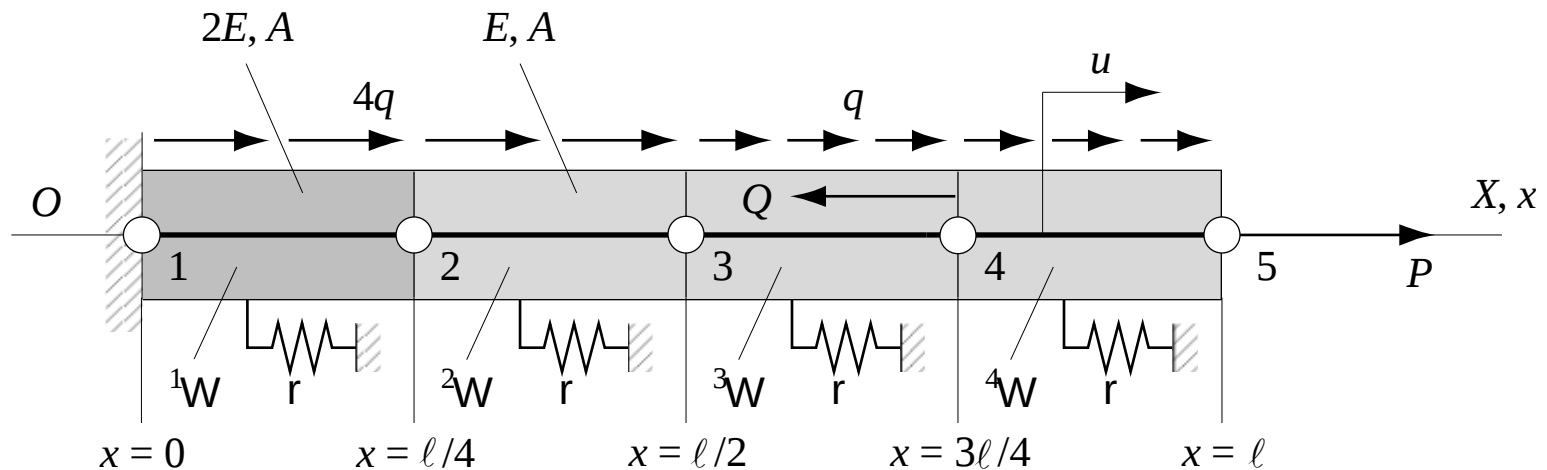
Formulation complète
de la matrice

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à des discontinuités

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à des discontinuités
et subdivisée en quatre éléments finis identiques

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Équation différentielle

$$-E^*A (d^2u/dx^2) + \rho u = q^*$$

$$\text{dans } I_i =](i-1)\ell/4, i\ell/4[\quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

avec

$$E^* = 2E \quad 0 \leq x \leq \ell/4$$

$$E^* = E \quad \ell/4 \leq x \leq \ell$$

$$q^* = 4q \quad 0 \leq x \leq \ell/2$$

$$q^* = q \quad \ell/2 \leq x \leq \ell$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Conditions aux limites

$$u(0) = 0 \quad \text{condition essentielle homogène}$$

$$EA \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=\ell} = P \quad \text{condition naturelle pure}$$

- Équations de continuité en flux (contrainte)

$$\lim_{x \rightarrow \ell/4^+} E \left[\frac{du(x)}{dx} \right] - \lim_{x \rightarrow \ell/4^-} 2E \left[\frac{du(x)}{dx} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \ell/2^+} E \left[\frac{du(x)}{dx} \right] - \lim_{x \rightarrow \ell/2^-} E \left[\frac{du(x)}{dx} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3\ell/4^+} EA \left[\frac{du(x)}{dx} \right] - \lim_{x \rightarrow 3\ell/4^-} EA \left[\frac{du(x)}{dx} \right] = Q$$



Signe

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) + \rho u^h \delta u^h] dx \\ = \int_0^\ell q^* \delta u^h dx - Q \delta u^h(3\ell/4) + P \delta u^h(\ell) \end{aligned}$$



Condition de bord
naturelle pure

$$\forall \delta u^h \in V^h \subset V$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) + \rho u^h \delta u^h] dx \\ = \int_0^\ell q^* \delta u^h dx - Q \delta u^h(3\ell/4) + P \delta u^h(\ell) \end{aligned}$$



Force Q négative

$$\forall \delta u^h \in V^h \subset V$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) + \rho u^h \delta u^h] dx \\ = \int_0^\ell q^* \delta u^h dx - Q \delta u^h(3\ell/4) + P \delta u^h(\ell) \\ \forall \delta u^h \in V^h \subset V \end{aligned}$$

avec

$$U = V = \{w(x) \mid w(x) \in H^1(]0, \ell[), w(0) = 0\}$$



Condition de bord essentielle homogène

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_1 = 0)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{K}$$

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} [{}^eE {}^eA (d{}^e\mathbf{H}^T/dx) (d{}^e\mathbf{H}/dx) + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H}] dx$$

Matrice élémentaire
(2×2) de rigidité

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{r} - \mathbf{H}^T(3\ell/4) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^eq dx$$

Vecteur élémentaire (2×1)
des forces externes

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrices élémentaires de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^1\mathbf{K} = \frac{8EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{K} = {}^3\mathbf{K} = {}^4\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -2 & 2+1 & -1 & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho \ell}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2+2 & 1 & & \\ & 1 & 2+2 & 1 & \\ & & 1 & 2+2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assemblage de la matrice globale de rigidité

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho \ell}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteurs élémentaires des forces externes

$${}^e\mathbf{r} = \frac{{}^eq^e\ell}{2} \{1, 1\}^T$$



Concentration de la charge répartie aux nœuds

$$\Rightarrow {}_1\mathbf{r} = {}_2\mathbf{r} = \frac{q\ell}{2} \{1, 1\}^T$$

$${}_3\mathbf{r} = {}_4\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{1, 1\}^T$$

- Assemblage du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{4, 4+4, 4+1, 1+1, 1\}^T$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{4, 8, 5, 2, 1\}^T$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r} - \mathbf{H}^T(3\ell/4) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{4, 8, 5, 2, 1\}^T$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r} - \mathbf{H}^T(3\ell/4) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8} \{4, 8, 5, 2, 1\}^T$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^e \mathbf{r} - \mathbf{H}^T(3\ell/4) Q + \mathbf{H}^T(\ell) P$$

$$\Rightarrow r_4 = \frac{q\ell}{4} - Q$$

$$r_5 = \frac{q\ell}{8} + P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations linéaires

$$\left(\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} \text{---} 2 \text{---} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho \ell}{24} \begin{bmatrix} \text{---} 2 \text{---} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$

$\delta q_1 = 0$

$q_1 = 0$

$$= \frac{q\ell}{8} \{ \text{---} 4 \text{---}, 8, 5, 2, 1 \}^T + \{ \text{---} 0 \text{---}, 0, 0, -Q, P \}^T$$



Prise en compte de l'encastrement au nœud 1

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations réduit

$$\left(\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho \ell}{24} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$



Pas de solution analytique simple

⇒ Choix de données numériques

$$= \frac{q\ell}{8} \begin{Bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q \\ P \end{Bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

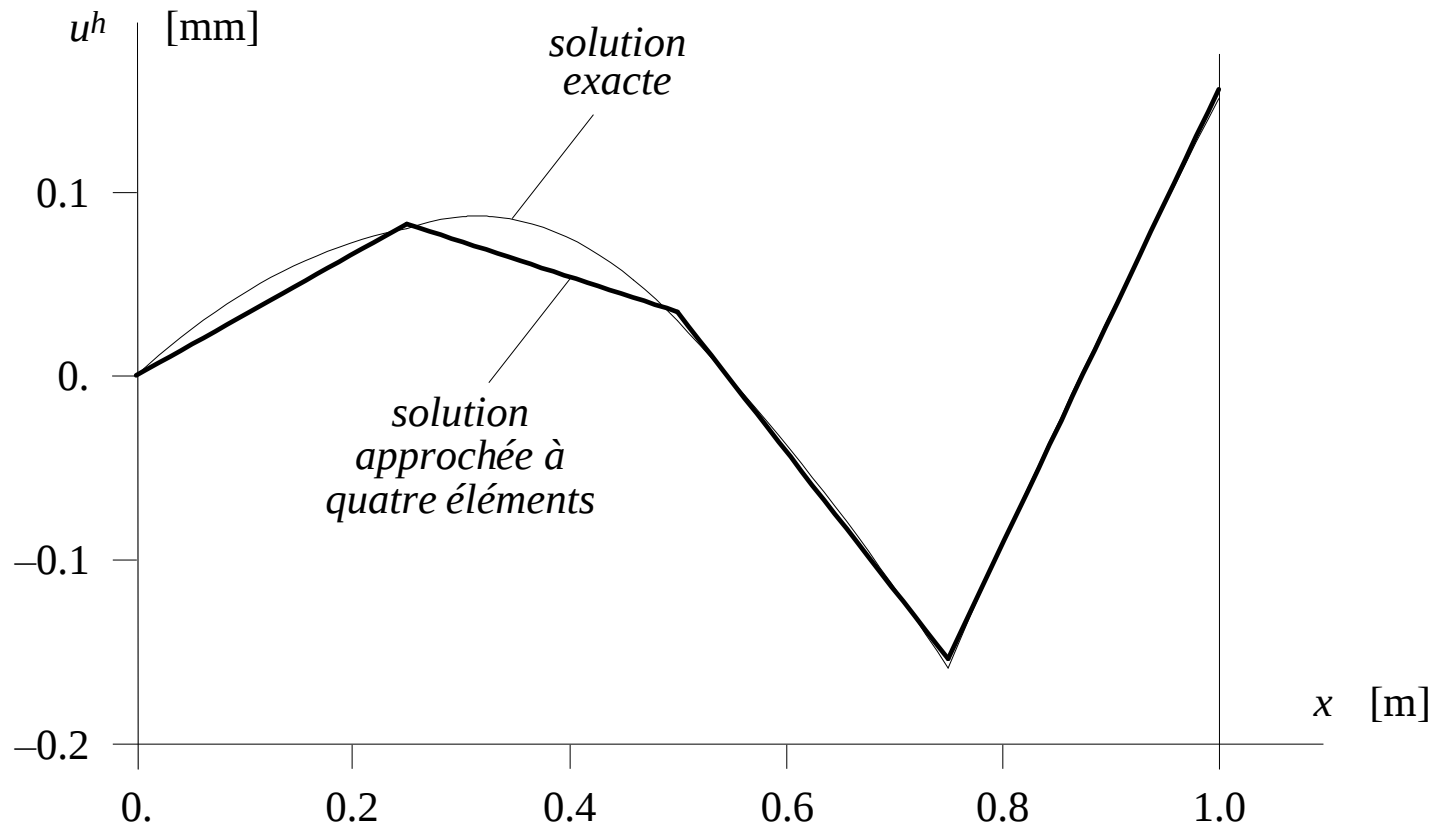
- Application numérique

- Longueur $\ell = 1 \text{ m}$
- Section $A = 100 \text{ mm}^2$
- Module d'élasticité $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- Coefficient de charge $\rho = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$
- Charge linéique $q = 20 \text{ kN/m}$
- Force ponctuelle interne $Q = 50 \text{ kN}$
- Force à l'extrémité libre $P = 25 \text{ kN}$



Unités

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires

- Solutions nodales précises, mais différentes des valeurs exactes



Perte de la superconvergence en raison du terme ρu

- Condition aux limites naturelle approchée en $x = \ell$

- Discontinuité de la déformation (pente) du/dx en $x = \ell/4$



Discontinuité du module E (continuité de la contrainte)

- Continuité de la déformation (pente) du/dx en $x = \ell/2$



Discontinuité de la charge q n'affectant pas la pente

- Discontinuité de la déformation (pente) du/dx en $x = 3\ell/4$



Présence de la force ponctuelle Q

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% ALLONGEMENT D'UNE BARRE SOUMISE A DES DISCONTINUITES
% Initialisation des variables
close all
clear all
syms E A L xsi le je dxsidx h H B p Q P rho Ke Me K re r
syms Kr rr q
nelem=4;
nnode=nelem+1;
% Test
t=idivide(int32(nelem),int32(4));
if 4*t~=nelem
    warning('nelem non multiple de 4')
    break
end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées
le=L/nelem;
je=le/2;
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xxi)/2;
h(2)=(1+xxi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xxi)*dxsidx;
% Calcul des matrices élémentaires de rigidité
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xxi,-1,1)
Me=int(rho*(transpose(H)*H)*je,xxi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:t
    for j=1:2
        for k=1:2
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```

                                K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)
                                                +2*Ke(j,k)+Me(j,k);
                                end
                                end
                                K
                                end
                                for i=t+1:nelem
                                    for j=1:2
                                        for k=1:2
                                            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)
                                                +Ke(j,k)+Me(j,k);
                                        end
                                    end
                                end
                                K
                                end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% Calcul des vecteurs élémentaire et global des
% charges externes
r(1:nnode)=0;
re=int(H*p*je,xsi,-1,1)
for i=1:nelem/2
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+4*re(j);
    end
    r
end
for i=nelem/2+1:nelem
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
    r
end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% Correction du vecteur global des charges externes
r(3*t+1)=r(3*t+1)-Q
r(nnode)=r(nnode)+P
% Réduction du système d'équations
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
% Application numérique
L=1
A=100*(10^(-6))
E=2.1*(10^11)
rho=1*(10^8)
p=20000
Q=50000
P=25000
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% Résolution du système d'équations
Kr=eval(Kr)
rr=eval(rr)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
w(1:nnode)=0;
for i=2:nnode
    w(i)=q(i-1);
end
y=[0:1/nelem:1];
plot(y,1000*w)
xlabel('x/L');
ylabel('u [mm]');
```

moodle.epfl.ch : [discont.m](#) $\Rightarrow$ \MATLAB\work