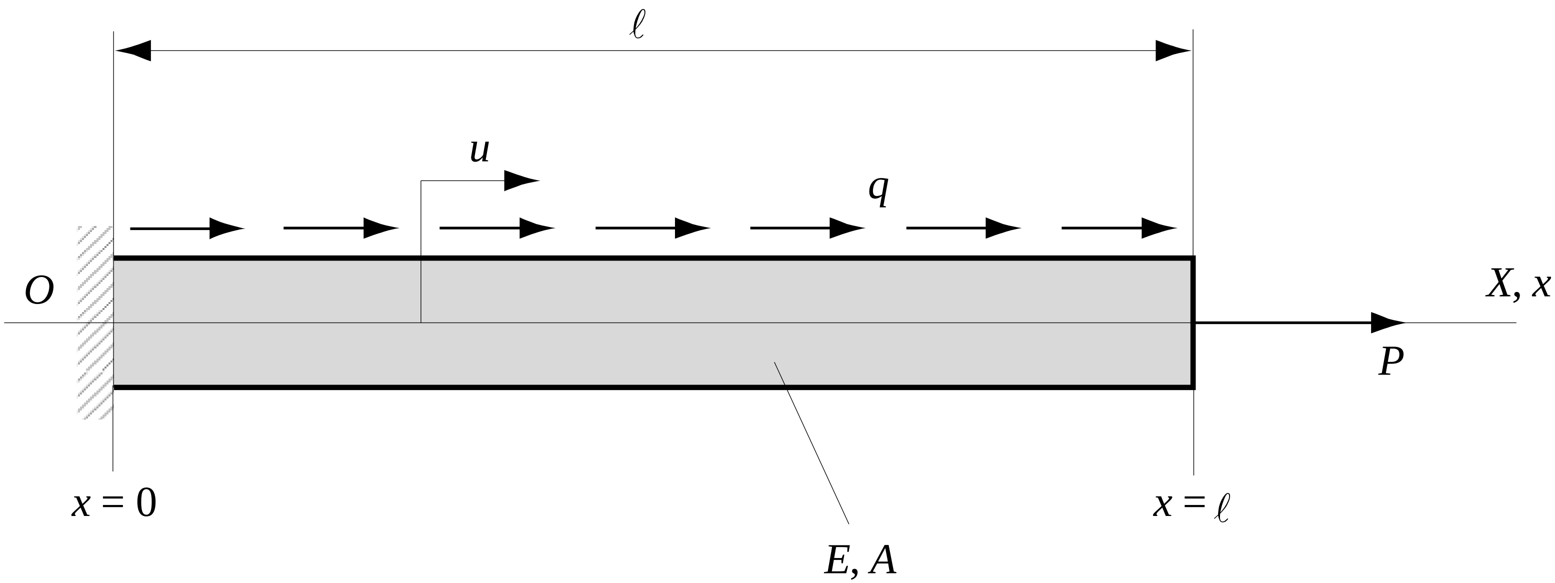
Méthode des éléments finis
Généralisation de la forme faible aux problèmes unidimensionnels

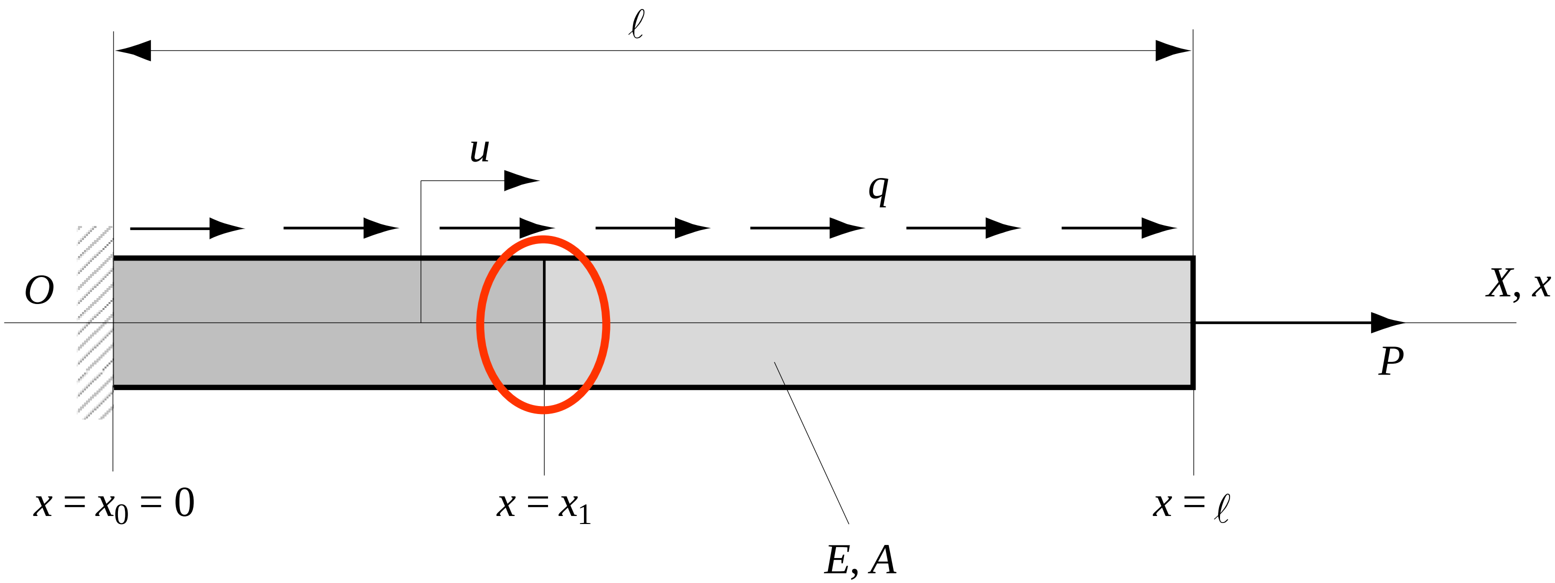
Prof. F. Gallaire

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



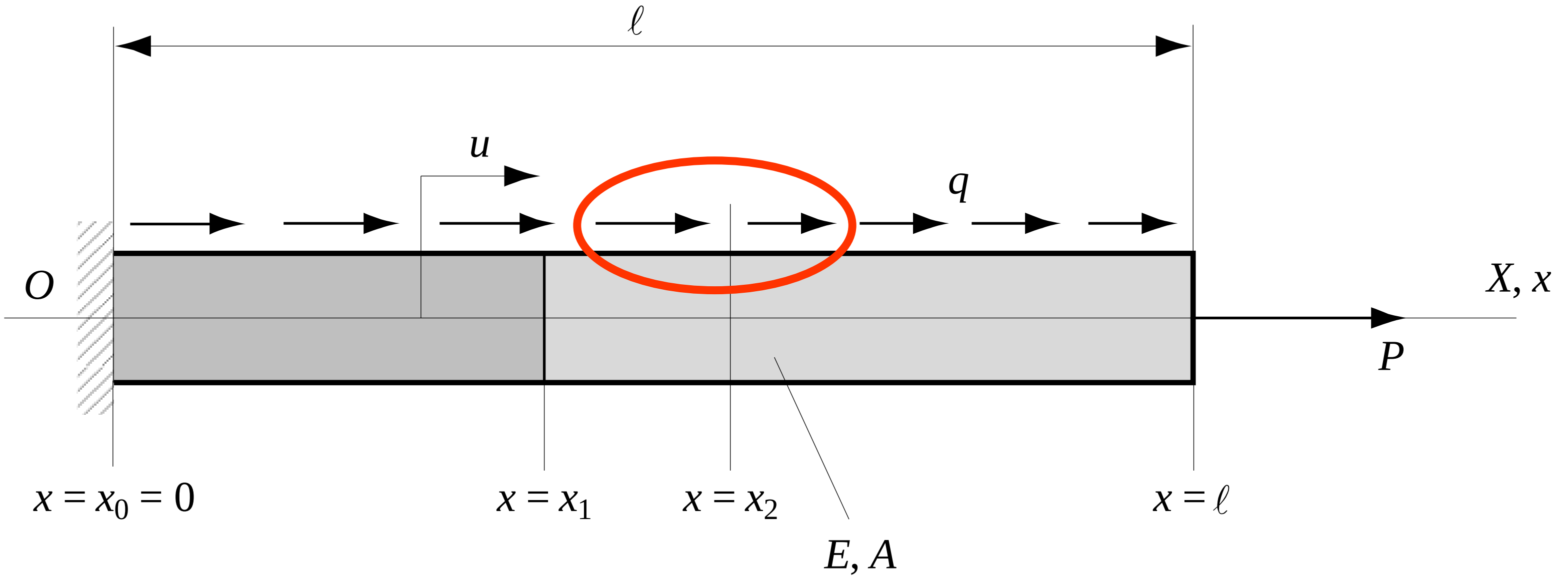
- Insertion de discontinuités

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



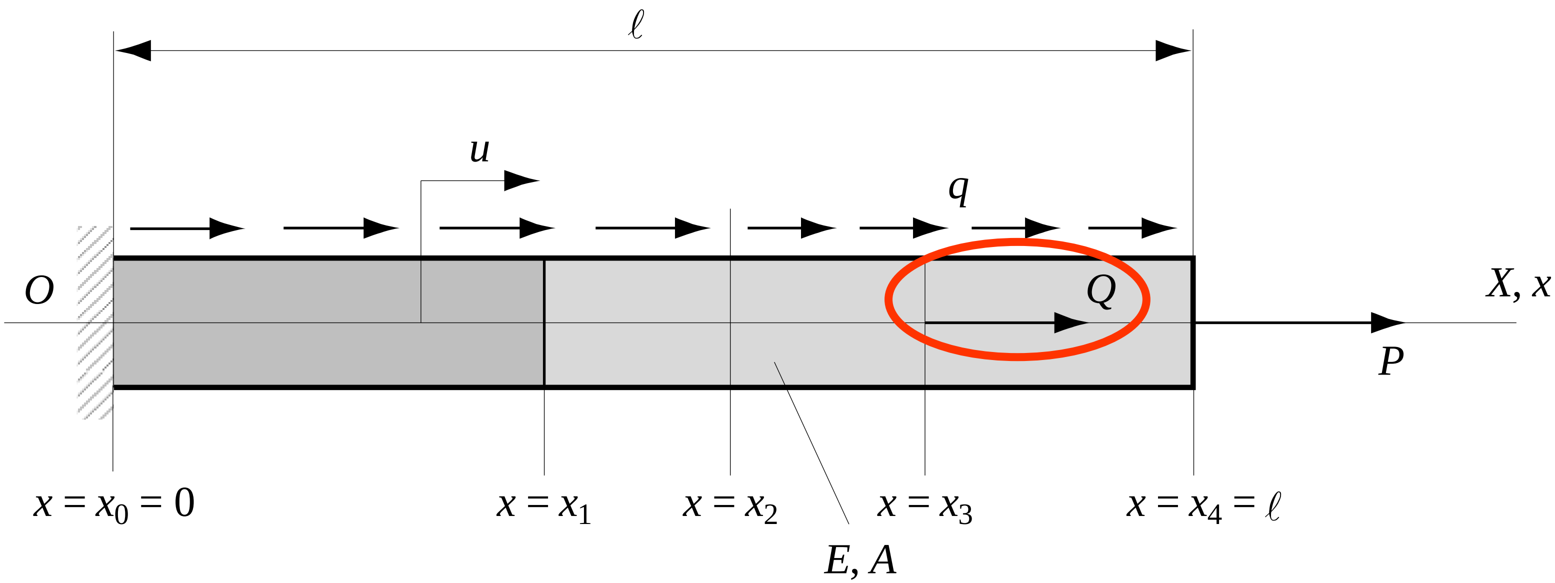
- Insertion de discontinuités
  - Discontinuité du module d'élasticité E en $x = x_1$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



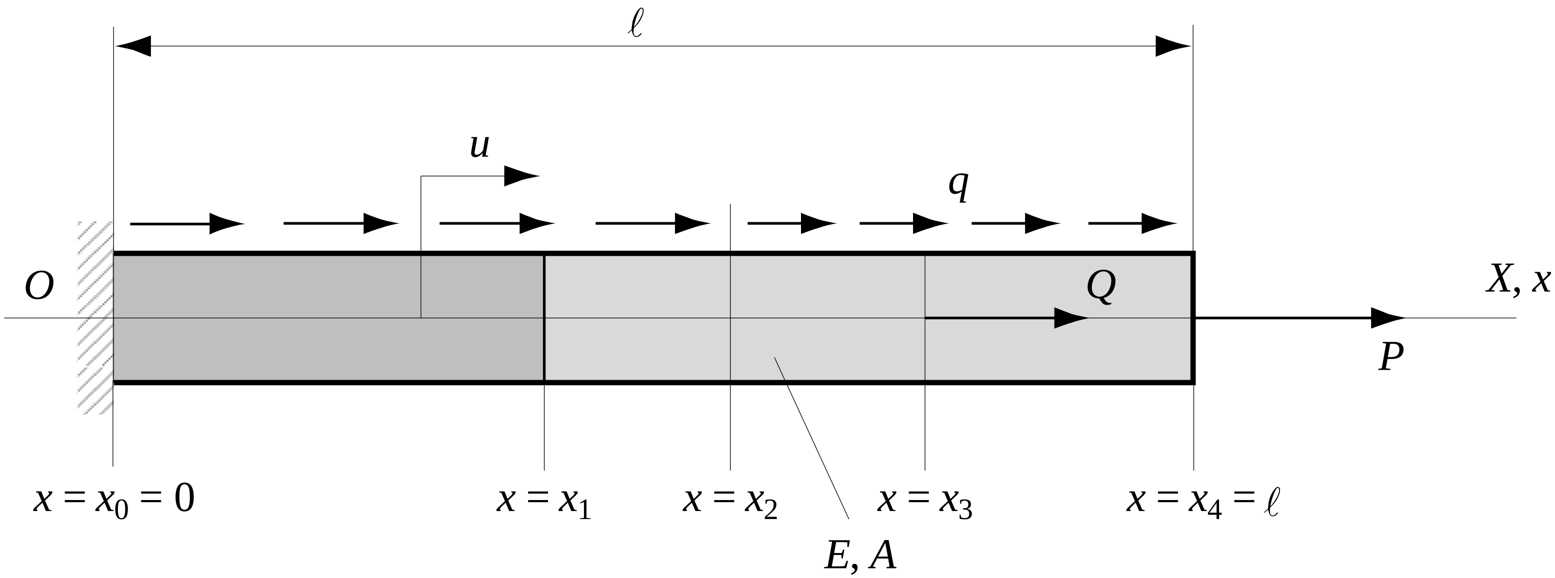
- Insertion de discontinuités
  - Discontinuité du module d'élasticité E en $x = x_1$
  - Discontinuité de la charge répartie q en $x = x_2$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



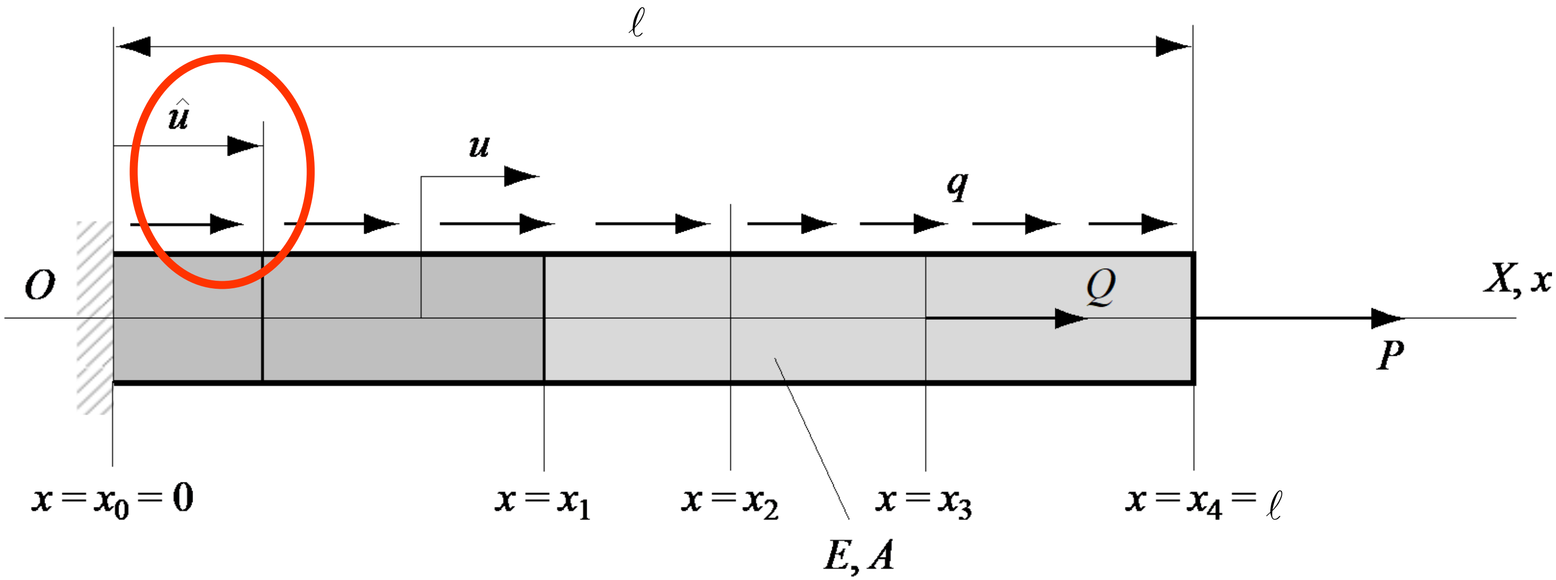
- Insertion de discontinuités
  - Discontinuité du module d'élasticité E en $x = x_1$
  - Discontinuité de la charge répartie q en $x = x_2$
  - Ajout d'une force ponctuelle Q en $x = x_3$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



- Modification des conditions aux limites

Généralisation du problème modèle de la barre en traction

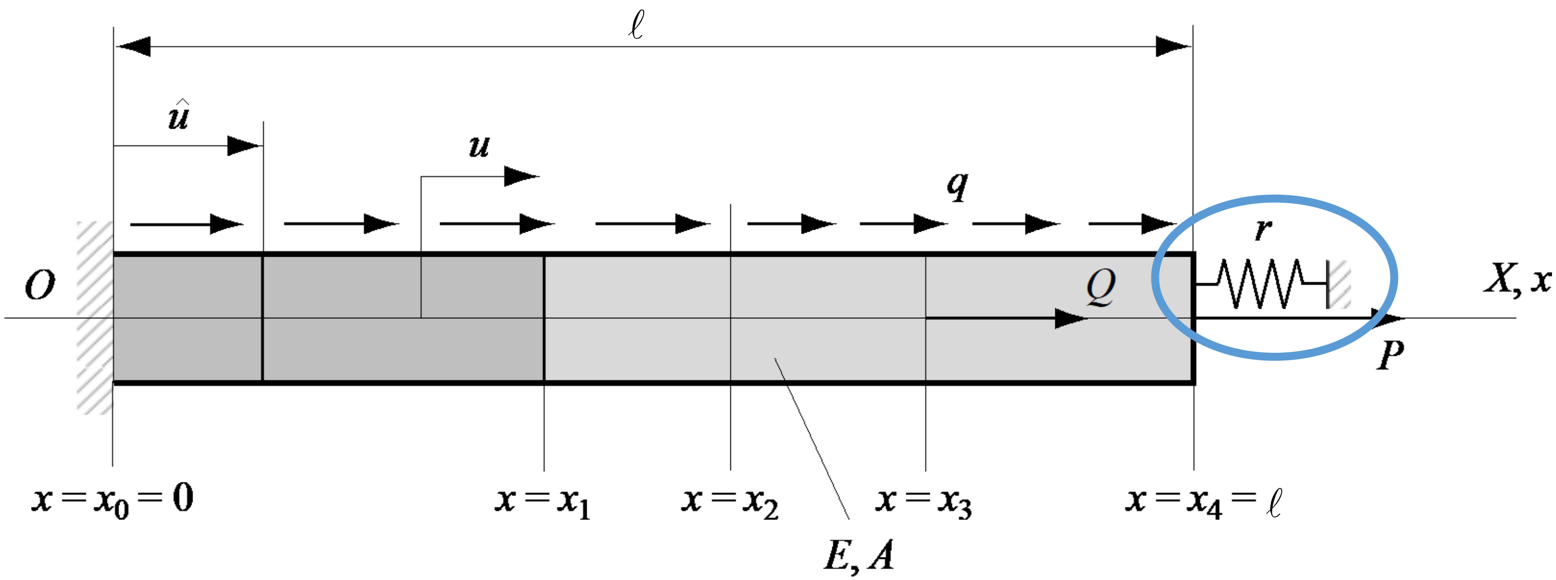


- Modification des conditions aux limites
  - Condition essentielle en $x = x_0 = 0$

$$u(0) = \hat{u}$$

Déplacement imposé $\hat{u}$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction

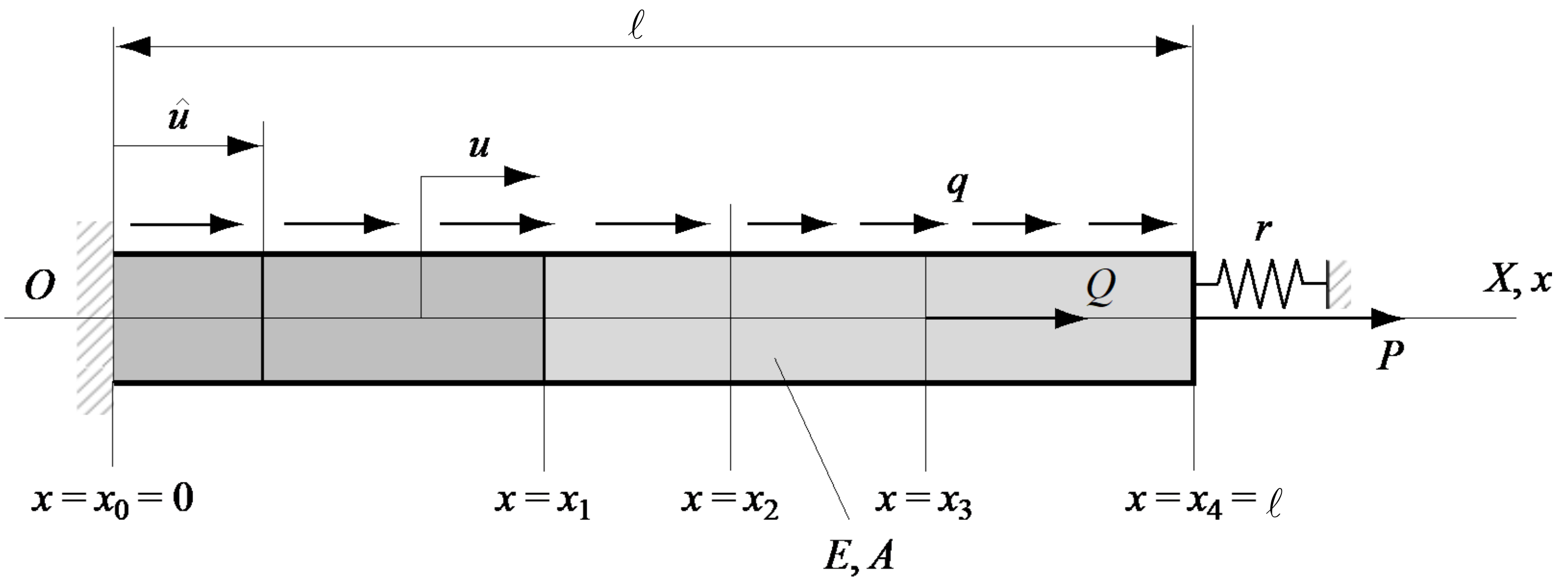


- Modification des conditions aux limites
  - Condition essentielle en $x = x_0 = 0$ $\quad u(0) = \hat{u}$
  - Condition naturelle en $x = x_4 = \ell$

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)|_{x=\ell} = -\,r\,u(\ell) + P$$

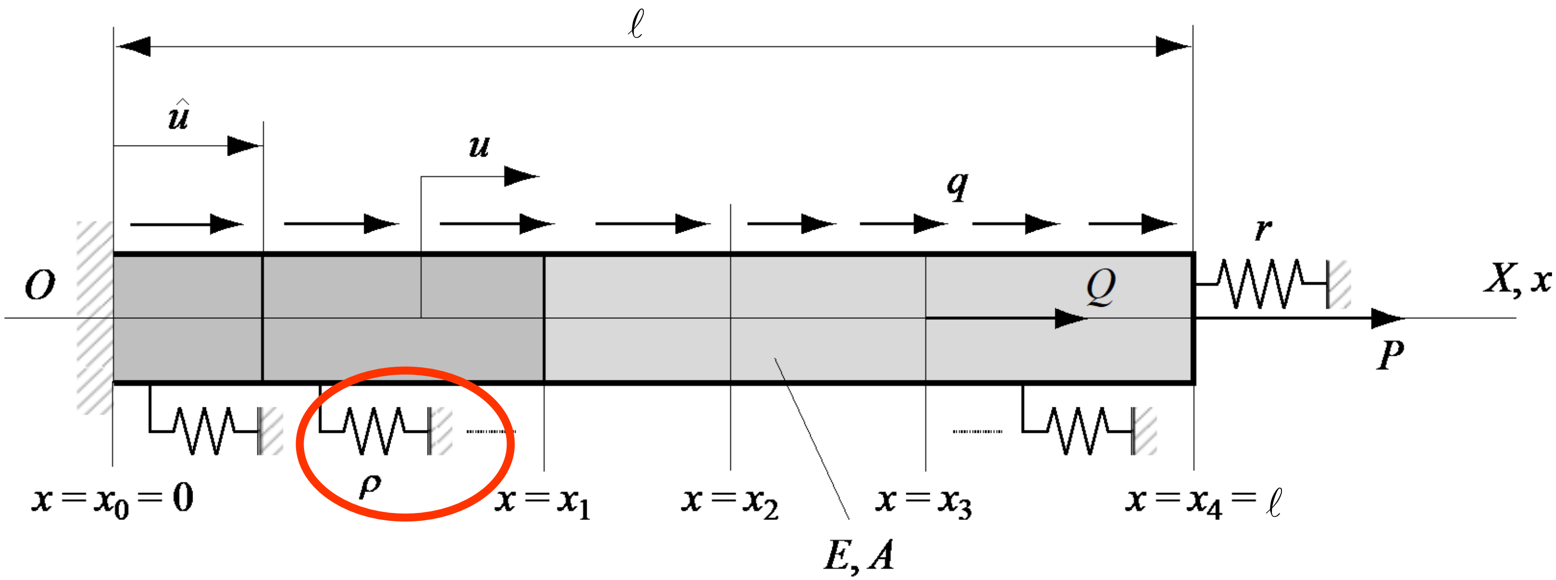
Charge proportionnelle au déplacement $u(\ell)$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



- Modification de l'équation différentielle

Généralisation du problème modèle de la barre en traction

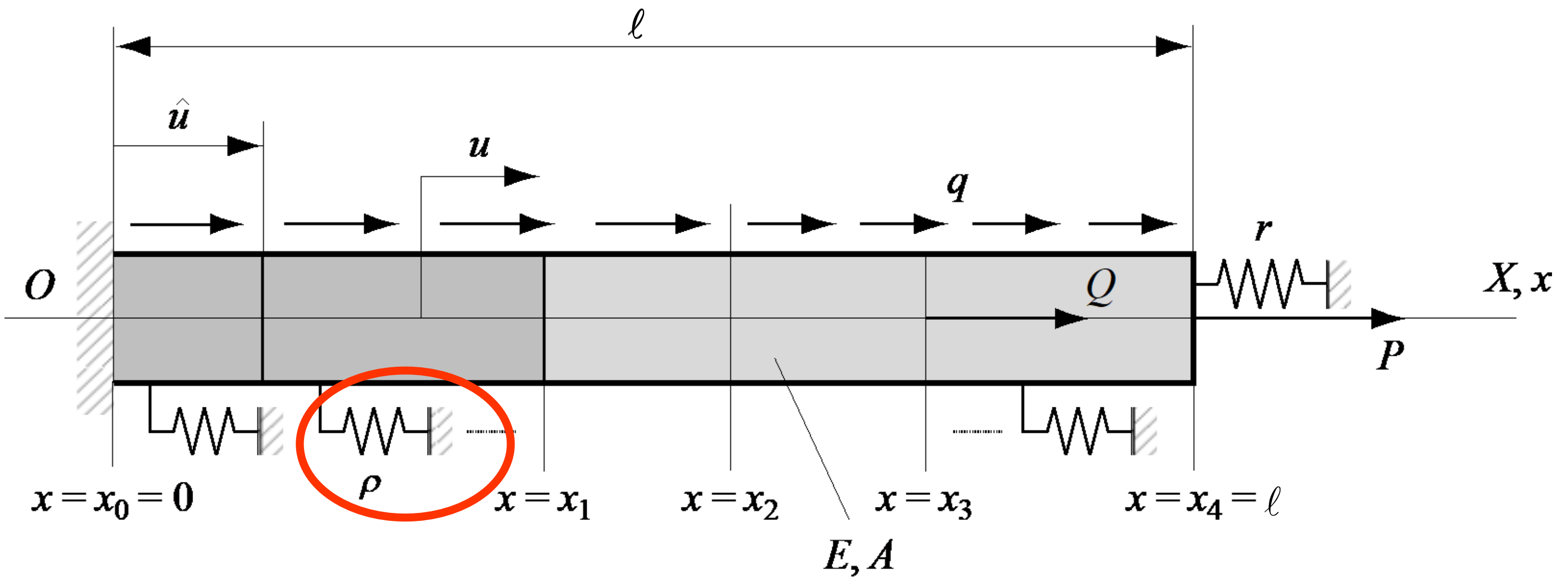


- Modification de l'équation différentielle : ajout d'une charge axiale ρu proportionnelle au déplacement axial u

$$-\,\mathrm{d}[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x \;+\; \underline{\rho\, u} \;=\; q$$

ρ facteur de proportionnalité

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



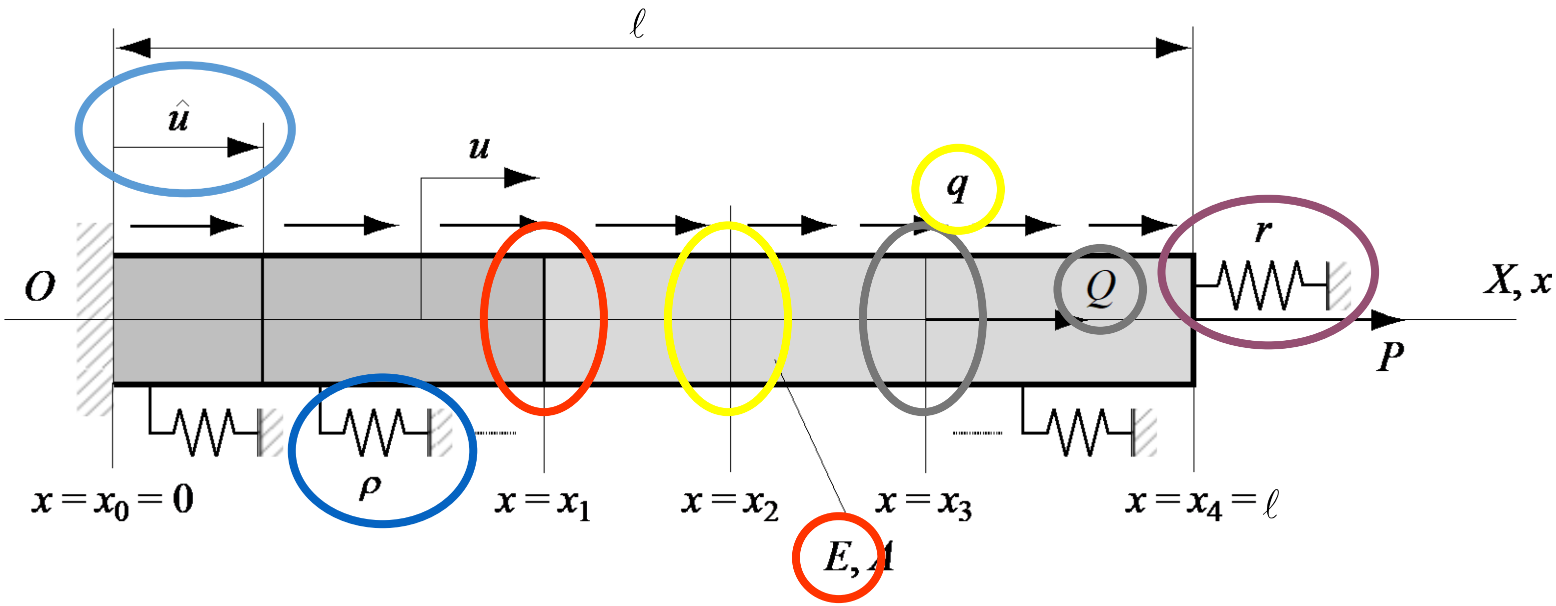
- Modification de l'équation différentielle : ajout d'une charge axiale ρu proportionnelle au déplacement axial u

$$-\mathrm{d}[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x + \underline{\rho\, u} = q$$

ρ facteur de proportionnalité

$EA\,(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)$

Généralisation du problème modèle de la barre en traction



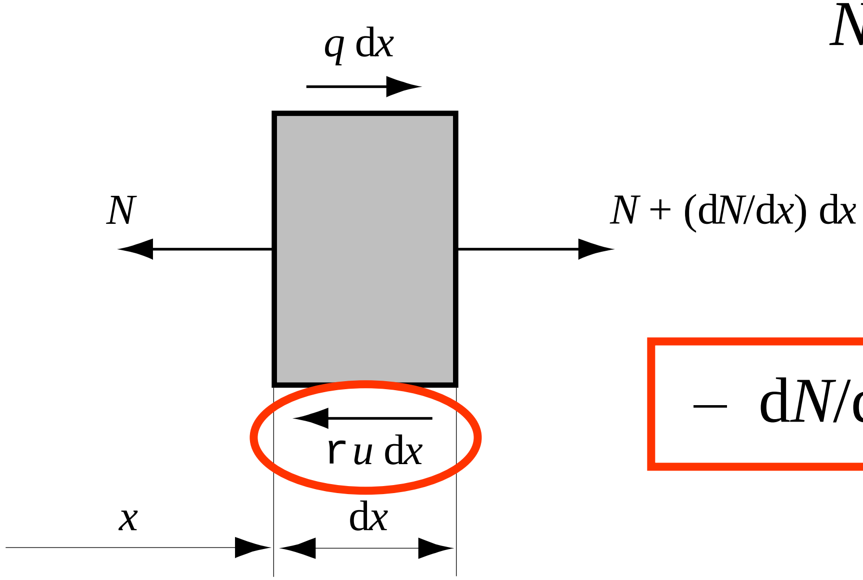
Résumé des modifications du problème modèle de la barre

Équilibre de la barre

- Équation d'équilibre

$$\cancel{N} + (\mathrm{d}N/\mathrm{d}x)\,\cancel{\mathrm{d}x} - \cancel{N} + q\,\cancel{\mathrm{d}x} - \underline{\rho\, u\,\cancel{\mathrm{d}x}} = 0$$

N effort intérieur



$$\boxed{-\,\mathrm{d}N/\mathrm{d}x + \rho\, u = q}$$

Équilibre de la barre

- Équation constitutive (loi de Hooke)

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

σ_x contrainte normale
E module d'élasticité
ε_x déformation axiale

- Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$$

u déplacement axial

- Lien entre effort normal N et déplacement u

$$N = A\,\sigma_x = EA\,\varepsilon_x = EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$$

Formulation forte du problème

- Équation différentielle du 2ème ordre

$$-\,\mathrm{d}[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x \;+\; \rho\,u \;=\; q$$

dans $I_j = \,]\,x_{j-1}, x_j\,[\quad (j = 1, 2, 3, 4)$

Régularité des fonctions $\Rightarrow$ Définition de régions régulières

4 Équations différentielles $\Rightarrow$ 8 Constantes d'intégration

Formulation forte du problème

- Équations de continuité en déplacement

$$\lim_{x \to x_1^+} u(x) = \lim_{x \to x_1^-} u(x)$$

$$\lim_{x \to x_2^+} u(x) = \lim_{x \to x_2^-} u(x)$$

$$\lim_{x \to x_3^+} u(x) = \lim_{x \to x_3^-} u(x)$$

Analogie avec la
mécanique des structures

Formulation forte du problème

- Équations de continuité en flux (contrainte)

$$\lim_{x \to x_1^+} E(x)\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x \to x_1^-} E(x)\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = 0$$

$$\lim_{x \to x_2^+} \cancel{E(x)}\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x \to x_2^-} \cancel{E(x)}\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = 0$$

$$\lim_{x \to x_3^+} \cancel{E(x)}\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x \to x_3^-} \cancel{E(x)}\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = -Q/AE$$

! Hypothèse d'homogénéité en mécanique des structures

! Compression au-delà de x_3

Formulation forte du problème

- Condition aux limites essentielle non homogène

$$u(0) = \hat{u}$$

Déplacement imposé

- Condition aux limites naturelle mixte

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell} = -\,r\,u(\ell) + P$$

Forces imposées

- Résumé de la forme forte
  - 4 équations différentielles à 8 constantes d'intégration
  - 3 équations de continuité en déplacement
  - 3 équations de continuité en flux
  - 2 conditions aux limites

Exemples de problèmes aux limites à caractère linéaire

Problème physique	*Loi de conservation*	*Variable d'état* $u(x)$	*Flux* $\sigma(x)$	*Facteur de proportionnalité* $p(x)$	*Source* $s(x)$	*Equation constitutive*† $\sigma(x) = p(x)\,\varepsilon(x)$
Déformation d'une barre	*Equilibre des forces*	*Déplacement*	*Contrainte normale*	*Module d'élasticité*	*Force volumique*	*Loi de Hooke*
Conduction thermique dans une barre	*Conservation de l'énergie*	*Température*	*Flux de chaleur*	*Conductibilité thermique*	*Source de chaleur*	*Loi de Fourier*
Ecoulement d'un fluide	*Conservation de la quantité de mouvement*	*Vitesse*	*Contrainte tangentielle*	*Viscosité dynamique*	*Force volumique*	*Loi de Stokes*
Ecoulement dans un milieu poreux	*Conservation de la masse*	*Niveau piézométrique*	*Flux volumétrique*	*Conductivité hydraulique (perméabilité)*	*Taux de recharge uniforme*	*Loi de Darcy*
Electrostatique	*Conservation du flux électrique*	*Potentiel électrique*	*Flux électrique*	*Permittivité diélectrique*	*Charge*	*Loi de Coulomb*

† Certaines lois de comportement exigent un signe négatif sans affecter toutefois la formulation.

Loi de conservation : $-\mathrm{d}\sigma(x)/\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x + r u(x) = s(x)$ *Loi constitutive* : $\sigma(x) = p\,\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x$

Formulation intégrale du problème

- Forme intégrale de l'élastostatique du barreau

$$\cancel{\int_0^{\ell} \{ - \mathrm{d}[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x \;+\; \rho\, u \;-\; q \} \;\delta u \;\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall\; \delta u}$$

δu déplacement axial virtuel

Défaut de régularité $\Rightarrow$ Écriture de la forme intégrale par tronçon régulier

- Forme intégrale partielle

$$\int_{I_j} R\;\delta u\;\mathrm{d}x \qquad I_j =]x_{j-1}, x_j[\quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \{- \mathrm{d}[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x \;+\; \rho\, u \;-\; q\} \;\delta u\;\mathrm{d}x \;\neq\; 0$$

Formulation intégrale du problème

- Intégration par parties

$$\int_{I_j} R\,\delta u\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\,u\;\delta u]\,\mathrm{d}x$$
$$-\;[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\;\delta u\,\mathrm{d}x$$

- Forme intégrale globale

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} R\,\delta u\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\;\underline{\delta u}$$

Formulation intégrale du problème

- Sommation des formes intégrales partielles et prise en compte des conditions de continuité en déplacement

$$\int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$-\;[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{0}^{x_1^-} \;-\; [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{x_1^+}^{x_2^-}$$

$$-\;[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{x_2^+}^{x_3^-} \;-\; [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{x_3^+}^{\ell}$$

$$= \int_0^\ell q\;\delta u\;\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta u$$

Régularité de la fonction δu et continuité en déplacement

Formulation intégrale du problème

- Prise en compte des conditions de continuité en flux

$$\cdots - [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_0^{x_1^-} - [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_{x_1^+}^{x_2^-}$$

$$- [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_{x_2^+}^{x_3^-} - [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_{x_3^+}^{\ell}\ \cdots$$

$= 0$

$= 0$

$= -Q\ \delta u(x_3)$

$$\Rightarrow \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) + \rho\, u\ \delta u]\ \mathrm{d}x$$

$$+ [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_{x=0} - [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\ \delta u]\Big|_{x=\ell}$$

$$- Q\ \delta u(x_3) = \int_0^\ell q\ \delta u\ \mathrm{d}x \qquad \forall\ \delta u$$

Formulation intégrale du problème

- Prise en compte des conditions aux limites

$$\ldots \cancel{+ \; [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\; \underline{\delta u}]}\Big|_{x=0} \; - \; [\underline{EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)}\; \delta u]\Big|_{x=\ell} \quad \ldots$$

$$u(0) \; = \; \hat{u} \quad \Rightarrow \; \delta u(0) \; = \; 0 \qquad\qquad EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell}$$

$$= - \; r\,u(\ell) \; + \; P$$

δu cinématiquement admissible

$$\Rightarrow \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \; + \; \rho\, u\; \delta u]\, \mathrm{d}x \; - \; Q\; \delta u(x_3)$$

$$+ \; [r\,u(\ell) - P]\; \delta u(\ell) \; = \; \int_0^\ell q\; \delta u\; \mathrm{d}x \qquad \forall\; \delta u$$

Formulation faible du problème

- Forme faible de l'élastostatique du barreau généralisé

$$u \in U : \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$
$$+\; r\, u(\ell)\, \delta u(\ell)$$
$$= \int_0^\ell q\, \delta u\, \mathrm{d}x \;+\; Q\, \delta u(x_3) \;+\; P\, \delta u(\ell) \qquad \forall\, \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles U et V

$$U = \{u(x) \mid u(x) \in H^1(]0, \ell[)\ ;\ u(0) = \hat{u}\}$$
$$V = \{\delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1(]0, \ell[)\ ;\ \delta u(0) = 0\}$$

$$U \neq V$$

Formulation faible du problème

- Simplicité de la forme faible par rapport à la formulation forte

  - 4 équations différentielles
  - 3 équations de continuité en déplacement
  - 3 équations de continuité en flux
  - 2 conditions aux limites

Forme forte $\Leftrightarrow$ Forme faible

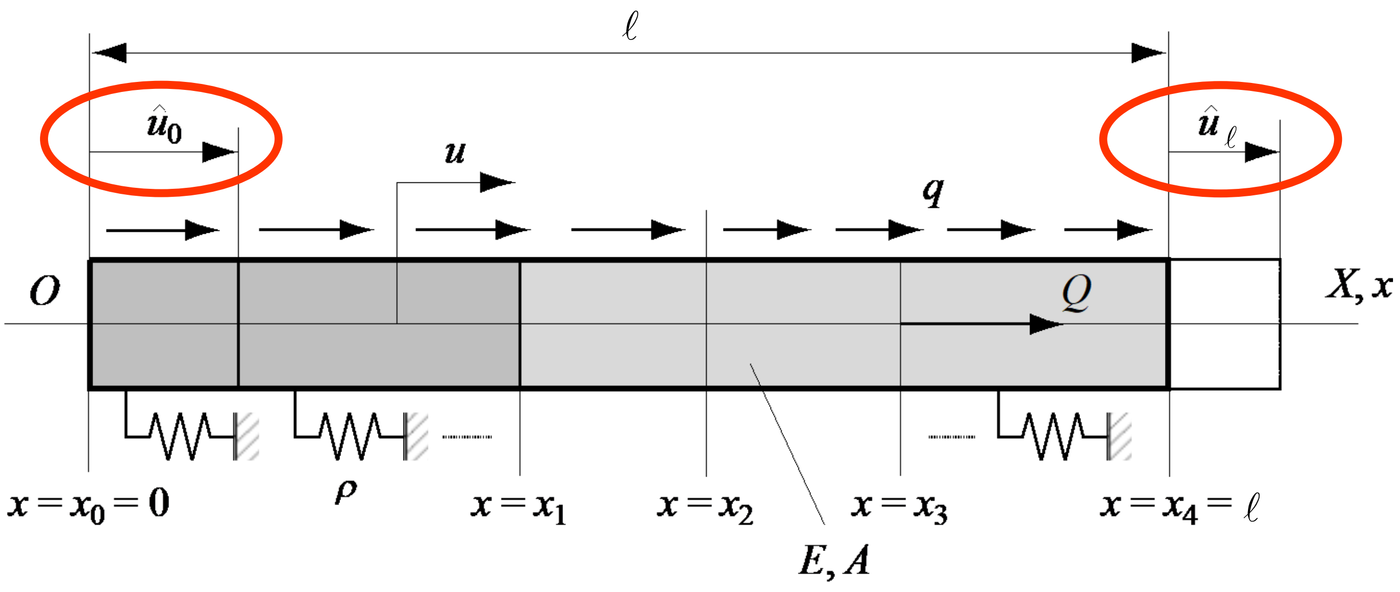
  - 1 équation intégrale
  - 0 équation de continuité
  - 1 condition aux limites externe

Conditions de bord particulières : conditions de Dirichlet

- Conditions aux limites non homogènes de Dirichlet

$$u(0) = \hat{u}_0$$
$$u(\ell) = \hat{u}_\ell$$

Conditions essentielles de bord



Conditions de bord particulières : conditions de Dirichlet

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord

$$\int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\; \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$+\; \cancel{[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]}\Big|_{x=0} \;-\; [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]\Big|_{x=\ell}$$

$$-\; Q\;\delta u(x_3) \;=\; \int_0^{\ell} q\;\delta u\;\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta u$$

$$u(0) \;=\; \hat{u}_0 \qquad \Rightarrow \quad \delta u(0) \;=\; 0$$

Conditions de bord particulières : conditions de Dirichlet

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord

$$\int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\;\delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$+\;\cancel{[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]}\Big|_{x=0} \;-\; \cancel{[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\;\delta u]}\Big|_{x=\ell}$$

$$-\;Q\;\delta u(x_3) \;=\; \int_0^\ell q\;\delta u\;\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta u$$

$$u(0) \;=\; \hat{u}_0 \quad\Rightarrow\quad \delta u(0) \;=\; 0$$

$$u(\ell) \;=\; \hat{u}_\ell \quad\Rightarrow\quad \delta u(\ell) \;=\; 0$$

Conditions de bord particulières : conditions de Dirichlet

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord

$$\int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$+\;\cancel{[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\delta u]}\Big|_{x=0} \;-\; \cancel{[EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\delta u]}\Big|_{x=\ell}$$

$$-\;Q\,\delta u(x_3) \;=\; \int_0^\ell q\,\delta u\,\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta u$$

$$u(0) = \hat{u}_0 \quad\Rightarrow\quad \delta u(0) = 0$$

$$u(\ell) = \hat{u}_\ell \quad\Rightarrow\quad \delta u(\ell) = 0$$

δu cinématiquement admissible

Conditions de bord particulières : conditions de Dirichlet

- Forme faible adaptée aux nouvelles conditions de bord

$$u \in U : \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\ell} q\, \delta u\, \mathrm{d}x \;+\; Q\, \delta u(x_3) \qquad \forall\ \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles correspondantes

$$U = \{u(x)\,|\,u(x) \in H^1(]0, \ell[)\;;\;\underline{u(0) = \hat{u}_0\;;\;u(\ell) = \hat{u}_\ell}\}$$

$$V = \{\delta u(x)\,|\,\delta u(x) \in H^1(]0, \ell[)\;;\;\underline{\delta u(0) = \delta u(\ell) = 0}\}$$

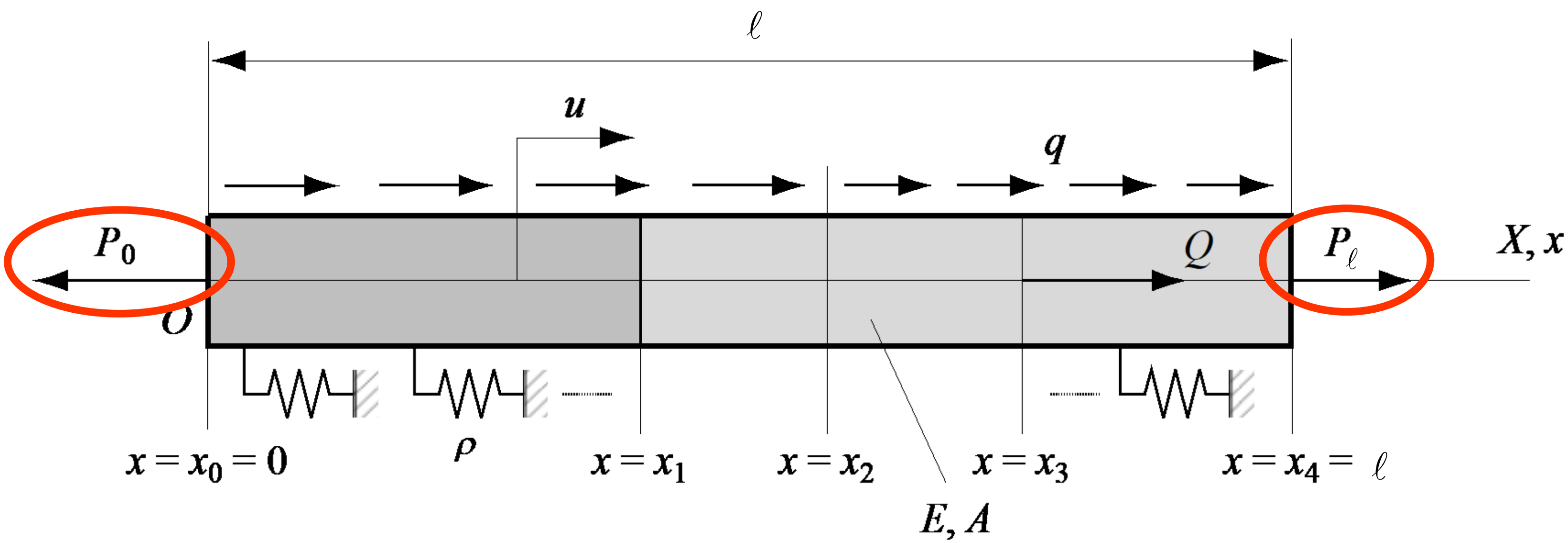
Deux conditions essentielles

Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Conditions aux limites non homogènes de Neumann

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=0} = P_0$$
$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell} = P_\ell$$

Conditions naturelles pures de bord

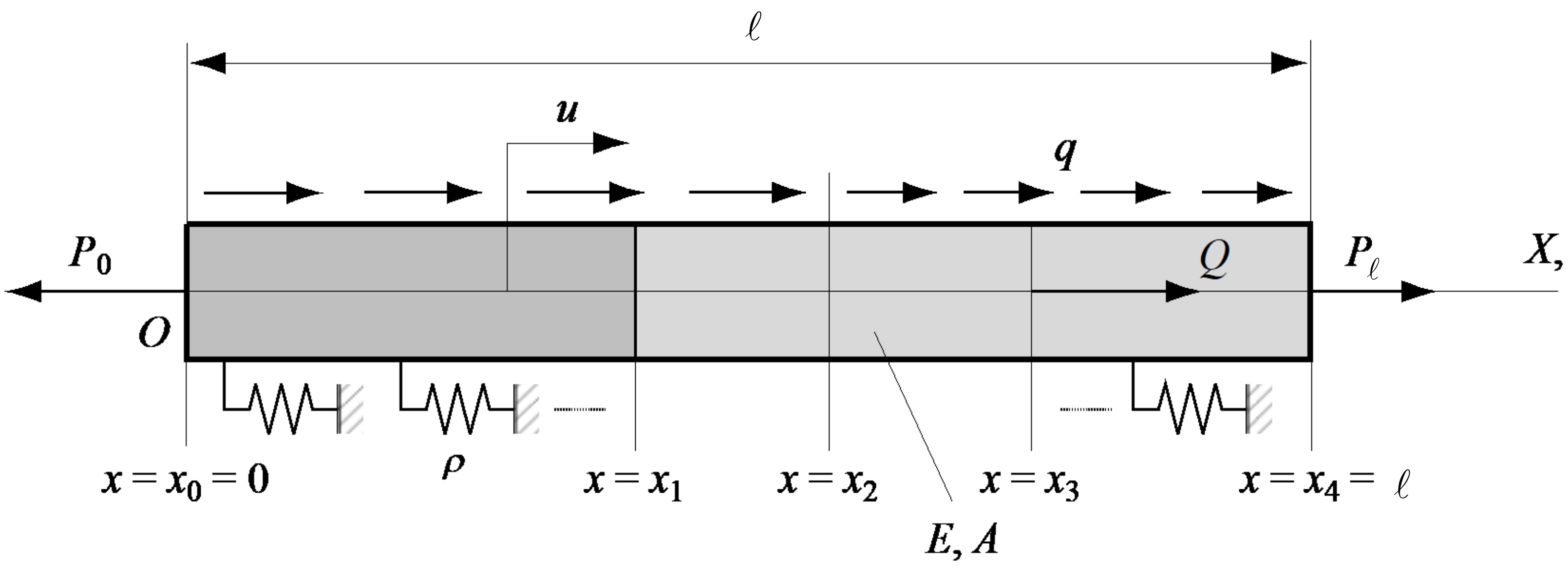


Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Conditions aux limites non homogènes de Neumann

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)|_{x=0} = P_0$$
$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)|_{x=\ell} = P_\ell$$

⚠ Même signe pour P_0 et P_ℓ (traction)



Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord

$$\int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$+\;[\underbrace{EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)}_{P_0}\;\delta u]\Big|_{x=0} \;-\; [\overset{P_\ell}{\underline{EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)}}\;\delta u]\Big|_{x=\ell}$$

$$-\;Q\,\delta u(x_3) \;=\; \int_0^\ell q\,\delta u\,\mathrm{d}x \qquad \forall\;\delta u$$

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)|_{x=0} = P_0$$

$$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)|_{x=\ell} = P_\ell$$

Deux conditions naturelles

Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Forme faible adaptée aux nouvelles conditions de bord

$$u \in U : \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \;+\; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\ell} q\, \delta u\,\mathrm{d}x \;+\; Q\, \delta u(x_3) \;-\; P_0\, \delta u(0) \;+\; P_\ell\, \delta u(\ell)$$

$$\forall\ \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles correspondantes

$$U \;=\; V \;=\; \{w(x) \mid w(x) \in H^1(]0, \ell[)\}$$

Absence de conditions essentielles

Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Forme faible adaptée aux nouvelles conditions de bord

$$u \in U : \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x) \; + \; \rho\, u\, \delta u]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\ell} q\, \delta u\, \mathrm{d}x \; + \; Q\, \delta u(x_3) \; - \; P_0\, \delta u(0) \; + \; P_{\ell}\, \delta u(\ell)$$

$$\forall\; \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles correspondantes

$$U = V = \{w(x) \mid w(x) \in H^1(]0, \ell[)\}$$

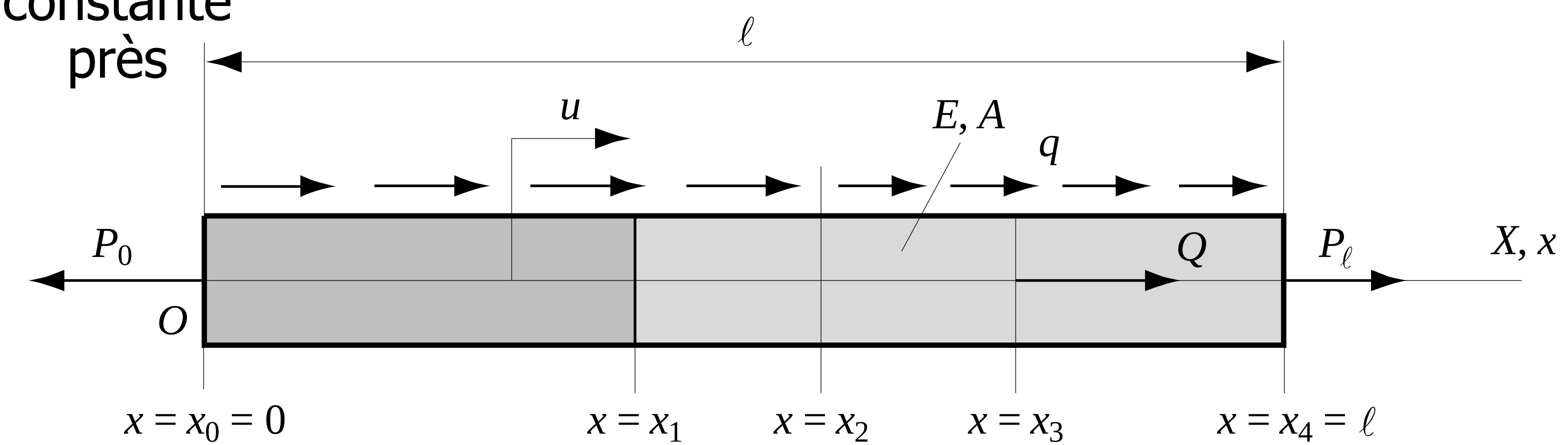
! Importance de la définition des classes de fonctions admissibles

Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Cas spécial : absence de charge proportionnelle à u ($\rho = 0$)
  - Forme faible modifiée

$$u \in U : \int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \; = \; \int_0^\ell q\;\delta u\;\mathrm{d}x$$
$$+\; Q\;\delta u(x_3) \;-\; P_0\;\delta u(0) \;+\; P_\ell\;\delta u(\ell) \qquad \forall\;\delta u \in V$$

Solution définie à une constante près



Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Solution définie à une constante près

$$u \rightarrow u + c$$
$$\delta u \rightarrow \delta u + d$$

! Déplacement de corps rigide

- Intégration de la solution dans la forme faible

Forme faible

$$\int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell q\,(\delta u + d)\,\mathrm{d}x$$
$$+ Q\,[\delta u(x_3) + d] - P_0\,[\delta u(0) + d] + P_\ell\,[\delta u(\ell) + d]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^\ell q\,\cancel{d}\,\mathrm{d}x + Q\,\cancel{d} - P_0\,\cancel{d} + P_\ell\,\cancel{d}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\ell q\,\mathrm{d}x + Q - P_0 + P_\ell = 0$$

! Équation de compatibilité

Conditions de bord particulières : conditions de Neumann

- Solution définie à une constante près

$$u \rightarrow u + c$$
$$\delta u \rightarrow \delta u + d$$

! Déplacement de corps rigide

- Intégration de la solution dans la forme faible

Forme faible

$$\int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell q\,(\delta u + d)\,\mathrm{d}x$$
$$+\, Q\,[\delta u(x_3) + d] \;-\; P_0\,[\delta u(0) + d] \;+\; P_\ell\,[\delta u(\ell) + d]$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \int_0^\ell q\,\cancel{d}\,\mathrm{d}x + Q\,\cancel{d} - P_0\,\cancel{d} + P_\ell\,\cancel{d}$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^\ell q\,\mathrm{d}x + Q - P_0 + P_\ell = 0$$

! Signes opposés pour P_0 et P_ℓ