Méthode des éléments finis

Généralisation de la forme faible aux problèmes unidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Formulation faible approchée

- Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel

$$u \approx u^h \in U^h \subset U$$

$$\delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x) + \rho\, u^h\, \delta u^h]\,\mathrm{d}x$$

$$+\ r\, u^h(\ell)\, \delta u^h(\ell)$$

$$= \int_0^\ell q\, \delta u^h\, \mathrm{d}x + Q\, \delta u^h(x_3) + P\, \delta u^h(\ell) \quad \forall\ \delta u^h \in V^h$$

Méthode de Galerkin

- Approximation de Galerkin

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, h_i(x) = \mathbf{H}(x)\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta\alpha_i \, h_i(x) = \mathbf{H}(x)\,\delta\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots, h_n]$$ matrice $(1\times n)$ des fonctions de forme

$$h_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$ fonctions de forme linéairement indépendantes

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n\}^{\mathrm{T}}$$ vecteur $(n\times 1)$ des inconnues

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

$$= \int_0^{\ell} (EA\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B} + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell) \qquad (\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^{\ell} \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^\mathrm{T}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^\mathrm{T}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

$$= \int_0^\ell (EA\,\mathbf{B}^\mathrm{T}\,\mathbf{B} + \rho\,\mathbf{H}^\mathrm{T}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell) \qquad (\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^\mathrm{T}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^\mathrm{T}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

Termes nouveaux

Méthode de Galerkin

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

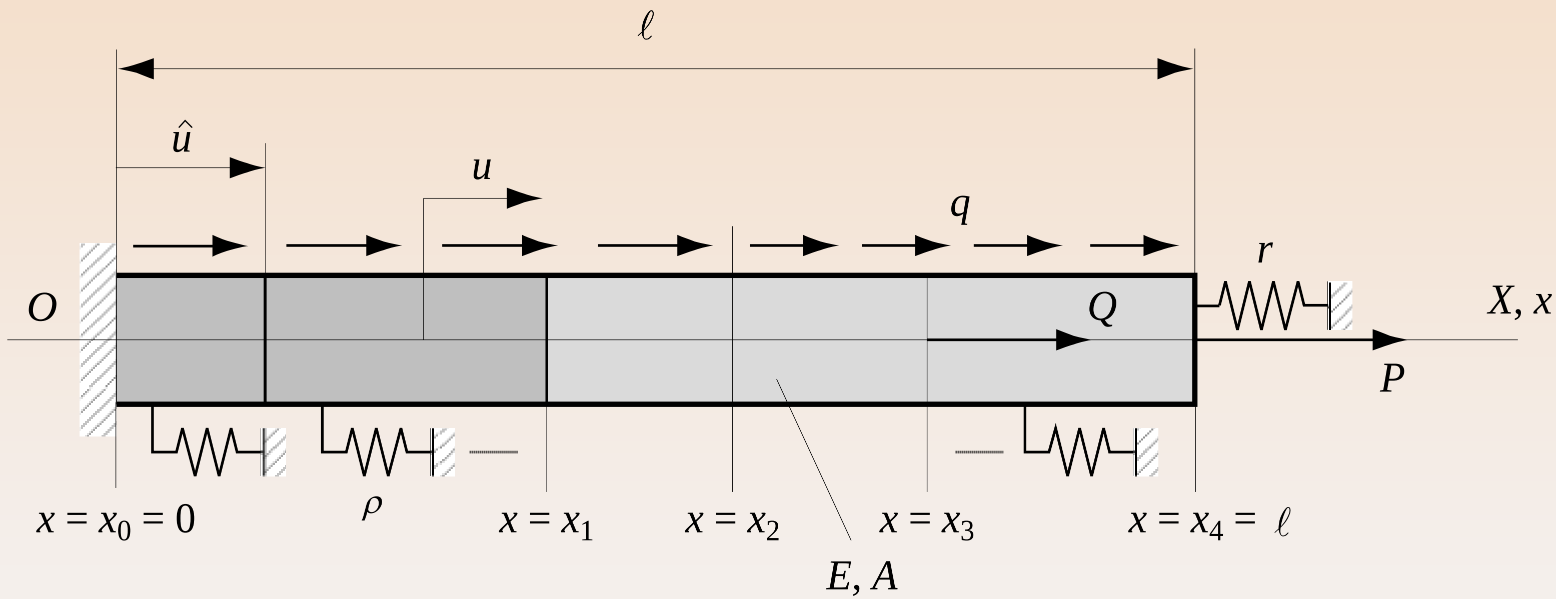
$$= \int_0^{\ell} (EA\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B} + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell) \qquad (\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^{\ell} \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

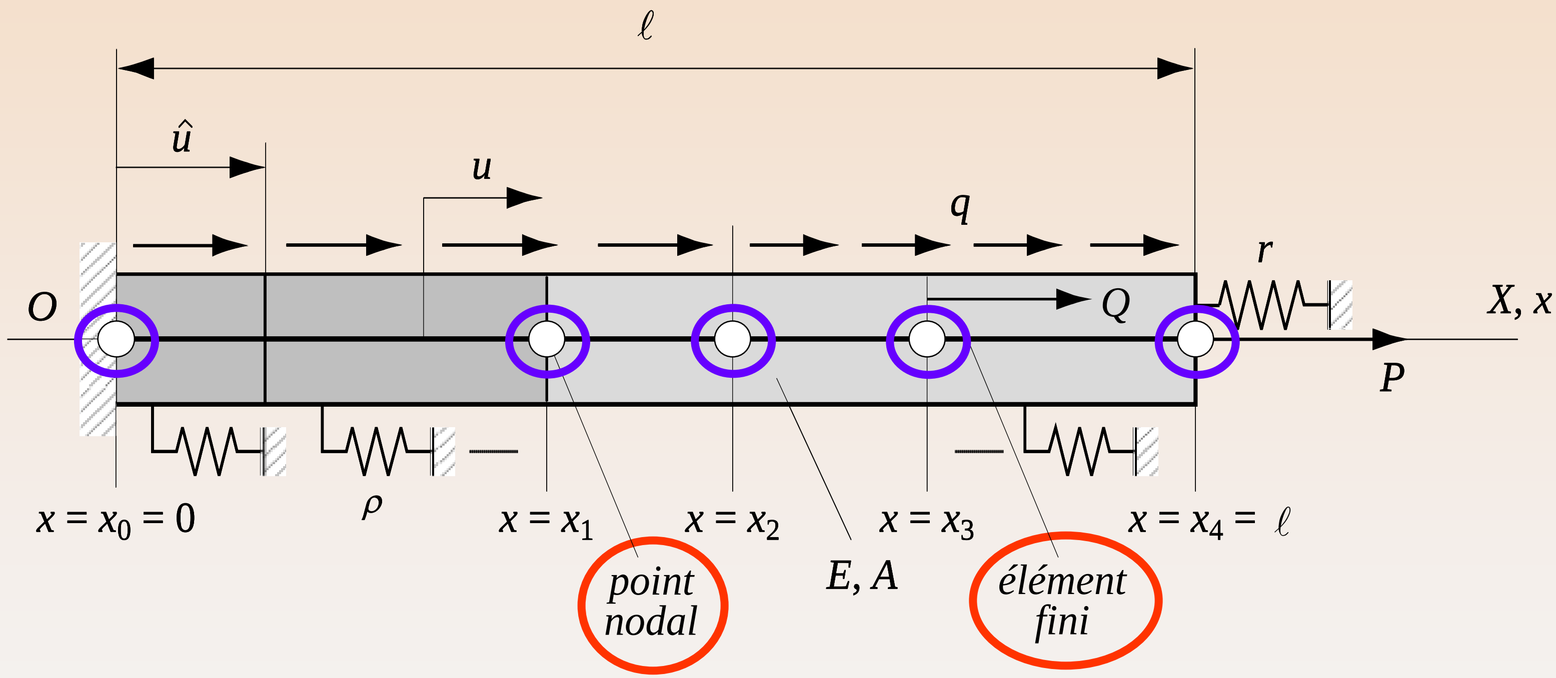
Termes dits correctifs

Méthode des éléments finis



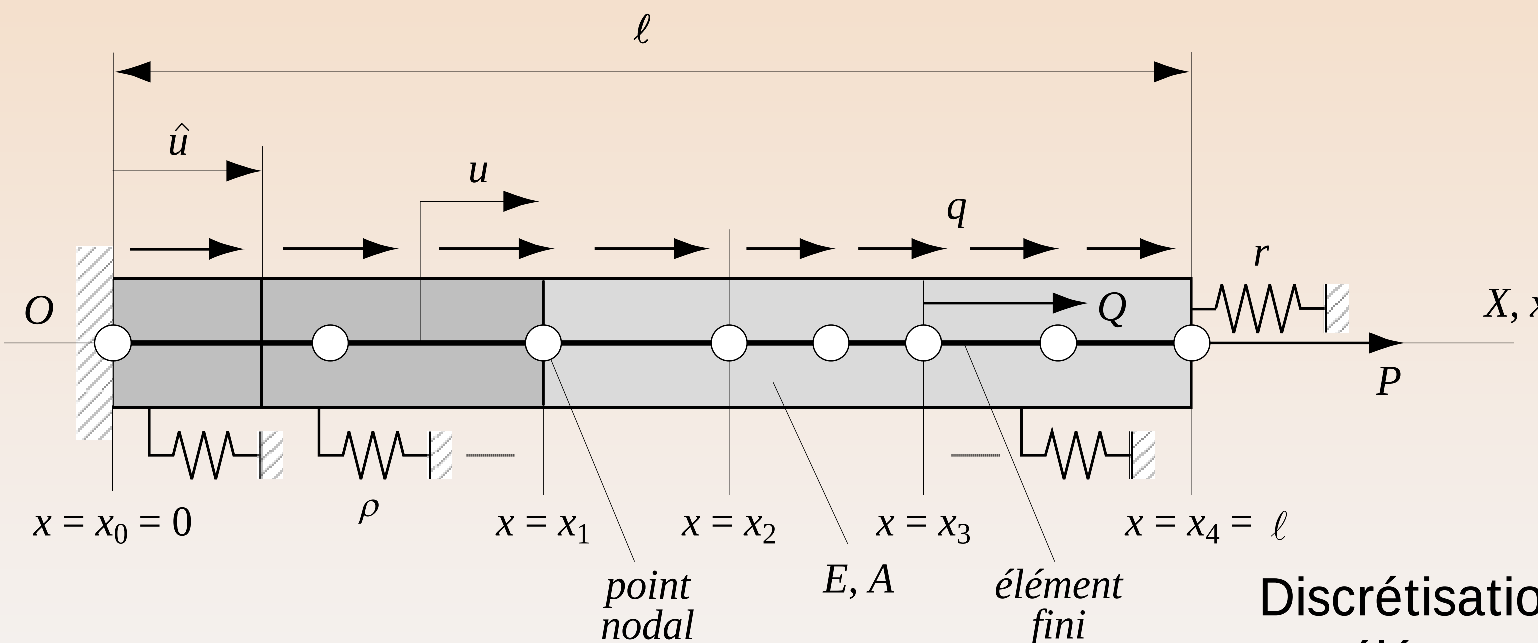
Critère de différentiabilité $\Rightarrow$ Points nodaux aux discontinuités

Méthode des éléments finis



Points nodaux aux discontinuités

Méthode des éléments finis



Discrétisation en éléments finis à deux nœuds

Méthode des éléments finis

- Approximation des déplacements par éléments finis : association d'une fonction de forme à chacun des nœuds

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x)\,\mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\,\delta\mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_p]$$

matrice $(1 \times p)$ des fonctions de forme <u>nodales</u>

⚠ Fonctions $h_i(x)$ à support compact

Méthode des éléments finis

- Approximation des déplacements par éléments finis : association d'une fonction de forme à chacun des nœuds

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x)\,\mathbf{q}$$

$$\delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\,\delta\mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_p]$$

matrice $(1\times p)$ des fonctions de forme nodales

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_p\}^{\mathrm{T}}$$

$$\delta\mathbf{q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_p\}^{\mathrm{T}}$$

vecteurs $(p\times 1)$ des déplacements nodaux réel et virtuel

! Critères de convergence à satisfaire par les fonctions $h_i(x)$

Méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = \hat{q}\,)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

$$\mathbf{r} = \int_0^{\ell} \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u}$$

déplacement nodal imposé

!

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

Méthode des éléments finis

- Forme faible discrète (analogue à celle dérivée de la méthode de Galerkin)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = \hat{q}\,)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{\ell} [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

$$\mathbf{r} = \int_0^{\ell} \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u}$$

déplacement nodal imposé

! Fonctions à support compact dans la matrice $\mathbf{H}$

Méthode des éléments finis

- Forme faible discrète (analogue à celle dérivée de la méthode de Galerkin)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell [EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^\mathrm{T}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + \rho\,\mathbf{H}^\mathrm{T}\,\mathbf{H})\,\mathrm{d}x + r\,\mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

matrice de rigidité

! Termes correctifs

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \mathbf{H}^\mathrm{T}\,q\,\mathrm{d}x + \mathbf{H}^\mathrm{T}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,P$$

vecteur des forces appliquées

$$\hat{q} \equiv q_1 = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{q} = u^h(0) \approx u(0) = \hat{u}$$

déplacement nodal imposé

! Fonctions à support compact dans la matrice $\mathbf{H}$

Méthode des éléments finis

- Approche locale de la formulation (m éléments à ${}^{e}p$ nœuds)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = \hat{q}\,)$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{K} + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

Matrice élémentaire (${}^{e}p \times {}^{e}p$) de rigidité

$${}^{e}\mathbf{K} = \int_{{}^{e}\Omega} [{}^{e}E\,{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}{}^{e}\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + {}^{e}\rho\,{}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^{e}\mathbf{H}]\,\mathrm{d}x$$

Matrice des fonctions de base

$$\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{r} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

$${}^{e}\mathbf{r} = \int_{{}^{e}\Omega} {}^{e}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^{e}q\,\mathrm{d}x$$

Vecteur élémentaire (${}^{e}p \times 1$) des forces externes

Méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Approche locale de la formulation (m éléments à ${}^e p$ nœuds)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = \hat{q})$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{K} + r\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,\mathbf{H}(\ell)$$

Matrice élémentaire (${}^e p \times {}^e p$) de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} [{}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + {}^e\rho\,{}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^e\mathbf{H}]\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{r} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x_3)\,Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P$$

Matrice des fonctions de base

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^eq\,\mathrm{d}x$$

Vecteur élémentaire (${}^e p \times 1$) des forces externes

! Contributions locales (fonctions à support compact dans $\mathbf{H}$)

Méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Résolution du système d'équations

Pas d'élimination de colonne

$\delta q_1 = 0$

$q_1 = \hat{q}$

$$\begin{array}{c} \cancel{1} \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ p \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{k_{11}} & \cancel{k_{12}} & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \\ & k_{32} & k_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cancel{r_1} \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_p \end{Bmatrix}$$

Condition aux limites essentielle en $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta q_1 = 0$

Méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Système d'équations réduit

$$
\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ \cdots \\ p
\end{array}
\begin{bmatrix}
k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\
 & k_{32} & k_{33} & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\hat{q} \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdots \\ q_p
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
r_2 - k_{21} \cdot \hat{q} \\ r_3 \\ \cdots \\ r_p
\end{Bmatrix}
$$

Méthode des éléments finis

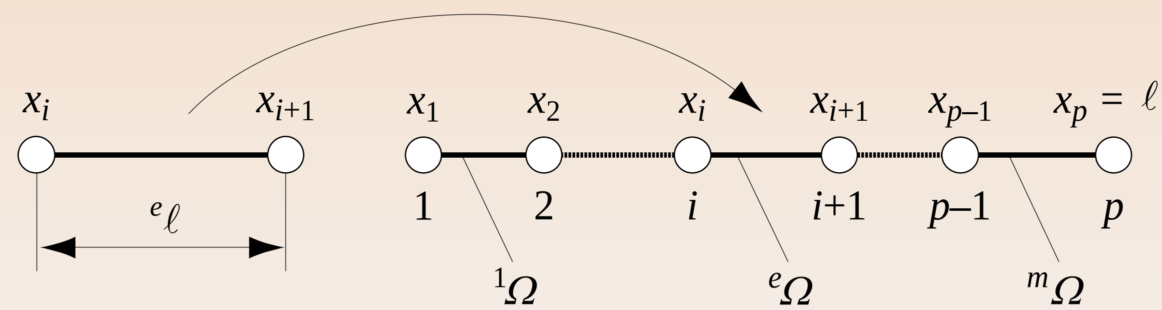
- Système d'équations réduit

$$
\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ p
\end{array}
\begin{bmatrix}
k_{21} & k_{22} & k_{23} & \\
 & k_{32} & k_{33} & \\
 & & & \ddots \\
 & & &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \hat{q} \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_p \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} r_2 - k_{21} \cdot \hat{q} \\ r_3 \\ \dots \\ r_p \end{Bmatrix}
$$

Condensation de la matrice de rigidité

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Élément fini générique à deux points nodaux



- Transformation de coordonnées

$$\xi = \frac{1}{{}^e\ell}\left(2x - x_i - x_{i+1}\right)$$

ξ coordonnée naturelle

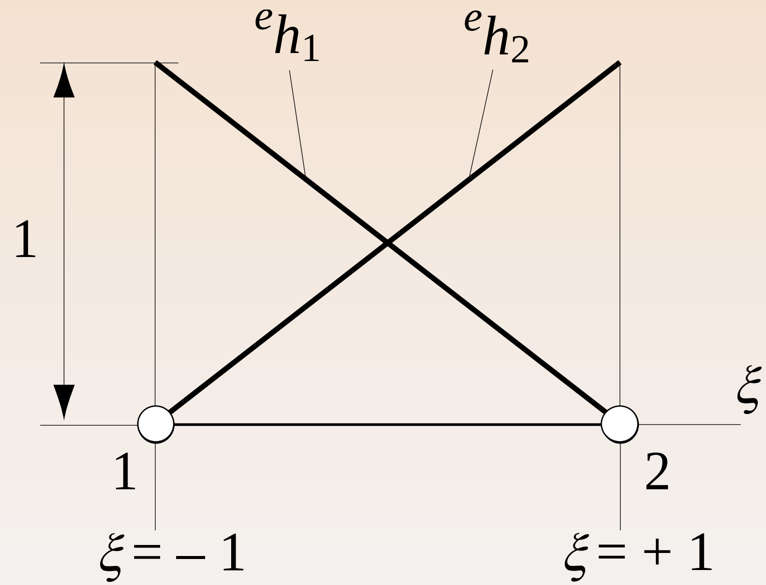
${}^e\ell$ longueur de l'élément

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Fonctions de base linéaires de l'élément

$$ {}^{e}h_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) $$

$$ {}^{e}h_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) $$



Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice élémentaire de rigidité
  - Composantes de la matrice de rigidité des éléments linéaires

$$ {}^{e}k_{ij} = \int_{{}^{e}\Omega} [\,{}^{e}E\;{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}h_i/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}{}^{e}h_j/\mathrm{d}x) + {}^{e}\rho\;{}^{e}h_i\;{}^{e}h_j]\,\mathrm{d}x $$

  - Calcul des composantes de la matrice

$$ {}^{e}k_{11} = \int_{{}^{e}\Omega} [{}^{e}E\;{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}h_1/\mathrm{d}x)^2 + {}^{e}\rho\;{}^{e}h_1^2]\,\mathrm{d}x $$

$$ = \int_{{}^{e}\Omega} [{}^{e}E\;{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}h_1/\mathrm{d}\xi)^2\,(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x)^2 + {}^{e}\rho\;{}^{e}h_1^2]\,\mathrm{d}x $$

$$ \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x = 2/{}^{e}\ell $$

$$ \mathrm{d}x = ({}^{e}\ell/2)\,\mathrm{d}\xi $$

Dérivée de la transformation de coordonnées

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Calcul des composantes de la matrice (*suite*)

$$
{}^{e}k_{11} = \int_{-1}^{+1} \left[{}^{e}E\,{}^{e}A \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} \left(\frac{2}{{}^{e}\ell}\right)^{2} + \frac{{}^{e}\rho}{4}(1-\xi)^{2} \right] \frac{{}^{e}\ell}{2}\,\mathrm{d}\xi
$$

$$
= {}^{e}E\,{}^{e}A/{}^{e}\ell \;+\; {}^{e}\rho\,{}^{e}\ell/3
$$

$$
{}^{e}k_{12} = {}^{e}k_{21} = \int_{{}^{e}\Omega} [{}^{e}E\,{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}h_{1}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}{}^{e}h_{2}/\mathrm{d}x) + {}^{e}\rho\,{}^{e}h_{1}\,{}^{e}h_{2}]\,\mathrm{d}x
$$

$$
= -\,{}^{e}E\,{}^{e}A/{}^{e}\ell \;+\; {}^{e}\rho\,{}^{e}\ell/6
$$

$$
{}^{e}k_{22} = \int_{{}^{e}\Omega} [{}^{e}E\,{}^{e}A\,(\mathrm{d}{}^{e}h_{2}/\mathrm{d}x)^{2} + {}^{e}\rho\,{}^{e}h_{2}^{2}]\,\mathrm{d}x
$$

$$
= {}^{e}E\,{}^{e}A/{}^{e}\ell \;+\; {}^{e}\rho\,{}^{e}\ell/3
$$

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$$ {}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE\,{}^eA}{{}^e\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho\,{}^e\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

Matrice (2×2) indépendante de la position de l'élément

Matrice définie strictement positive

Paramètres de la matrice : matériau (${}^eE$, ${}^e\rho$) et géométrie (${}^eA$, ${}^e\ell$)

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$$ {}^{e}\mathbf{K} = \frac{{}^{e}E\,{}^{e}A}{{}^{e}\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^{e}\rho\,{}^{e}\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

! Matrice (2×2) indépendante de la position de l'élément

! Matrice définie strictement positive

! Paramètres de la matrice : matériau (${}^{e}E$, ${}^{e}\rho$) et géométrie (${}^{e}A$, ${}^{e}\ell$)

! Analogie avec une matrice de masse

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$$^{e}\mathbf{K} = \frac{^{e}E\,^{e}A}{^{e}\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{^{e}\rho\,^{e}\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + {}^{e}\kappa\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice (2×2) indépendante de la position de l'élément

Matrice définie strictement positive

Paramètres de la matrice : matériau (^{e}E, $^{e}\rho$) et géométrie (^{e}A, $^{e}\ell$)

Analogie avec une matrice de masse

Formulation complète de la matrice

Discrétisation en éléments finis linéaires

- Matrice de rigidité

$$ {}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE\,{}^eA}{{}^e\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho\,{}^e\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + {}^e\kappa\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} $$

Matrice (2×2) indépendante de la position de l'élément

Matrice définie strictement positive

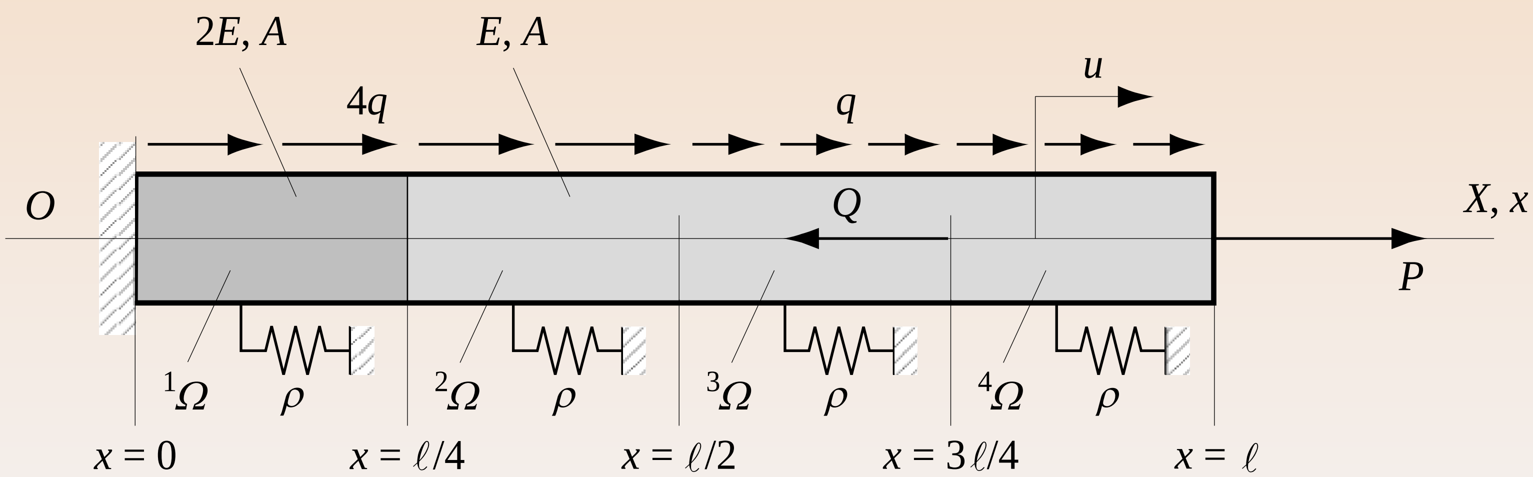
Paramètres de la matrice : matériau (${}^eE$, ${}^e\rho$) et géométrie (${}^eA$, ${}^e\ell$)

Analogie avec une matrice de masse

Perte de symétrie

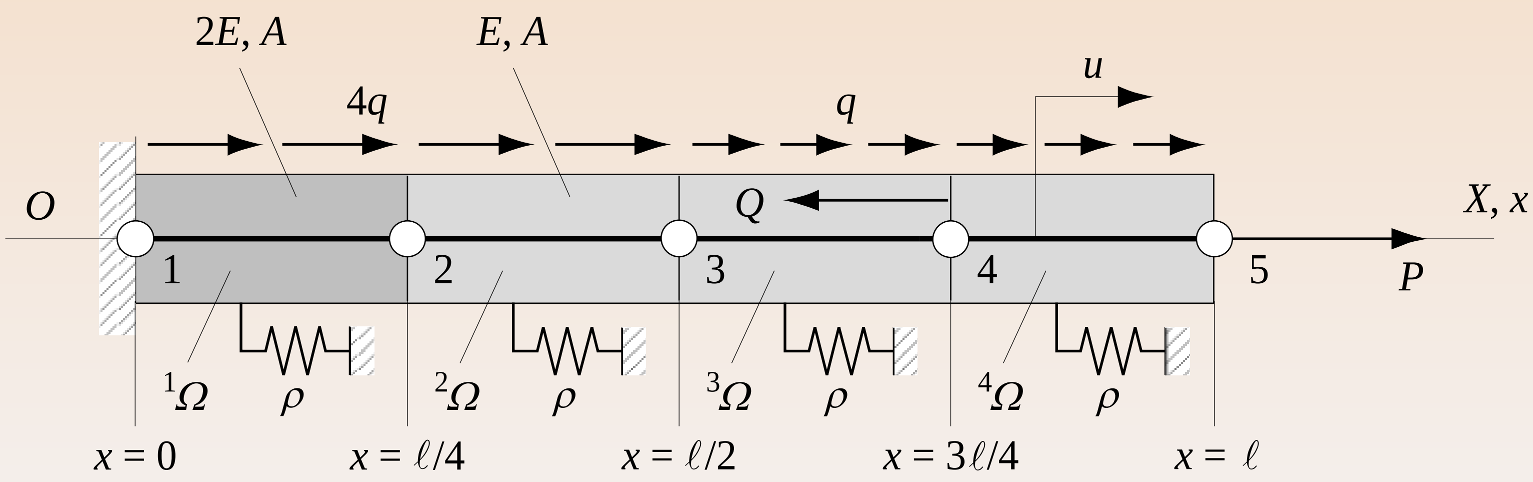
Formulation complète de la matrice

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à des discontinuités

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à des discontinuités
et subdivisée en quatre éléments finis identiques

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Équation différentielle

$$- E^*A\,(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2) \;+\; \rho\, u \;=\; q^*$$

dans $I_i = \,]\,(i-1)\ell/4,\, i\ell/4\,[\qquad (i = 1, 2, 3, 4)$

avec

$$E^* = 2E \qquad 0 \le x \le \ell/4$$
$$E^* = E \qquad \ell/4 \le x \le \ell$$
$$q^* = 4q \qquad 0 \le x \le \ell/2$$
$$q^* = q \qquad \ell/2 \le x \le \ell$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Conditions aux limites

$u(0) = 0$ condition essentielle homogène

$EA\,(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell} = P$ condition naturelle pure

- Équations de continuité en flux (contrainte)

$$\lim_{x\to \ell/4^+} E\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x\to \ell/4^-} 2E\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = 0$$

$$\lim_{x\to \ell/2^+} E\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x\to \ell/2^-} E\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = 0$$

$$\lim_{x\to 3\ell/4^+} EA\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] - \lim_{x\to 3\ell/4^-} EA\,[\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x] = Q$$

Signe

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Forme faible approchée

$$u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x) + \rho\, u^h\, \delta u^h]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\ell q^*\, \delta u^h\, \mathrm{d}x \;-\; Q\, \delta u^h(3\ell/4) \;+\; P\, \delta u^h(\ell)$$

$$\forall\ \delta u^h \in V^h \subset V$$

Condition de bord naturelle pure

Exemple d’application de la méthode des éléments finis

- Forme faible approchée

$$u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x) + \rho\, u^h\, \delta u^h]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\ell q^*\, \delta u^h\, \mathrm{d}x - Q\, \delta u^h(3\ell/4) + P\, \delta u^h(\ell)$$

$$\forall\ \delta u^h \in V^h \subset V$$

Force Q négative

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Forme faible approchée

$$u^h \in U^h \subset U : \int_0^\ell [E^*A\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x) + \rho\, u^h\, \delta u^h]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\ell q^*\, \delta u^h\,\mathrm{d}x \;-\; Q\,\delta u^h(3\ell/4) \;+\; P\,\delta u^h(\ell)$$

$$\forall\; \delta u^h \in V^h \subset V$$

avec

$$U \;=\; V \;=\; \{w(x)\,|\, w(x) \in H^1(]0,\ell[)\;;\; w(0) = 0\}$$

! Condition de bord essentielle homogène

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r} \qquad (q_1 = 0)$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{K}$$

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} [{}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x) + {}^e\rho\,{}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}\,{}^e\mathbf{H}]\,\mathrm{d}x$$

Matrice élémentaire (2×2) de rigidité

$$\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{r} - \mathbf{H}^\mathrm{T}(3\ell/4)\,Q + \mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,P$$

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}\,{}^eq\,\mathrm{d}x$$

Vecteur élémentaire (2×1) des forces externes

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Matrices élémentaires de rigidité

$$ {}^{e}\mathbf{K} = \frac{{}^{e}E\,{}^{e}A}{{}^{e}\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^{e}\rho\,{}^{e}\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow\ {}^{1}\mathbf{K} = \frac{8EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\mathbf{K} = {}^{3}\mathbf{K} = {}^{4}\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -2 & 2+1 & -1 & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\rho\ell}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2+2 & 1 & & \\ & 1 & 2+2 & 1 & \\ & & 1 & 2+2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assemblage de la matrice globale de rigidité

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Vecteurs élémentaires des forces externes

$$ {}^{e}\mathbf{r} = \frac{{}^{e}q\,{}^{e}\ell}{2}\{1,\,1\}^{\mathrm{T}} $$

! Concentration de la charge répartie aux nœuds

$$ \Rightarrow\ {}^{1}\mathbf{r} = {}^{2}\mathbf{r} = \frac{q\ell}{2}\{1,\,1\}^{\mathrm{T}} $$

$$ {}^{3}\mathbf{r} = {}^{4}\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8}\{1,\,1\}^{\mathrm{T}} $$

- Assemblage du vecteur global des forces externes

$$ \mathbf{r} = \frac{q\ell}{8}\{4,\,4{+}4,\,4{+}1,\,1{+}1,\,1\}^{\mathrm{T}} $$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8}\{4, 8, 5, 2, 1\}^{\mathrm{T}}$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{r} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(3\ell/4)\, Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\, P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8}\{4, 8, 5, 2, 1\}^{\mathrm{T}}$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \operatorname*{A}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{r} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(3\ell/4)\, Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\, P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{q\ell}{8}\{4, 8, 5, 2, 1\}^{\mathrm{T}}$$

- Correction du vecteur global des forces externes

$$\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^{e}\mathbf{r} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(3\ell/4)\, Q + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\, P$$

$$\Rightarrow \quad r_4 = \frac{q\ell}{4} - Q$$

$$r_5 = \frac{q\ell}{8} + P$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations linéaires

$$\delta q_1 = 0$$

$$\left(\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$

$$q_1 = 0 \qquad q_1 = 0$$

$$= \frac{q\ell}{8} \{\cancel{4,}\ 8, 5, 2, 1\}^{\mathrm{T}} + \{\cancel{0,}\ 0, 0, -Q, P\}^{\mathrm{T}}$$

! Prise en compte de l'encastrement au nœud 1

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations réduit

$$\left(\frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho\ell}{24}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{q\ell}{8}\begin{Bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q \\ P \end{Bmatrix}$$

Pas de solution analytique simple

$\Rightarrow$ Choix de données numériques

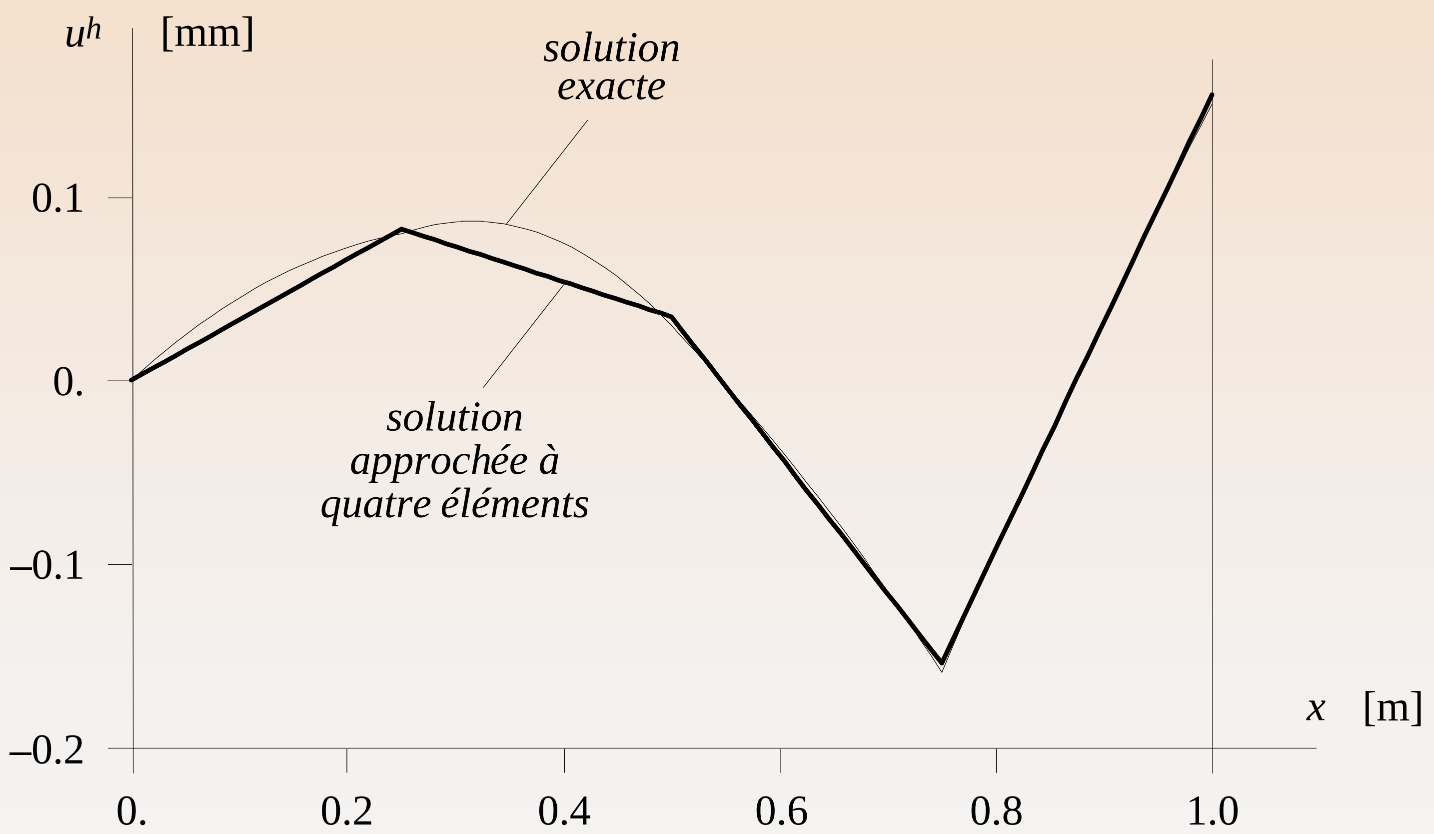
Exemple d'application de la méthode des éléments finis

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Application numérique
  - Longueur ℓ = 1 m
  - Section A = 100 mm^2
  - Module d'élasticité E = 2.1 10^{11} Pa
  - Coefficient de charge ρ = 1 10^8 N/m^2
  - Charge linéique q = 20 kN/m
  - Force ponctuelle interne Q = 50 kN
  - Force à l'extrémité libre P = 25 kN

! Unités

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires
  - Solutions nodales précises, mais différentes des valeurs exactes

    ! Perte de la superconvergence en raison du terme ρu
  - Condition aux limites naturelle approchée en $x = \ell$
  - Discontinuité de la déformation (pente) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ en $x = \ell/4$

    ! Discontinuité du module E (continuité de la contrainte)
  - Continuité de la déformation (pente) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ en $x = \ell/2$

    ! Discontinuité de la charge q n'affectant pas la pente
  - Discontinuité de la déformation (pente) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ en $x = 3\ell/4$

    ! Présence de la force ponctuelle Q

Exemple d’application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% ALLONGEMENT D'UNE BARRE SOUMISE A DES DISCONTINUITES
% Initialisation des variables
close all
clear all
syms E A L xsi le je dxsidx h H B p Q P rho Ke Me K re r
syms Kr rr q
nelem=4;
nnode=nelem+1;
% Test
t=idivide(int32(nelem),int32(4));
if 4*t~=nelem
    warning('nelem non multiple de 4')
    break
end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

```
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées
le=L/nelem;
je=le/2;
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul des matrices élémentaires de rigidité
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
Me=int(rho*(transpose(H)*H)*je,xsi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:t
    for j=1:2
        for k=1:2
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)
                                        +2*Ke(j,k)+Me(j,k);
        end
    end
    K
end
for i=t+1:nelem
    for j=1:2
        for k=1:2
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)
                                        +Ke(j,k)+Me(j,k);
        end
    end
    K
end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

```
% Calcul des vecteurs élémentaire et global des
% charges externes
r(1:nnode)=0;
re=int(H*p*je,xsi,-1,1)
for i=1:nelem/2
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+4*re(j);
    end
    r
end
for i=nelem/2+1:nelem
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
    r
end
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

```
% Correction du vecteur global des charges externes
r(3*t+1)=r(3*t+1)-Q
r(nnode)=r(nnode)+P
% Réduction du système d'équations
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
% Application numérique
L=1
A=100*(10^(-6))
E=2.1*(10^11)
rho=1*(10^8)
p=20000
Q=50000
P=25000
```

Exemple d'application (Matlab) : discontinuités dans une barre

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

```
% Résolution du système d'équations
Kr=eval(Kr)
rr=eval(rr)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
w(1:nnode)=0;
for i=2:nnode
    w(i)=q(i-1);
end
y=[0:1/nelem:1];
plot(y,1000*w)
xlabel('x/L');
ylabel('u [mm]');
```

moodle.epfl.ch : [discont.m] ⇒ \MATLAB\work