

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème

modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Orthogonalité (au sens du produit scalaire dans H^1) entre erreur $e^h = u - u^h$ et déplacement approché u^h
 - Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Forme faible exacte avec $\delta u = \delta u^h$ ($V^h \subset V$)

$$\begin{aligned} u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

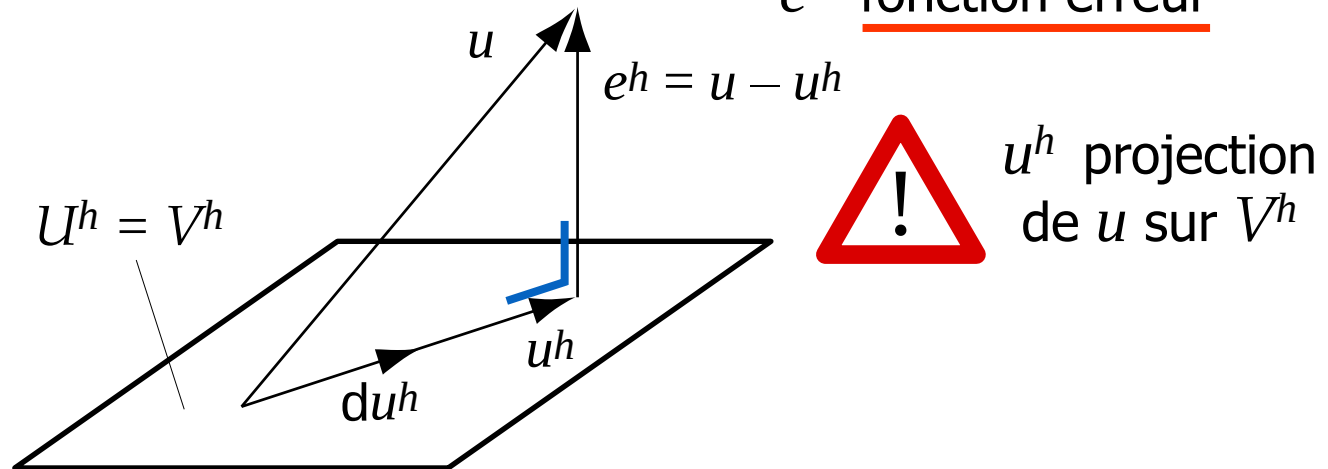
Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Soustraction des deux équations

$$\int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx$$

$$= \int_0^\ell \underline{EA \left(\frac{de^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx} = \textcircled{0} \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

e^h fonction erreur

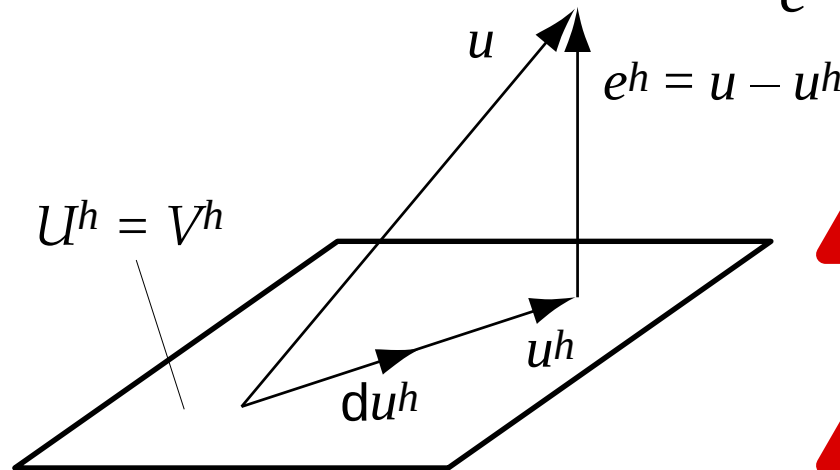


Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Soustraction des deux équations

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx \\ = \int_0^\ell EA \left(\frac{de^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx = 0 \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

e^h fonction erreur



u^h projection
de u sur V^h



u^h meilleure
approximation
de u dans U^h

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Soustraction des deux équations

$$\int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx$$

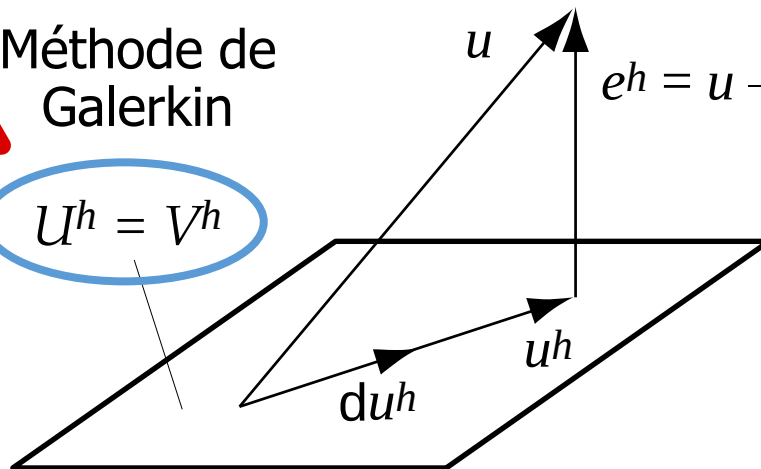
$$= \int_0^\ell EA \left(\frac{de^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx = 0 \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

e^h fonction erreur



Méthode de Galerkin

$$U^h = V^h$$



u^h projection de u sur V^h



u^h meilleure approximation de u dans U^h

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Meilleure approximation u^h de la solution cherchée u dans le sous-espace U^h
 - Norme de l'écart entre la solution u et le déplacement virtuel δu^h

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h + u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell [d(u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] [d(u^h - \delta u^h)/dx] dx \end{aligned}$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Meilleure approximation u^h de la solution cherchée u dans le sous-espace U^h
 - Norme de l'écart entre la solution u et le déplacement virtuel δu^h

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h + u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell [d(u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] [d(u^h - \delta u^h)/dx] dx \end{aligned}$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Insertion du déplacement virtuel $w^h = u^h - \delta u^h$ ($w^h \in V^h$)

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \\ & \quad + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (dw^h/dx) dx \end{aligned}$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Insertion du déplacement virtuel $w^h = u^h - \delta u^h$ ($w^h \in V^h$)

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \\ & \quad \text{---} + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (dw^h/dx) dx \end{aligned}$$

- Prise en compte de l'orthogonalité de la solution ($w^h \in V^h$)

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \end{aligned}$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Réorganisation de l'égalité

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx \\ = \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx - \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \end{aligned}$$

- Meilleure approximation dans le sous-espace

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx \\ \leq \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$



Optimalité des méthodes de Galerkin et des éléments finis

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Réorganisation de l'égalité

$$\int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx \quad \triangle ! \quad w^h = u^h - \delta u^h \in V^h$$
$$= \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx - \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx$$

- Meilleure approximation dans le sous-espace

$$\int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx$$
$$\leq \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$



Optimalité des méthodes de Galerkin et des éléments finis

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Précision locale optimale (valeurs nodales exactes de la solution) : superconvergence

Démonstration p. 38 du cours



Superconvergence liée à l'allure de la forme forte et au choix des fonctions de base

- Estimations asymptotiques d'erreur
 - Rappel de la définition de l'erreur d'approximation

$$e^h(x) = u(x) - u^h(x)$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Norme maximale de l'erreur (norme C^0)

$$\|e^h\|_0 = \max_{0 \leq x \leq \ell} |e^h|$$

- Norme euclidienne de l'erreur (norme H^0)

$$\|e^h\|_0 = \left[\int_0^\ell (e^h)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Norme énergétique de l'erreur (norme H^1)

$$\|e^h\|_1 = \left[\int_0^\ell \underbrace{(e^h)^2}_{\text{erreur sur le déplacement}} + \underbrace{(de^h/dx)^2}_{\text{erreur sur la déformation}} dx \right]^{1/2}$$


Dimensions
de $\|e^h\|_1$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

 $\| e^h \|_E \not\rightarrow 0$
si $e^h \rightarrow 0$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Estimations asymptotiques de l'erreur

$$\| e^h \|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad k \text{ type de norme}$$

C_k facteur de convergence

p taux de convergence ($p = m + 1 - k$)

m degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base $h_i(x)$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Estimations asymptotiques de l'erreur

$$\| e^h \|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad k \text{ type de norme}$$

C_k facteur de convergence

p taux de convergence ($p = m + 1 - k$)

m degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base $h_i(x)$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Estimations asymptotiques de l'erreur

$$\| e^h \|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad k \text{ type de norme}$$

C_k facteur de convergence

p taux de convergence ($p = m + 1 - k$)

m degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base $h_i(x)$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Estimations asymptotiques de l'erreur

$$\| e^h \|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad k \text{ type de norme}$$

C_k facteur de convergence

p taux de convergence ($p = m + 1 - k$)

m degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base $h_i(x)$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Semi-norme de l'énergie de déformation (norme H_E^1 de l'erreur)

$$\| e^h \|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2}$$

- Estimations asymptotiques de l'erreur

$$\| e^h \|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad k \text{ type de norme}$$

C_k facteur de convergence

p taux de convergence ($p = m + 1 - k$)

m degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base $h_i(x)$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e \ell$)

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Estimations d'erreur *a priori* avec des fonctions de base linéaires

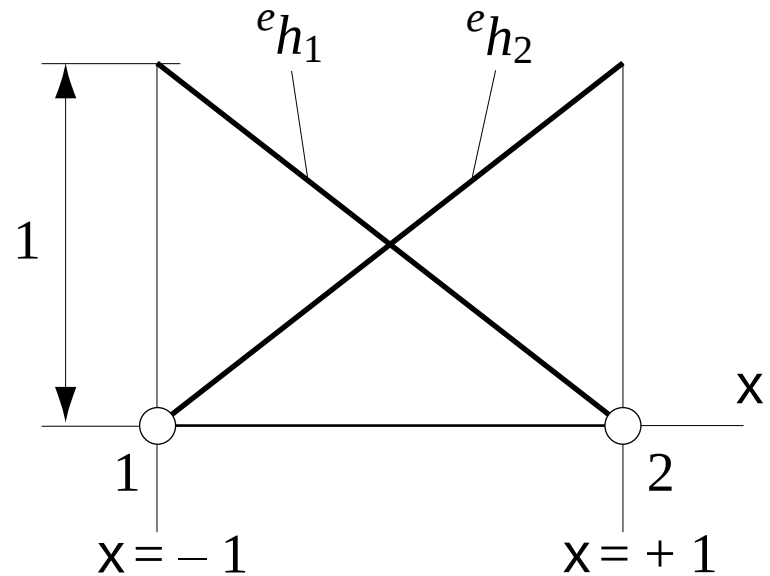
$$\begin{aligned} m &= 1 \\ p &= 2 - k \end{aligned}$$

$$\| e^h \|_0 \leq C_0 h^2$$

$$\| e^h \|_E \leq C_E h$$

$$\| e^h \|_1 \leq C_1 h$$

$$(\| e^h \|_0 \leq C_0' h^2)$$



Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

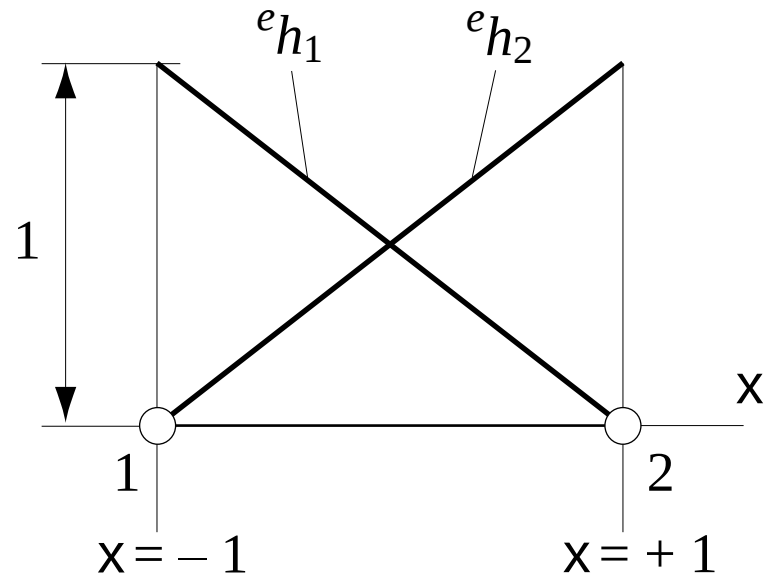
- Estimations d'erreur *a priori* avec des fonctions de base linéaires

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ p &= 2 - k \end{aligned}$$

$$\|e^h\|_0 \leq C_0 h^2$$

$$\|e^h\|_E \leq C_E h$$

$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h$$



Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

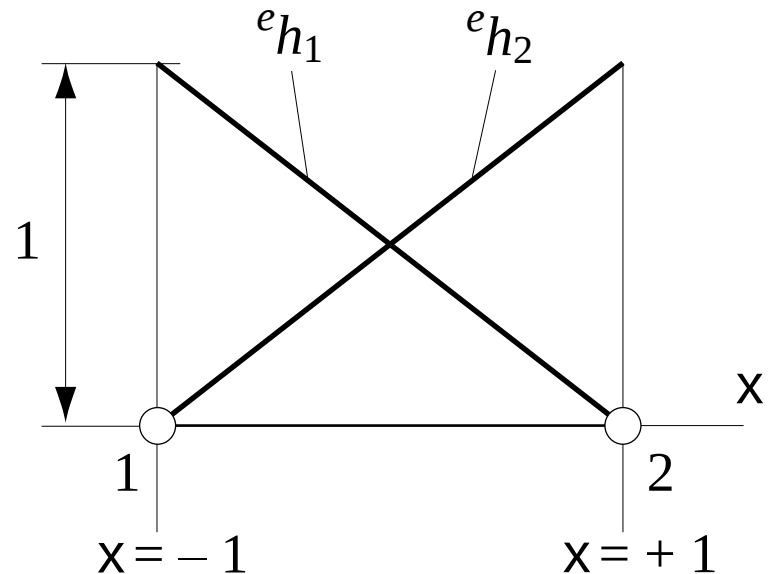
- Estimations d'erreur *a priori* avec des fonctions de base linéaires

$$m = 1$$
$$p = 2 - k$$

$$\|e^h\|_0 \leq C_0 h^2$$

$$\|e^h\|_E \leq C_E h$$

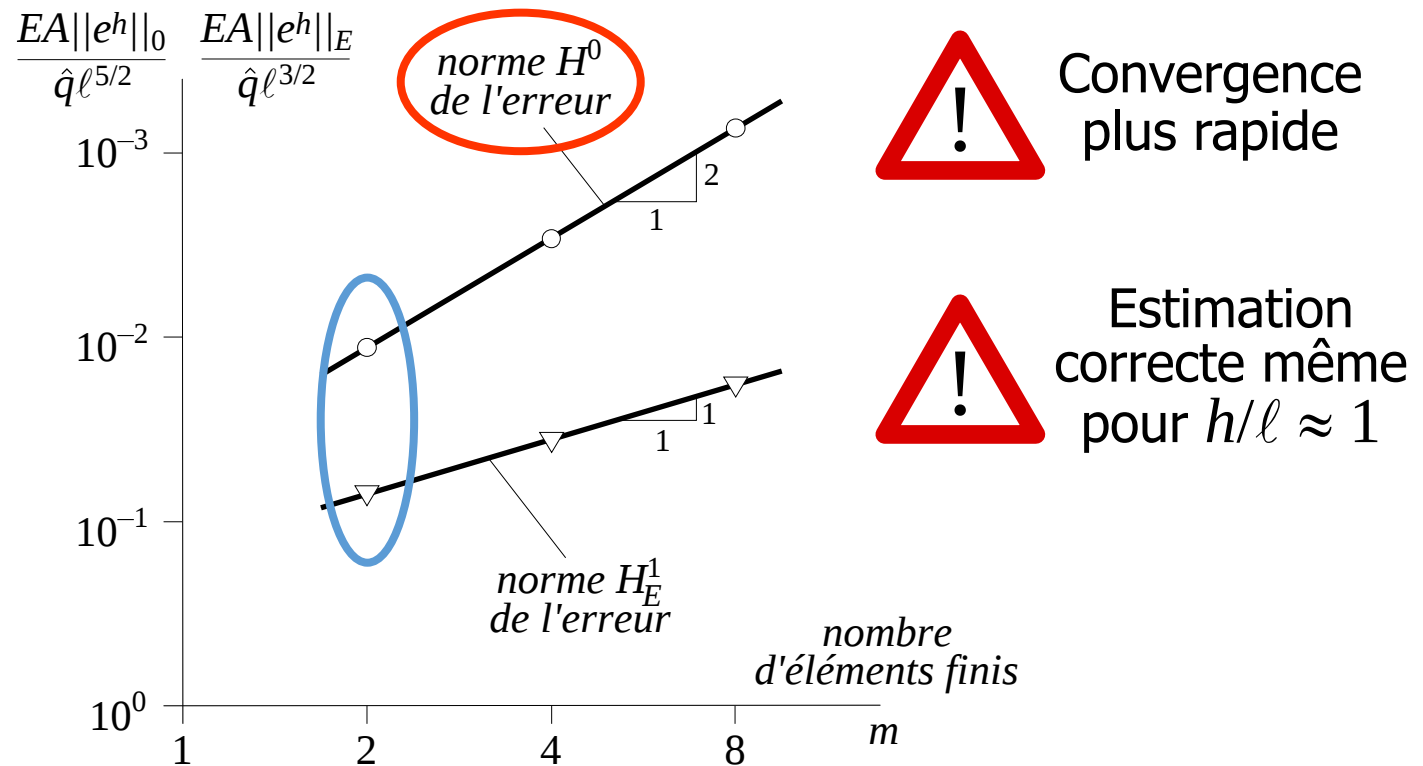
$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h$$



Taux de convergence
déplacement $\Leftrightarrow$ déformation

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

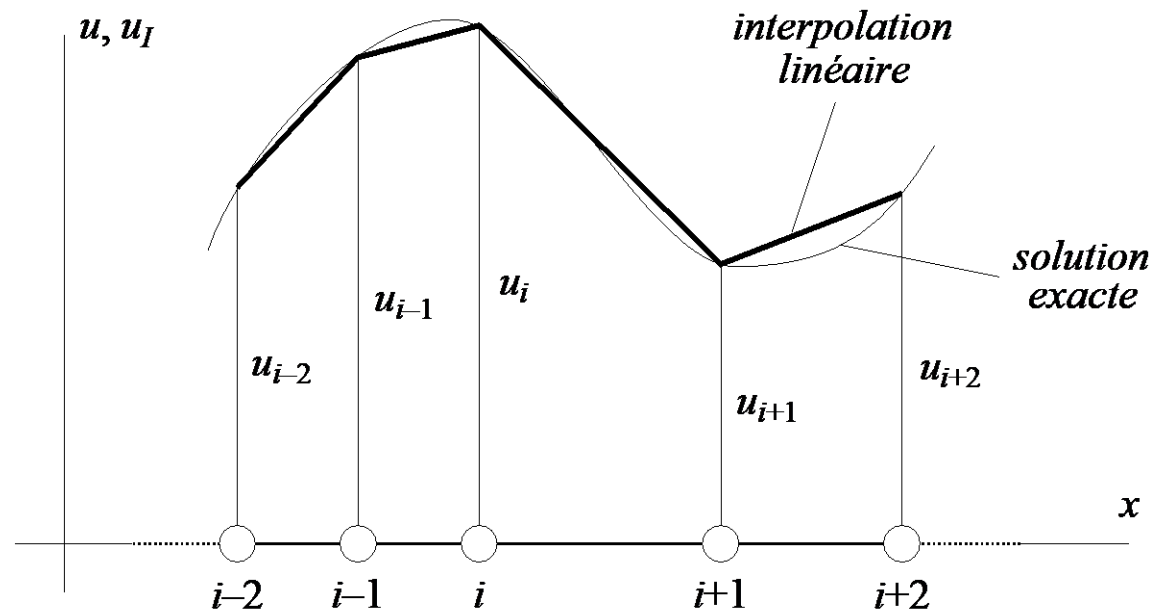
- Exemple : problème de la barre soumise à une charge répartie



Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Etablissement de la norme énergétique de l'erreur
 - Interpolation linéaire du déplacement (solution exacte aux nœuds)

$$u_I(x_i) = u(x_i) = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$



Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Décomposition en série de Fourier du résidu entre solution exacte et interpolation nodale entre deux nœuds successifs

$$\rho(x) = u(x) - u_I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{e_\ell} \quad (0 \leq x \leq e_\ell)$$

e_ℓ longueur de l'élément fini

- Norme des dérivées première et seconde de la fonction résidu

$$\int_0^{e_\ell} (d\rho/dx)^2 dx = \frac{e_\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{e_\ell} \right)^2 a_m^2$$

$$\int_0^{e_\ell} (d^2\rho/dx^2)^2 dx = \frac{e_\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{e_\ell} \right)^4 a_m^2$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Inégalité de Poincaré-Friedrich ($m \leq m^2$ pour $m \geq 1$)

$$\left(\frac{m\pi}{e_\ell}\right)^2 a_m^2 \leq \frac{e_\ell^2}{\pi^2} \left(\frac{m\pi}{e_\ell}\right)^4 a_m^2 \quad (m \geq 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{e_\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{e_\ell^2}{\pi^2} \int_0^{e_\ell} (d^2\rho/dx^2)^2 dx$$

- Caractérisation de la norme de la dérivée du résidu (élément $^e\Omega$)

$$\int_0^{e_\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{e_\ell^2}{\pi^2} \int_0^{e_\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad \triangle ! \quad \begin{matrix} u_I(x) \\ \text{linéaire} \end{matrix}$$

$$\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{e_\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (h = \max_e e_\ell)$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Extension de la caractérisation de la norme à l'ensemble du réseau

$$\int_0^\ell (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx$$

- Caractérisation analogue de la norme du résidu

$$\int_0^\ell \rho^2 dx \leq \frac{h^4}{\pi^4} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx$$

- Norme énergétique de la fonction résidu

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{h^2}{\pi^2}\right) \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (h/\ell \ll 1) \end{aligned}$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Norme énergétique de l'erreur entre solution exacte et déplacement approché (norme H^1)

$$\int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx \leq \int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx$$

$$\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx$$



Meilleure
approximation
possible

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Norme énergétique de l'erreur entre solution exacte et déplacement approché (norme H^1)

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx &\leq \int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|e^h\|_1^2 \leq \|\rho\|_1^2 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|d^2u/dx^2\|_0^2 C_1^2$$

Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

- Norme énergétique de l'erreur entre solution exacte et déplacement approché (norme H^1)

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx &\leq \int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \end{aligned}$$

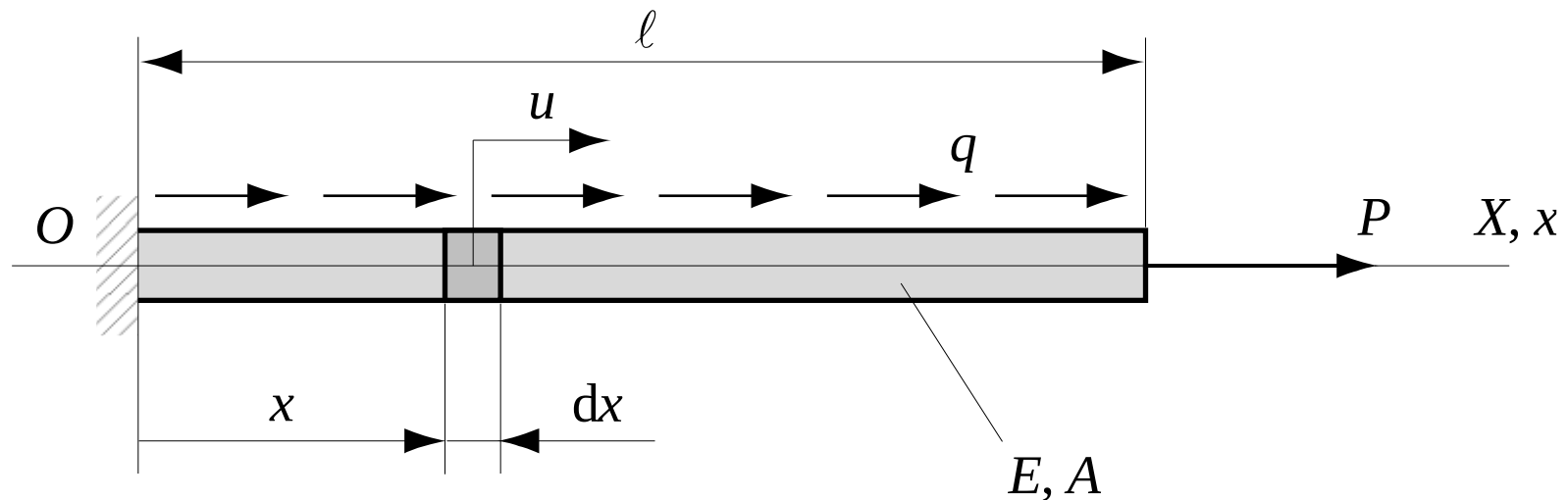
$$\Rightarrow \|e^h\|_1^2 \leq \|\rho\|_1^2 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|d^2u/dx^2\|_0^2$$

$$\Rightarrow \|e^h\|_1 \leq C_1 h \quad (h/\ell \ll 1)$$

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Energie potentielle totale (fonctionnelle) du système

$$J(w) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\ell EA (dw/dx)^2 dx}_{\text{énergie de déformation}} - \underbrace{\left[\int_0^\ell q w dx + P w(\ell) \right]}_{\text{travail des forces externes}}$$



Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Approche variationnelle

- Minimisation de la fonctionnelle

$$J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in U$$



Condition aux
limites essentielle
 $\rightarrow \delta w(0) = 0$

- Variation première de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \delta J(w) &= \int_0^\ell EA \, (dw/dx) \, (d\delta w/dx) \, dx \\ &\quad - \left[\int_0^\ell q \, \delta w \, dx + P \, \delta w(\ell) \right] \\ &= - \int_0^\ell [EA \, (d^2w/dx^2) + q] \, \delta w \, dx \\ &\quad + [EA \, (dw/dx) \big|_{x=\ell} - P] \, \delta w(\ell) \end{aligned}$$

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Stationnarité de la fonctionnelle

$$\delta J(w = u) = 0 \quad \forall w \in U$$

$$\Rightarrow EA (d^2w/dx^2) + q = 0$$

$$EA (dw/dx) \Big|_{x=\ell} - P = 0$$

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Stationnarité de la fonctionnelle

$$\delta J(w = u) = 0 \quad \forall w \in U$$

$$\Rightarrow EA (d^2 w / dx^2) + q = 0$$

$$EA (dw / dx) \Big|_{x=\ell} - P = 0$$

équations
d'Euler-Lagrange



Equivalence de la formulation
variationnelle et de la forme forte

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Méthode de Ritz-Galerkin
 - Approximation de Ritz-Galerkin

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x)$$



Analogie avec
la méthode de
Galerkin

- Fonctionnelle approchée

$$J(w^h) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (dw^h/dx)^2 dx \\ - \left[\int_0^\ell q w^h dx + P w^h(\ell) \right]$$

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Insertion de l'approximation dans la fonctionnelle approchée



Analogie avec
la formule de
Clapeyron

$$J(w^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i k_{ij} \alpha_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$$

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA (dh_i/dx) (dh_j/dx) dx$$

$$r_i = h_i(\ell) P + \int_0^\ell h_i q dx$$

- Minimisation de la fonctionnelle approchée

$$\partial J(w^h = u^h) / \partial \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



Analogie avec
la méthode
des éléments
finis

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Interprétation physique de la forme variationnelle approchée
 - Surestimation de l'énergie potentielle totale J

$$J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in U$$

$$\Rightarrow J(u) \leq J(u^h) \quad \forall u^h \in U^h$$

- Energie potentielle totale au point de stationnarité ($w = u$)

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (du/dx)^2 dx - \int_0^\ell q u dx - P u(\ell)$$

- Forme faible au point de stationnarité ($\delta u = u$)

$$\int_0^\ell EA (du/dx)^2 dx = \int_0^\ell q u dx + P u(\ell)$$

Forme variationnelle du problème modèle de la barre

- Lien entre énergie potentielle totale J et énergie de déformation U

$$J(u) = -\frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = -U(u)$$

- Sous-estimation de l'énergie de déformation U

$$J(u) \leq J(u^h) \quad \forall u^h \in U^h$$

$$\Rightarrow U(u) \geq U(u^h) \quad \forall u^h \in U^h$$



Sous-estimation
des déplacements



Surestimation
de la rigidité