Méthode des éléments finis

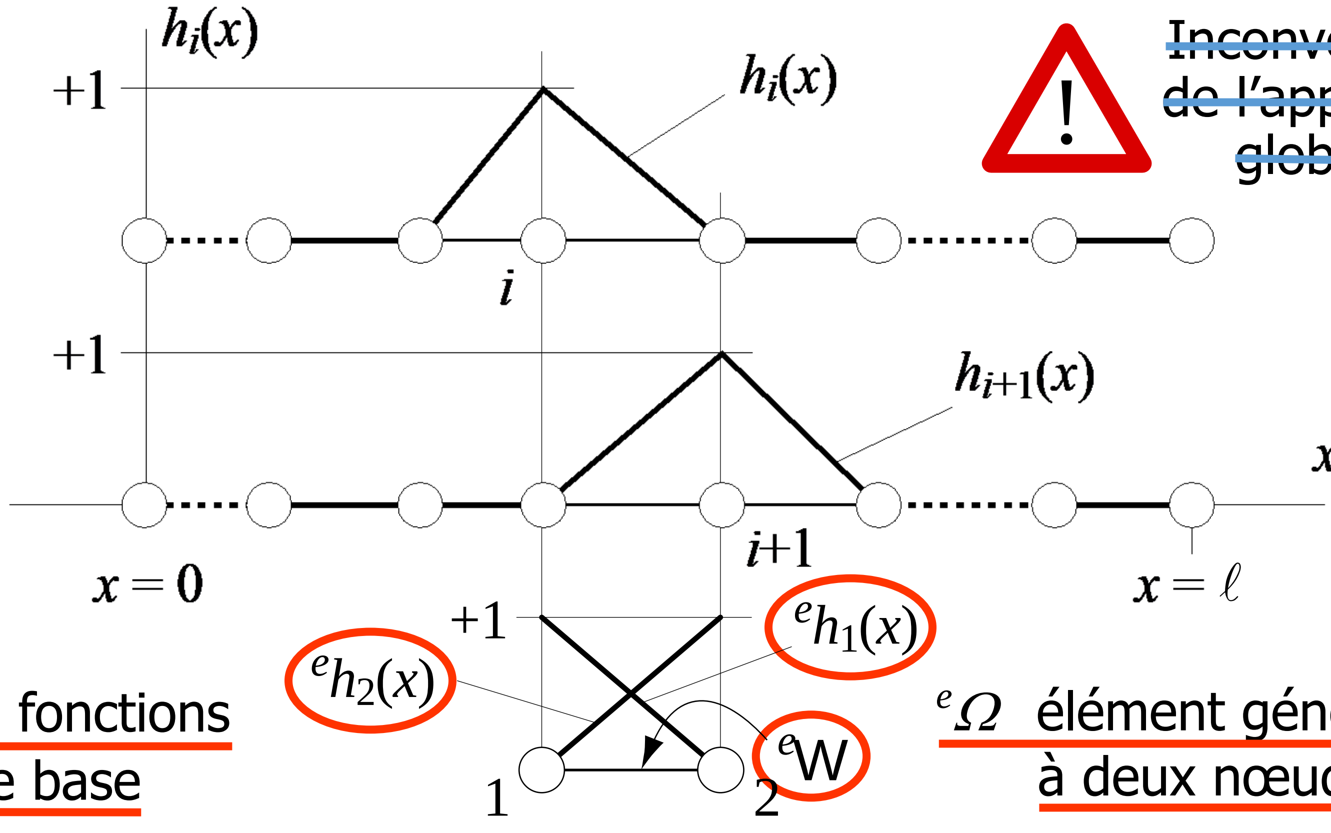
Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractère compact des fonctions de forme nodales

~~Inconvénient de l'approche globale~~

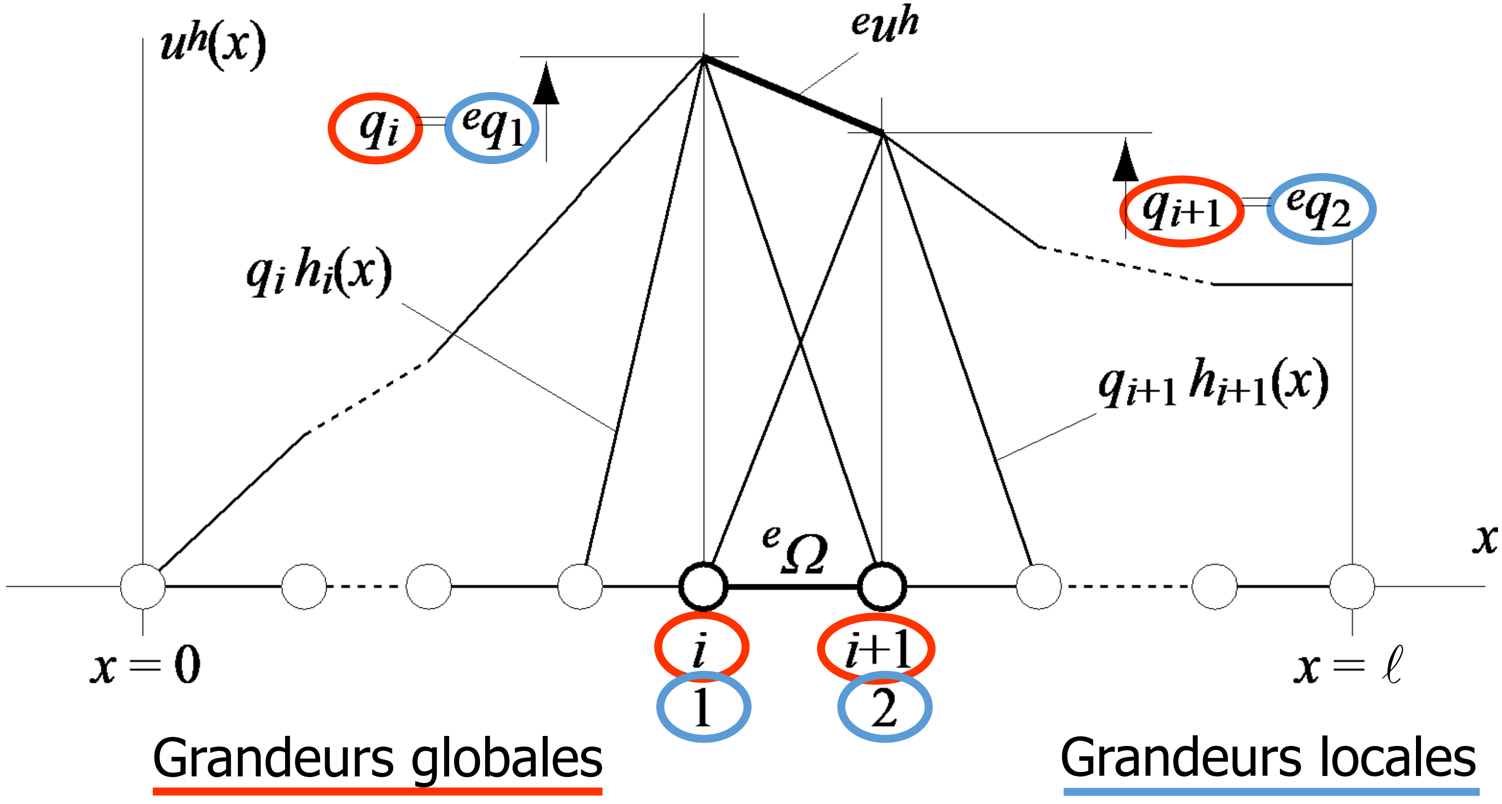


$^eh_i(x)$ fonctions de base

$^e\Omega$ élément générique à deux nœuds

Méthode des éléments finis : approche locale

- Restriction de la solution u^h sur l'élément fini générique ${}^e\Omega$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractérisation de la restriction ${}^{e}u^{h}$ de la solution u^{h} sur l'élément fini générique ${}^{e}\Omega$

$$ {}^{e}u^{h}(x) = \sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}h_i(x)\, {}^{e}q_i = {}^{e}\mathbf{H}(x)\, {}^{e}\mathbf{q} $$

${}^{e}p$ nombre de nœuds de l'élément ${}^{e}\Omega$

$$ {}^{e}\mathbf{H} = [{}^{e}h_1, {}^{e}h_2, \ldots, {}^{e}h_i, \ldots, {}^{e}h_{{}^{e}p}] $$

matrice $(1\times{}^{e}p)$ des fonctions de base de l'élément ${}^{e}\Omega$

$$ {}^{e}\mathbf{q} = \{{}^{e}q_1, {}^{e}q_2, \ldots, {}^{e}q_i, \ldots, {}^{e}q_{{}^{e}p}\}^{\mathrm{T}} $$

vecteur $({}^{e}p\times 1)$ des déplacements nodaux de l'élément ${}^{e}\Omega$

Méthode des éléments finis : approche locale

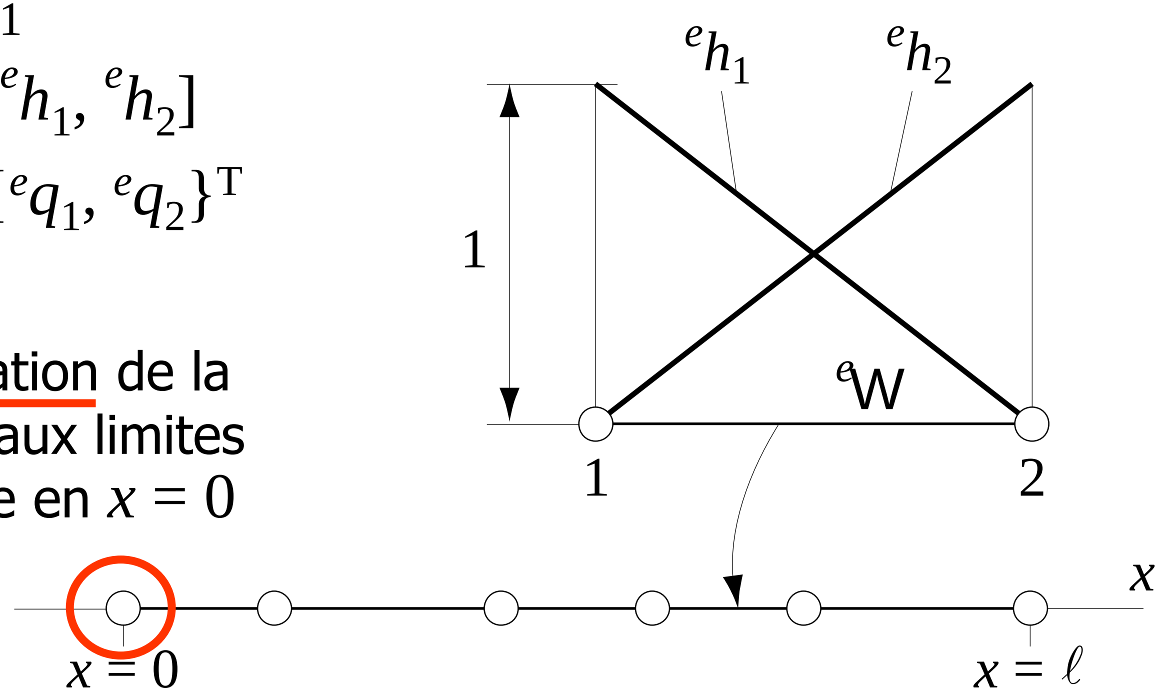
- Restriction de la solution sur un élément fini à deux nœuds

$$ {}^{e}u^{h}(x) = \sum_{i=1}^{2} {}^{e}h_i(x)\, {}^{e}q_i = {}^{e}\mathbf{H}(x)\, {}^{e}\mathbf{q} $$

$$ {}^{e}\mathbf{H} = [{}^{e}h_1, {}^{e}h_2] $$

$$ {}^{e}\mathbf{q} = \{{}^{e}q_1, {}^{e}q_2\}^{\mathrm{T}} $$

Neutralisation de la condition aux limites essentielle en $x = 0$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Localisation des déplacements nodaux

$$ {}^e\mathbf{q} = {}^e\mathbf{L}\,\mathbf{q} $$

$$ {}^e\mathbf{L} = \begin{bmatrix} {}^e\ell_{11} & {}^e\ell_{12} & \cdots & {}^e\ell_{1,p} \\ {}^e\ell_{21} & {}^e\ell_{22} & \cdots & {}^e\ell_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^e\ell_{{}^ep,1} & {}^e\ell_{{}^ep,2} & \cdots & {}^e\ell_{{}^ep,p} \end{bmatrix} $$

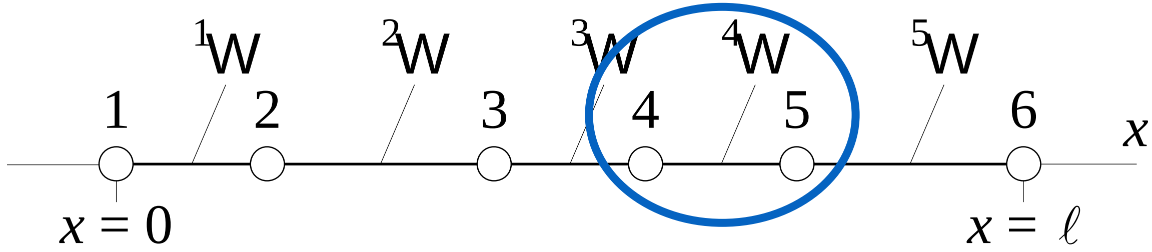
p = nombre total de nœuds (point nodal "0" compris)

matrice $({}^ep \times p)$ booléenne de localisation

Matrice ${}^e\mathbf{L}$ très peu peuplée $\Rightarrow$ Condensation de la localisation sous la forme d'un tableau de connectivité

Méthode des éléments finis : approche locale

- Exemple de localisation et tableau de connectivité associé



$$
{}^{4}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

pour l'élément fini ${}^{4}\Omega$

numérotation locale

${}^{e}W$	${}^{1}W$	${}^{2}W$	${}^{3}W$	${}^{4}W$	${}^{5}W$
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6

numérotation globale

Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères de convergence à satisfaire par les fonctions ${}^{e}h_i(x)$
  - Critère de complétude
  - Critère de différentiabilité
  - Critère de continuité

Critères identiques à ceux de l'approche globale

- Critères de continuité restreinte

$$ {}^{e}h_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, {}^{e}p) $$

  - Critère de déplacement rigide $\displaystyle\sum_{i=1}^{{}^{e}p} {}^{e}h_i(x) = 1$
  - Critère de déformation constante $\displaystyle\sum_{i=1}^{{}^{e}p} [\mathrm{d}^{e}h_i(x)/\mathrm{d}x] = 0$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des grandeurs élémentaires
  - Rappel de la forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = P\,\delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q\,\delta u^h\,\mathrm{d}x \quad \forall\ \delta u^h \in V^h$$

  - Prise en compte de l'additivité de l'intégration (m éléments finis)

$$\sum_{e=1}^{m} \left(\int_{{}^e\Omega} {}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^eu^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\delta u^h/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - P\,{}^e\delta u^h(\ell)\,\delta_{em} - \int_{{}^e\Omega} {}^eq\,{}^e\delta u^h\,\mathrm{d}x \right) = 0 \quad \forall\ \delta u^h$$

~~Inconvénient de l'approche globale~~

Restriction à l'élément ${}^e\Omega$

Condition aux limites naturelle

Méthode des éléments finis : approche locale

- Insertion de l'approximation locale

$$\begin{aligned} {}^e u^h &= {}^e\mathbf{H}\ {}^e\mathbf{q} \\ {}^e\delta u^h &= {}^e\mathbf{H}\ {}^e\delta\mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\sum_{e=1}^{m} {}^e\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \left(\int_{{}^e\Omega} {}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \cdot {}^e\mathbf{q} - {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P\,\delta_{em} - \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^eq\,\mathrm{d}x \right) = 0 \quad \forall\ \delta u^h$$

- Insertion de la localisation des déplacements

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{q} &= {}^e\mathbf{L}\ \mathbf{q} \\ {}^e\delta\mathbf{q} &= {}^e\mathbf{L}\ \delta\mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\sum_{e=1}^{m} \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\,{}^e\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \left(\int_{{}^e\Omega} {}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \cdot {}^e\mathbf{L}\ \mathbf{q} - {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P\,\delta_{em} - \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^eq\,\mathrm{d}x \right) = 0 \quad \forall\ \delta\mathbf{q}$$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Forme faible discrète locale $\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r}$

$$\sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \left(\int_{{}^e\Omega} {}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}{}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \right) {}^e\mathbf{L} \cdot \mathbf{q}$$

matrice de rigidité **K**

$$= \sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \left({}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P\,\delta_{em} + \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,{}^eq\,\mathrm{d}x \right)$$

vecteur des forces appliquées **r**

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,{}^e\mathbf{K}\,{}^e\mathbf{L}$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,{}^e\mathbf{r}$$

grandeurs élémentaires

Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire (${}^e p \times {}^e p$) de rigidité

$$ {}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} {}^eE\,{}^eA\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\,{}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x $$

- Vecteur élémentaire (${}^e p \times 1$) des forces extérieures

$$ {}^e\mathbf{r} = {}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}(\ell)\,P\,\delta_{em} + \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^\mathrm{T}\,{}^eq\,\mathrm{d}x $$

- Opération d'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires

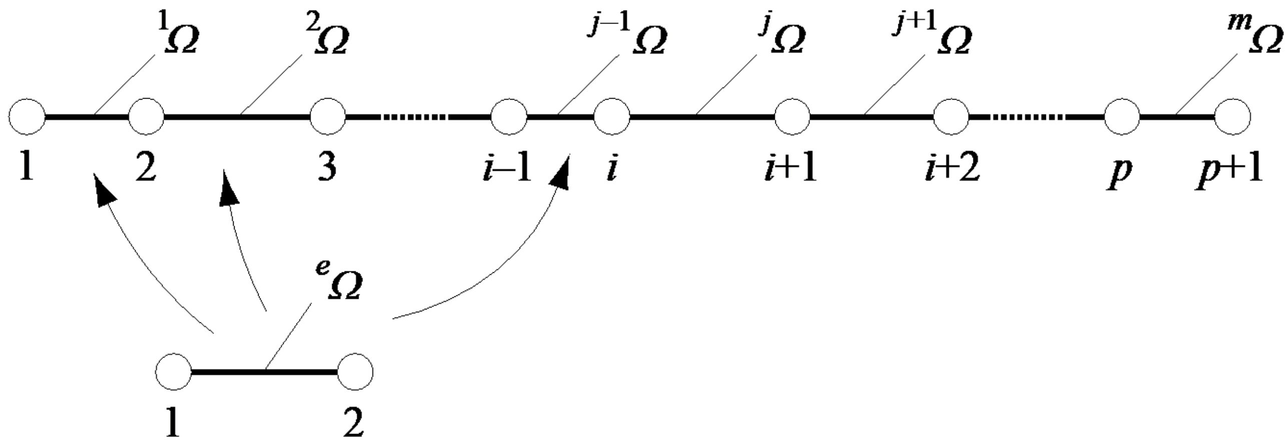
$$ \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^\mathrm{T}\,{}^e\mathbf{K}\,{}^e\mathbf{L} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{K} $$

$$ \mathbf{r} = \sum_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{L}^\mathrm{T}\,{}^e\mathbf{r} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{m} {}^e\mathbf{r} $$

A opérateur d'assemblage

Méthode des éléments finis : approche locale

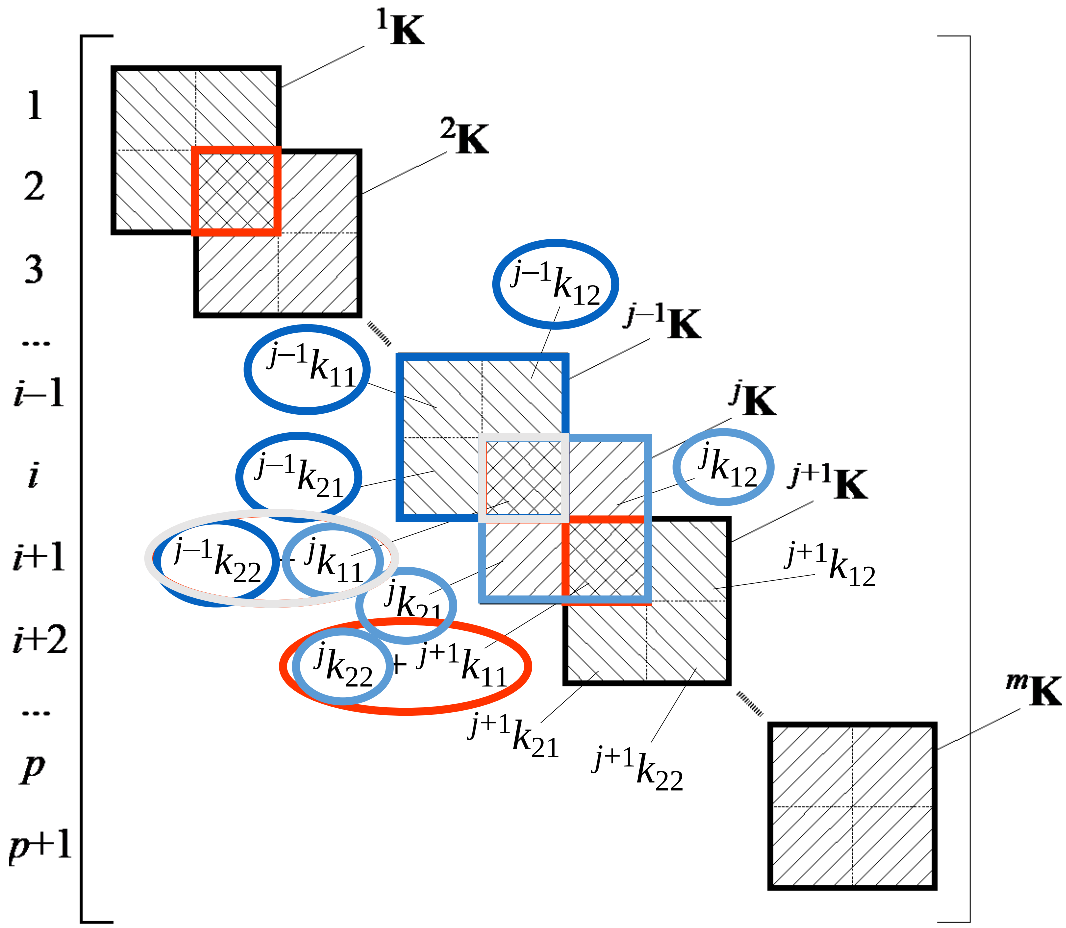
- Exemple d’assemblage d’éléments finis à deux points nodaux



${}^{e}\Omega$	${}^{1}\Omega$	${}^{2}\Omega$	...	${}^{j-1}\Omega$	${}^{j}\Omega$	${}^{j+1}\Omega$	...	${}^{m}\Omega$
1	1	2	...	$i-1$	i	$i+1$	...	p
2	2	3	...	i	$i+1$	$i+2$	...	$p+1$

Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage schématique de la matrice de rigidité globale



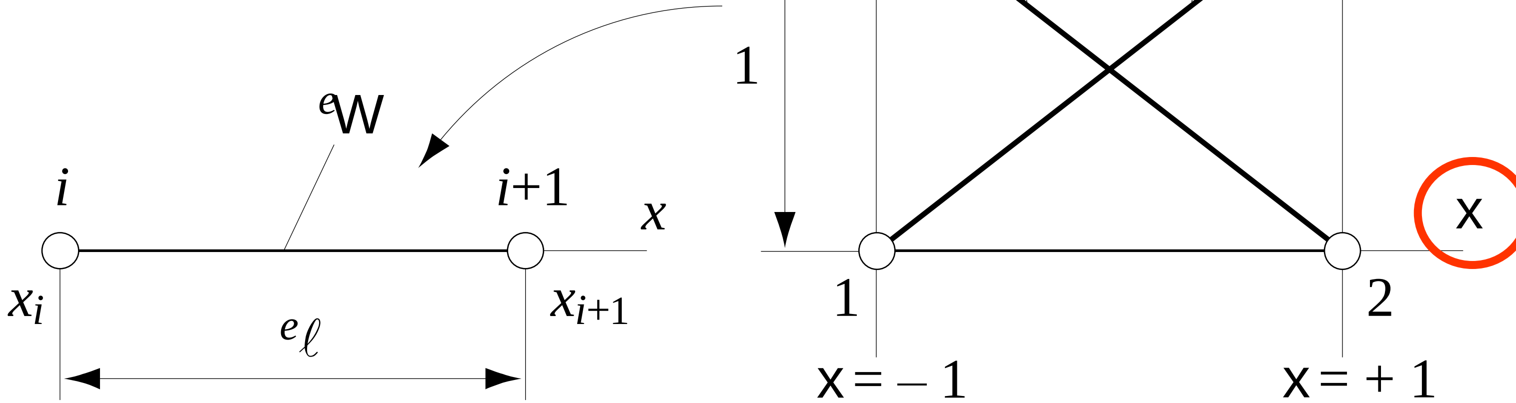
Sommation des termes communs

Structure en forme de bande

Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice de rigidité d’un élément fini à deux points nodaux
  - Changement de repère

$$\xi = \frac{1}{e_\ell}\left(2x - x_i - x_{i+1}\right)$$



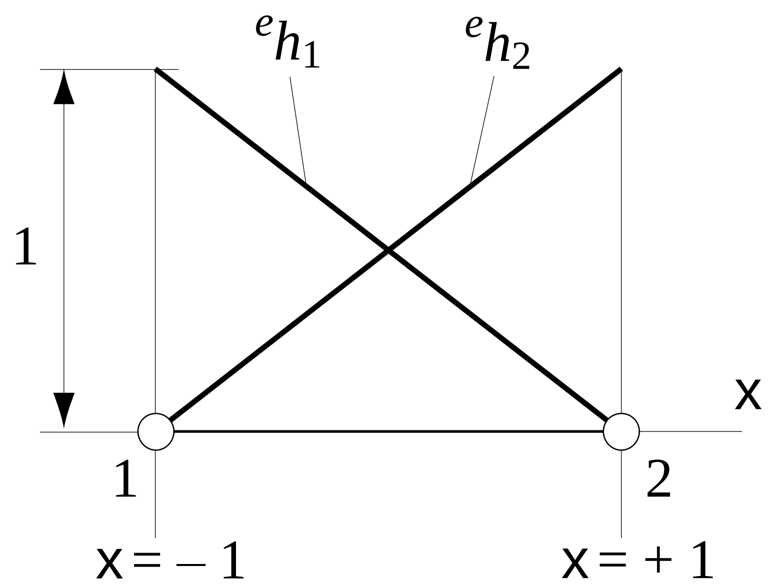
ξ coordonnée naturelle ou intrinsèque

Méthode des éléments finis : approche locale

- Fonctions de base linéaires de l’élément

$$ {}^{e}h_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) $$

$$ {}^{e}h_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) $$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Composantes de la matrice de rigidité

$$
\begin{aligned}
{}^{e}k_{11} &= \int_{{}^{e}\Omega} {}^{e}E\, {}^{e}A\, (\mathrm{d}\,{}^{e}h_1/\mathrm{d}x)^2\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{{}^{e}\Omega} {}^{e}E\, {}^{e}A\, (\mathrm{d}\,{}^{e}h_1/\mathrm{d}\xi)^2 (\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x)^2\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{+1} {}^{e}E\, {}^{e}A \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{{}^{e}\ell}\right)^2 \frac{{}^{e}\ell}{2}\, \mathrm{d}\xi \;=\; {}^{e}E\, {}^{e}A \,/\, {}^{e}\ell
\end{aligned}
$$

$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/{}^{e}\ell \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x = 2/{}^{e}\ell \;;\; \mathrm{d}x = ({}^{e}\ell/2)\, \mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
{}^{e}k_{12} = {}^{e}k_{21} &= \int_{{}^{e}\Omega} {}^{e}E\, {}^{e}A\, (\mathrm{d}\,{}^{e}h_1/\mathrm{d}x)\, (\mathrm{d}\,{}^{e}h_2/\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}x \\
&= -\, {}^{e}E\, {}^{e}A \,/\, {}^{e}\ell
\end{aligned}
$$

$${}^{e}k_{22} = \int_{{}^{e}\Omega} {}^{e}E\, {}^{e}A\, (\mathrm{d}\,{}^{e}h_2/\mathrm{d}x)^2\, \mathrm{d}x = {}^{e}E\, {}^{e}A \,/\, {}^{e}\ell$$

Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire de rigidité

$$ {}^{e}\mathbf{K} = \frac{{}^{e}E\,{}^{e}A}{{}^{e}\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} $$

⚠ Matrice (2×2) singulière

⚠ Critère de déplacement rigide

⚠ Matrice indépendante de la position de l'élément fini dans le réseau

⚠ Paramètres de la matrice : matériau $({}^{e}E)$ et géométrie $({}^{e}A, {}^{e}\ell)$ de l'élément fini

Méthode des éléments finis : approche locale

- Système d'équations linéaires $\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdots \\ p \\ p+1
\end{array}
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & & & & \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & & & \\
 & k_{32} & k_{33} & \ddots & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & & k_{p,p} & k_{p,p+1} \\
 & & & & k_{p+1,p} & k_{p+1,p+1}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdots \\ q_p \\ q_{p+1}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \cdots \\ r_p \\ r_{p+1}
\end{Bmatrix}
$$

Matrice $\mathbf{K}$ singulière

Méthode des éléments finis : approche locale

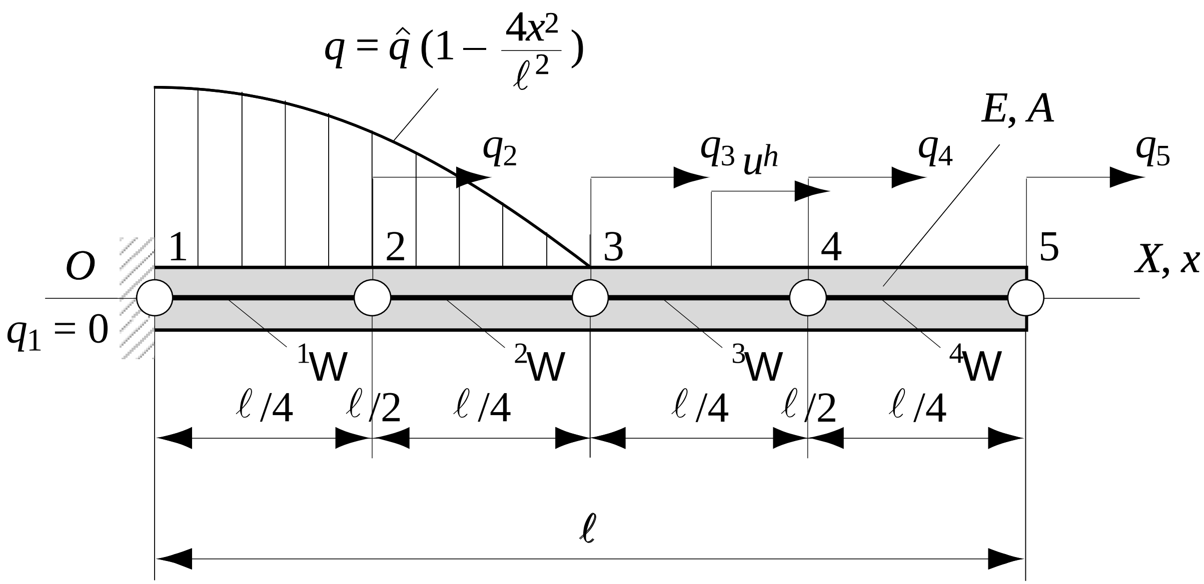
- Prise en compte de la condition aux limites essentielle en $x = 0$

$\delta q_1 = 0$

$$\begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ \dots\\ p\\ p+1 \end{array} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ & k_{32} & k_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & k_{p,p} & k_{p,p+1} \\ & & & k_{p+1,p} & k_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\\ \dots\\ q_p\\ q_{p+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ \dots\\ r_p\\ r_{p+1} \end{Bmatrix}$$

$q_1 = 0$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à une charge répartie
et subdivisée en quatre éléments finis identiques

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de rigidité

$$ {}^{e}\mathbf{K} = \frac{{}^{e}E\,{}^{e}A}{{}^{e}\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} $$

- Assemblage de la matrice globale de rigidité

$$ {}^{e}\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} $$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Composantes du vecteur élémentaire des forces externes

$${}^{e}r_i = \int_{{}^{e}\Omega} \hat{q}\,\left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) {}^{e}h_i \,\mathrm{d}x \qquad (i = 1, 2)$$

Mélange de grandeurs globales et locales

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes

$$ {}^1r_1 = \int_0^{\ell/4} \hat{q}\,(1 - \frac{4x^2}{\ell^2})\,\frac{1}{2}[1 - (\frac{8x}{\ell} - 1)]\,\mathrm{d}x = 23\hat{q}\ell/192 $$

$$ {}^1r_2 = \int_0^{\ell/4} \hat{q}\,(1 - \frac{4x^2}{\ell^2})\,\frac{8x}{2\ell}\,\mathrm{d}x = 7\hat{q}\ell/64 $$

$$ {}^1r_1 = \int_{-1}^{1} \hat{q}\,\{1 - \frac{4}{\ell^2}[\frac{\ell}{8}(1+\xi)]^2\}\,\frac{1}{2}(1-\xi)\,\frac{\ell}{8}\,\mathrm{d}\xi = 23\hat{q}\ell/192 $$

$$ {}^2r_1 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q}\,(1 - \frac{4x^2}{\ell^2})\,\frac{1}{2}[1 - (\frac{8x}{\ell} - 3)]\,\mathrm{d}x = 13\hat{q}\ell/192 $$

! $\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/{}^e\ell \Rightarrow \xi = (8x/\ell) - 1$ pour ${}^1\Omega$

! Termes dépendant de la position de l'élément fini

! Intégration locale possible

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$$ {}^{2}r_{2} \;=\; \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q}\,\left(1-\frac{4x^{2}}{\ell^{2}}\right)\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{8x}{\ell}-3\right)\right]\mathrm{d}x \;=\; 7\hat{q}\ell/192 $$

$$ {}^{3}r_{1} \;=\; {}^{3}r_{2} \;=\; {}^{4}r_{1} \;=\; {}^{4}r_{2} \;=\; 0 $$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$ \mathbf{r} \;=\; \frac{\hat{q}\ell}{192}\,\{23,\; 34,\; 7,\; 0,\; 0\}^{\mathrm{T}} $$

- Vecteur des forces externes

$$ \mathbf{r} \;=\; \frac{\hat{q}\ell}{192}\,\{23,\; 34,\; 7,\; 0,\; 0\}^{\mathrm{T}} $$

Conservation de la charge totale

Exemple d’application de la méthode des éléments finis

- Système d’équations linéaires

$$\frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192}\begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Système singulier

Prise en compte de l’encastrement au nœud 1

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système réduit d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192}\begin{Bmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Résolution du système par la méthode d'élimination de Cholesky

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Solutions nodales

$$q_2 = 41\hat{q}\ell^2/(768EA)$$

$$q_3 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

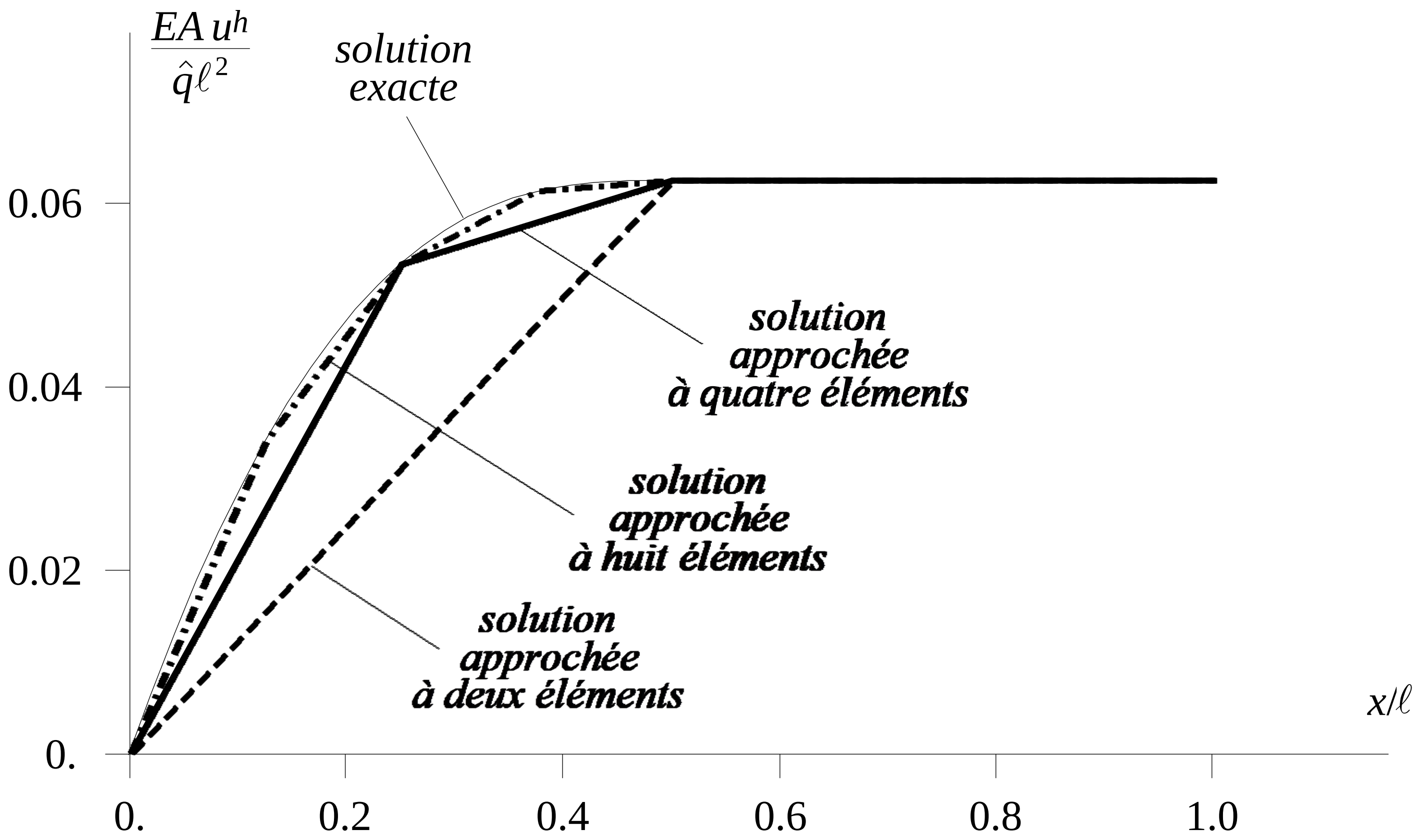
$$q_4 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

$$q_5 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

- Déplacement approché

$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell^2}{EA}\{0.05339\, h_2(x) + 0.0625\, h_3(x)$$
$$+ 0.0625\, h_4(x) + 0.0625\, h_5(x)]\}$$

Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires
  - Accroissement de la précision globale avec le nombre p d'éléments finis du réseau
  - Solution exacte en $x = 0$

    Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation u^h
  - Solutions nodales exactes

    Superconvergence (résultat non généralisable)
  - Condition aux limites naturelle exacte en $x = \ell$

    Approximation linéaire (résultat non généralisable)

Exemple d’application (Matlab) : allongement d’une barre

```
% ALLONGEMENT D'UNE BARRE DISCRETISEE EN ELEMENTS
LINEAIRES
% Initialisation des variables
close all
clear all
syms E A L xsi le je dxsidx h H B Q Ke K re r
syms Kr rr q
nelem=4;
nnode=nelem+1;
% Test
t=idivide(int32(nelem),int32(2));
if 2*t~=nelem
    warning('nelem impair')
    break
end
```

Exemple d’application (Matlab) : allongement d’une barre

```
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées
le=L/nelem;
je=le/2;
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul de la matrice élémentaire de rigidité
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
    for j=1:2
        for k=1:2
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
```

Exemple d’application (Matlab) : allongement d’une barre

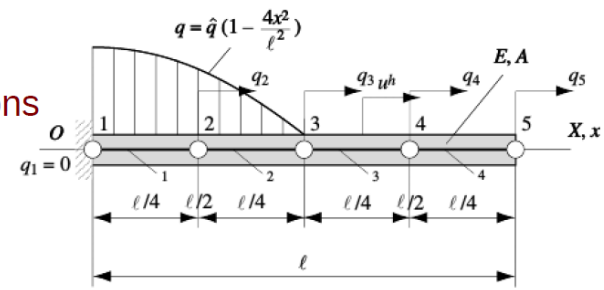
```
        end
    end
    K
end
% Calcul des vecteurs élémentaire et global des charges
externes
r(1:nnode)=0;
for i=1:nelem/2
    x=le*(i-1)*(1-xsi)/2+le*i*(1+xsi)/2;
    re=int(H*Q*(1-4*(x/L)^2)*je,xsi,-1,1)
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
    r
end
```

Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% Résolution du système d'équations
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
% Application numérique
E=1
A=1
Q=1
L=1
q=eval(q)
w(1:nnode)=0;
for i=2:nnode
    w(i)=q(i-1);
end
```

Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
clear all
syms E A L xsi le je dxsidx h H B Q Ke K re r
syms Kr rr q         % work in symbolic expressions
nelem=4;             % number of elements
nnode=nelem+1;   % number of nodes
% Test
t=idivide(int32(nelem),int32(2));
% Because the load is applied to until L/2, it is better to use the number of element as
muptiple of 2
if 2*t~=nelem
   warning('nelem impair')
     %break
end
% Definition des fonctions de base et de leurs derivees
le=L/nelem;
je=le/2;         % dx = (dxsidx) dxsi
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul de la matrice elmentaire de rigidite
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
```



Comment/remove this line!

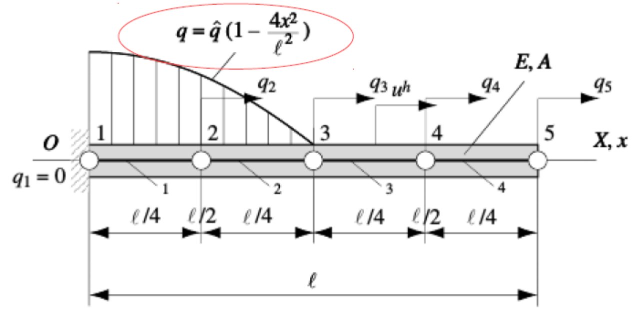
$\mathrm{d}x = ({}^e\ell/2)\,\mathrm{d}\xi$

$\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x = 2/{}^e\ell$;

$\mathbf{B} = \mathrm{d}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}x = \mathrm{d}^e\mathbf{H}/\mathrm{d}\xi(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x)$

$$\boxed{{}^e\mathbf{K} = \int_{-1}^{1} E\,{}^e\mathbf{B}^T\mathbf{B}\,\mathrm{d}({}^el/2)\mathrm{d}\xi}$$

Exemple d’application (Matlab) : allongement d’une barre




```
% Assemblage des quantites elementaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
    for j=1:2
        for k=1:2
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
        end
    end
    K
end
% Calcul des vecteurs elementaire et global des charges externes
r(1:nnode)=0;
for i=1:nelem/2   % becaude it is applited to until L/2
    x=le*(i-1)*(1-xsi)/2+le*i*(1+xsi)/2;
    re=int(H*Q*(1-4*(x/L)^2)*je,xsi,-1,1)
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
    r
end
% Resolution du systeme d'equations
% Remove first row and colum from BC (at x=0, q1=0)
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
```

From
$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/{}^{e}\ell$$

$$^{e}r_i = \int_{^{e}\Omega} \hat{q}\,(1 - \frac{4x^2}{\ell^2})\,^{e}h_i\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{4EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192}\begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$