

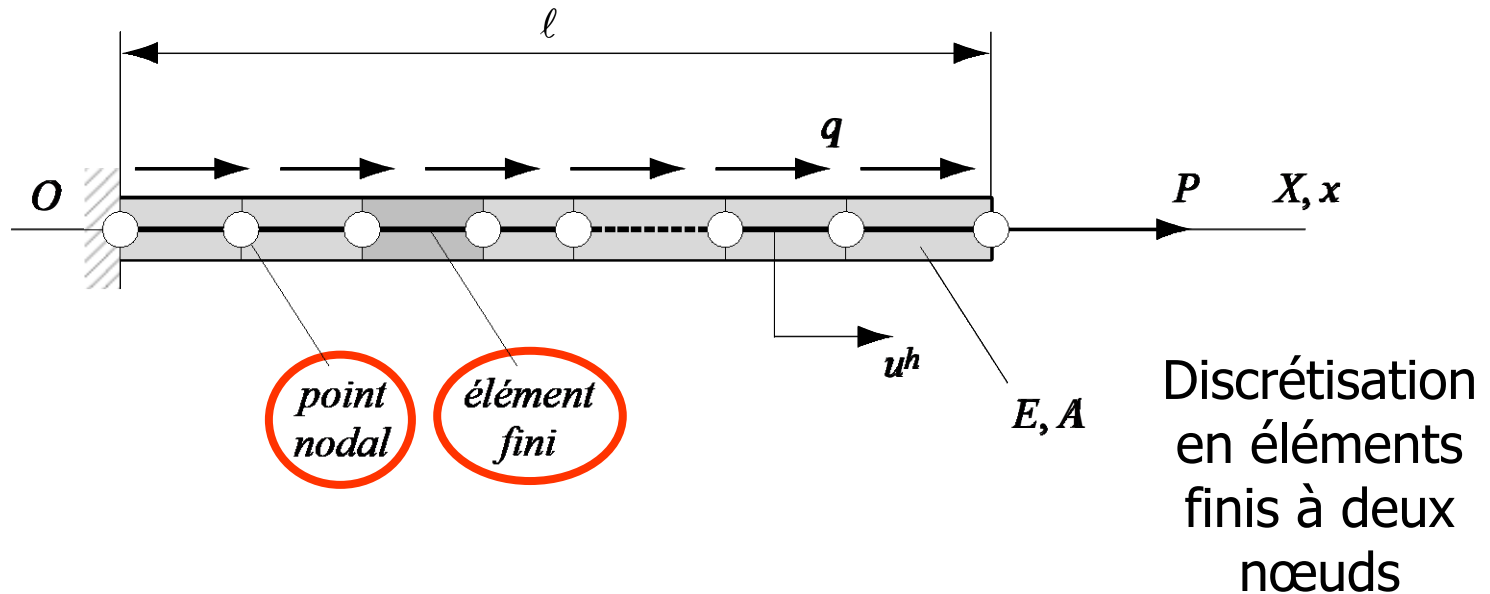
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème

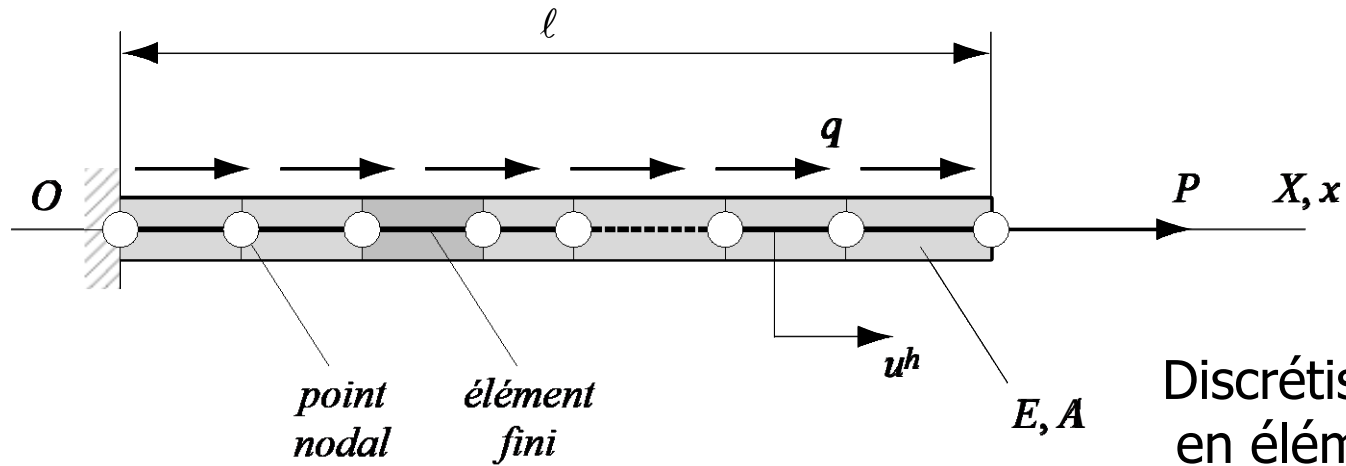
modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

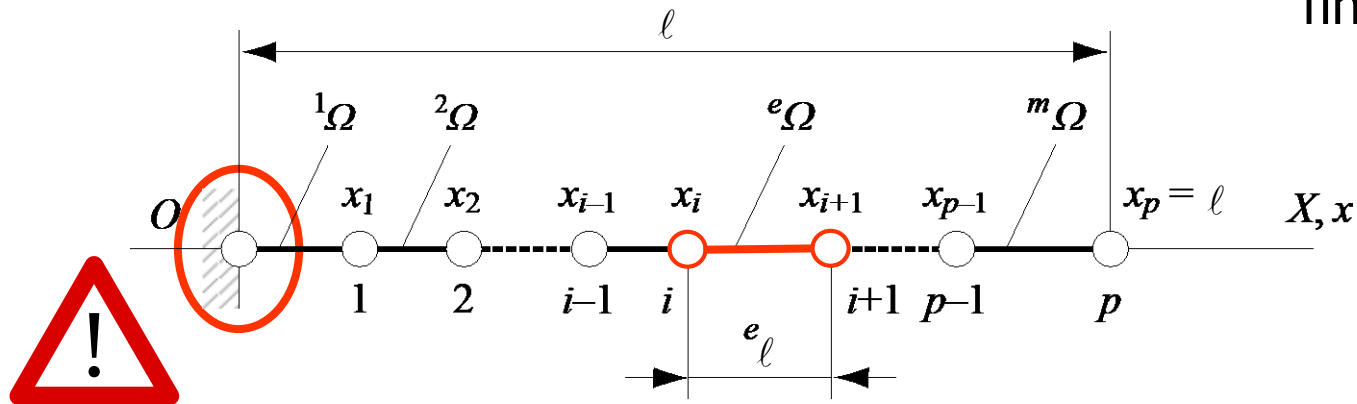
Méthode des éléments finis : approche globale



Méthode des éléments finis : approche globale



Discrétisation
en éléments
finis à deux
nœuds



Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation par éléments finis : association d'une fonction $h_i(x)$ à chacun des p points nodaux

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i = \mathbf{H}(x) \mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_p]$$



Cas particulier
de la méthode
de Galerkin

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_p\}^T$$

vecteur $(p \times 1)$ des
déplacements nodaux

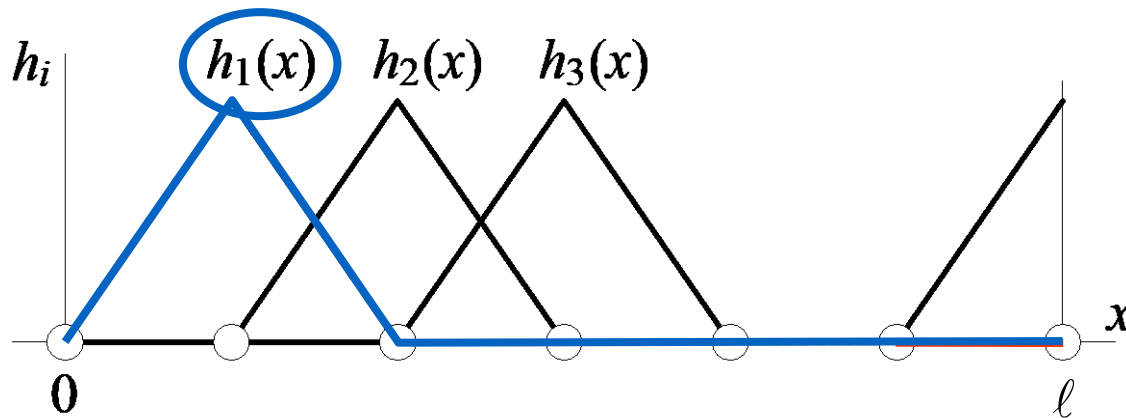
$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) \delta q_i = \mathbf{H}(x) \delta \mathbf{q}$$



Avantages de
la méthode
conservés

Méthode des éléments finis : approche globale

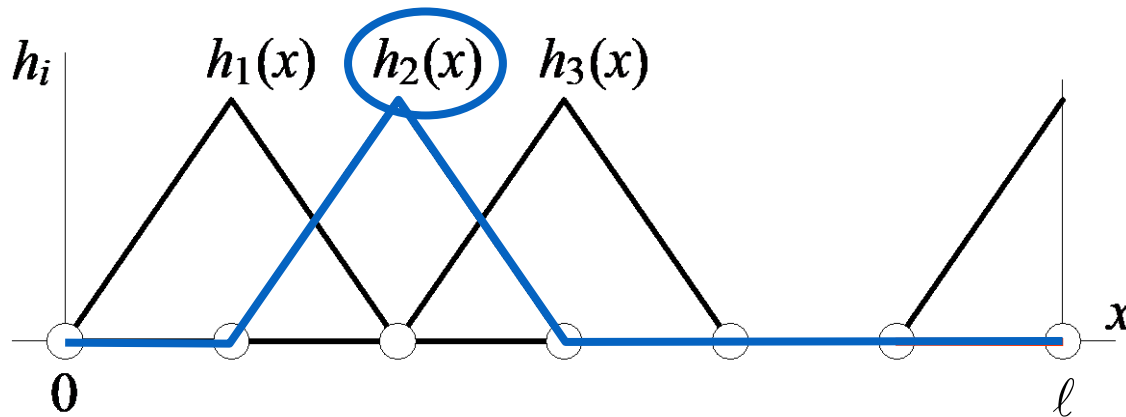
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

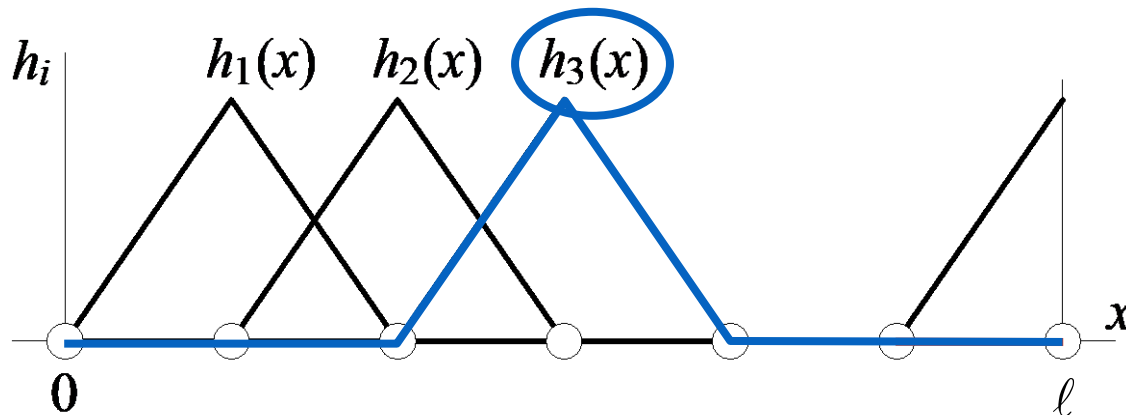
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

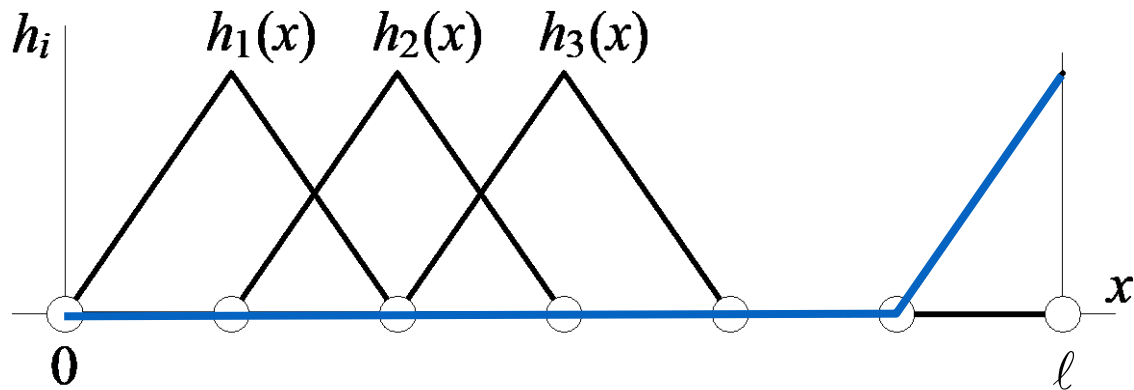
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

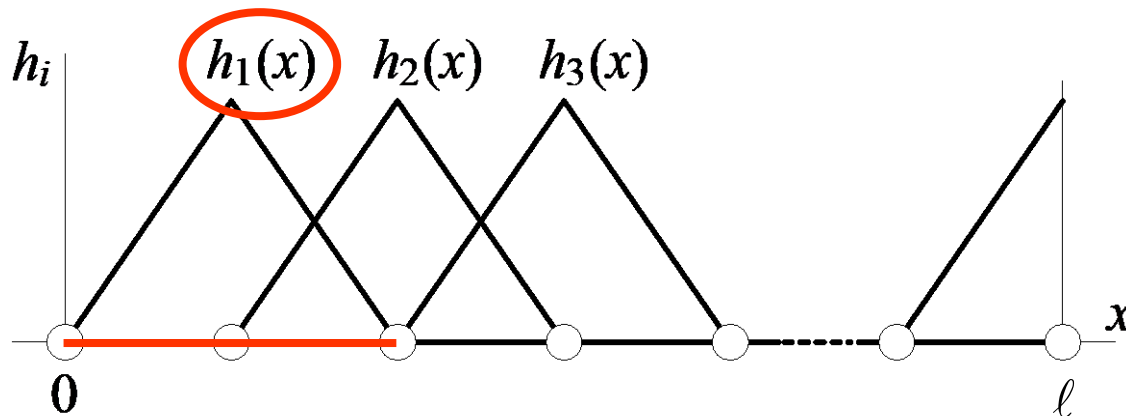
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

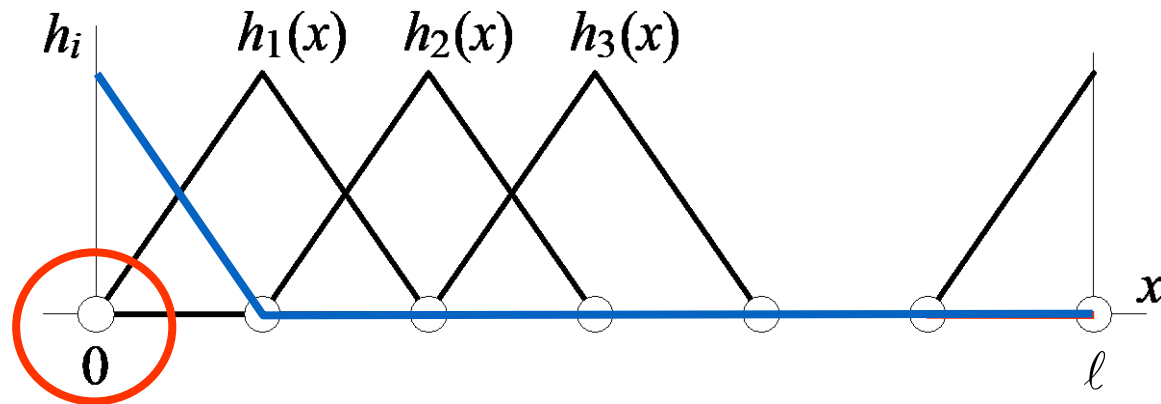
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation des fonctions de forme



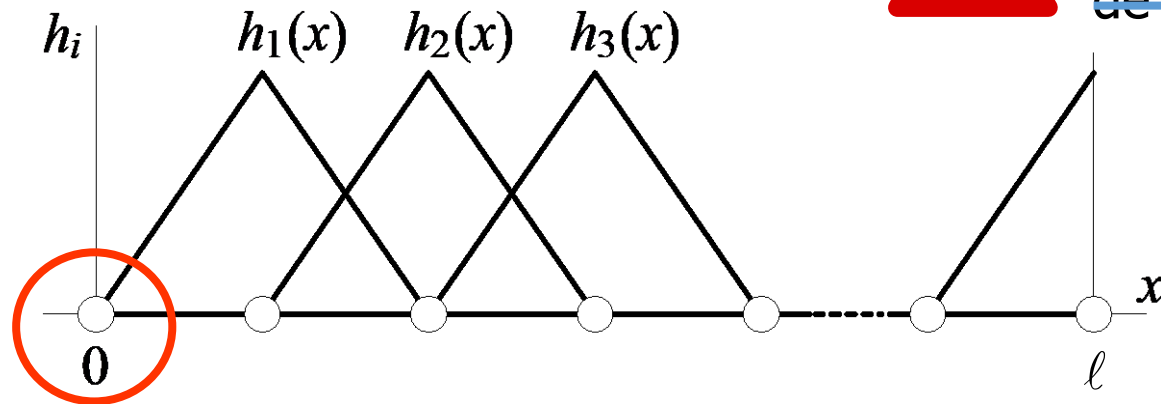
Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact



Respect nécessaire de la condition aux limites essentielle par seule la fonction " $h_0(x)$ "

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact



Respect nécessaire de la condition aux limites essentielle par seule la fonction " $h_0(x)$ "

Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix des fonctions de forme nodale $h_i(x)$ à support compact

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA \left(\frac{du^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx$$

$\delta u^h(\ell) + \int_0^\ell \delta u^h dx \neq 0 \quad \delta u^h \in V^h$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i \quad \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) \delta q_i$$

- Fonctions au moins du premier degré (polynômes)
- Fonctions suffisamment régulières
- Fonctions continues

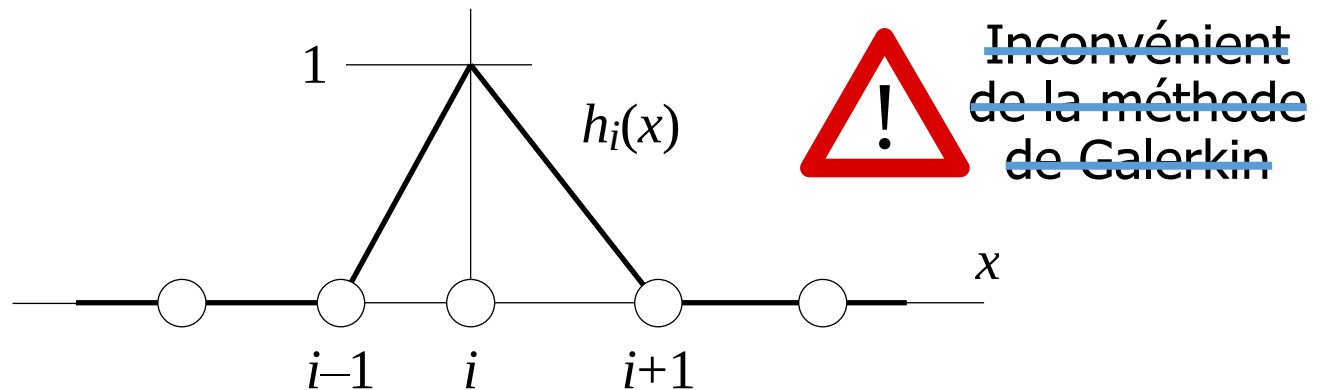
Méthode des éléments finis : approche globale

- Critères généraux de convergence
 - Critère de complétude ou de complétion : fonctions $h_i(x)$ affines sur les éléments, c'est-à-dire constituant une base complète permettant la représentation des états de déformation constante et les déplacements rigides
 - Critère de différentiabilité : fonctions $h_i(x)$ suffisamment régulières à l'intérieur des éléments pour assurer que le déplacement u^h appartienne à la classe des fonctions U^h
 - Critère de continuité : fonctions $h_i(x)$ continues aux interfaces des éléments pour assurer la continuité du déplacement u^h

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation physique des inconnues (critère restreint de continuité) = déplacements nodaux

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad x_j \text{ position du nœud } j$$

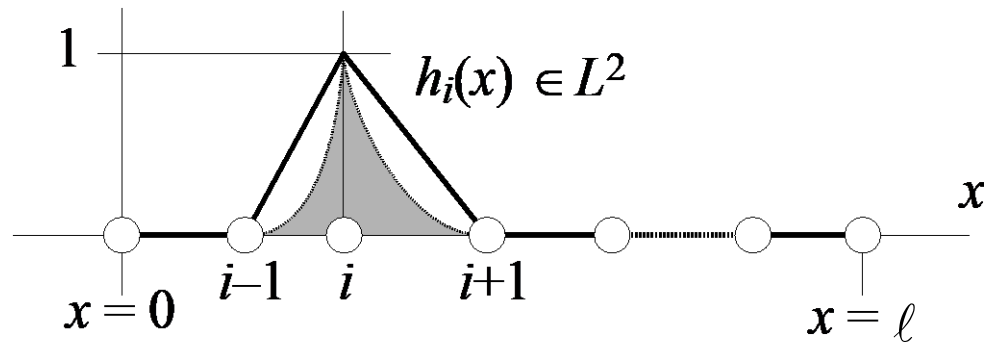


$$\Rightarrow u^h(x_j) = \sum_{i=1}^p h_i(x_j) q_i = \sum_{i=1}^p \delta_{ij} q_i = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

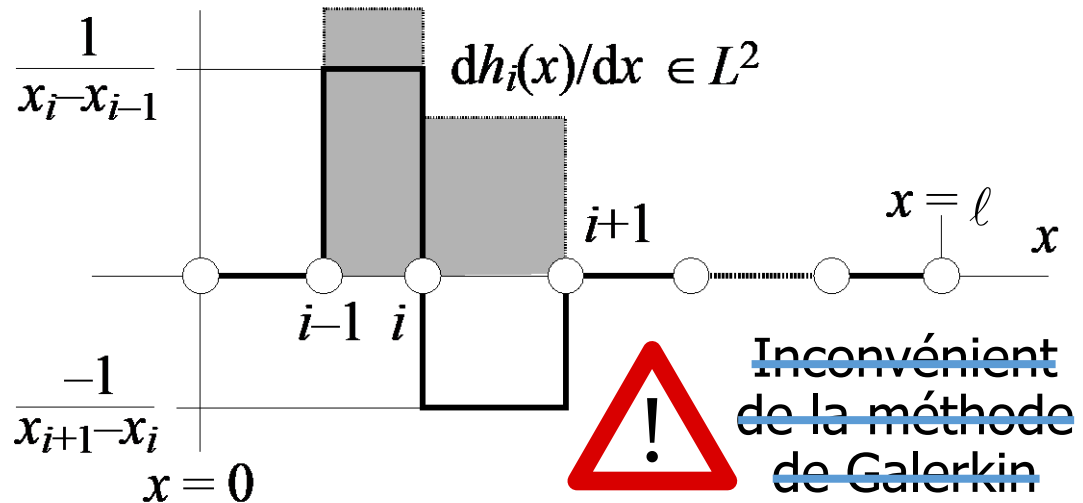
Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix final des fonctions de forme nodales

$$h_i(x) \in H^1(]0, \ell[)$$



$h_i(x)$ fonction linéaire prenant la valeur 1 au nœud i et 0 aux autres points nodaux



Méthode des éléments finis : approche globale

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^\ell EA [d(\mathbf{H} \delta \mathbf{q})^T/dx] [d(\mathbf{H} \mathbf{q})/dx] dx$$

$\alpha \rightarrow \mathbf{q}$ $= [\mathbf{H}(\ell) \delta \mathbf{q}]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta \mathbf{q}]^T q dx \quad \forall \delta \mathbf{q}$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{q}^T \left[\underbrace{\int_0^\ell EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) dx}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} - \underbrace{[\mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx]}_{\text{vecteur des forces appliquées } \mathbf{r}} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Système d'équations linéaires (analogue à la forme faible discrète issue du processus de Galerkin)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx \quad \begin{array}{l} \text{matrice } (p \times p) \\ \text{de rigidité} \end{array}$$

$$= \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \quad \begin{array}{l} \text{vecteur } (p \times 1) \text{ des} \\ \text{forces appliquées} \end{array}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme indicielle du système d'équations

$$\sum_{j=1}^p k_{ij} q_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$
$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_i}{dx} \right) \left(\frac{dh_j}{dx} \right) dx$$
$$r_i = h_i(\ell) P + \int_0^\ell h_i q dx$$



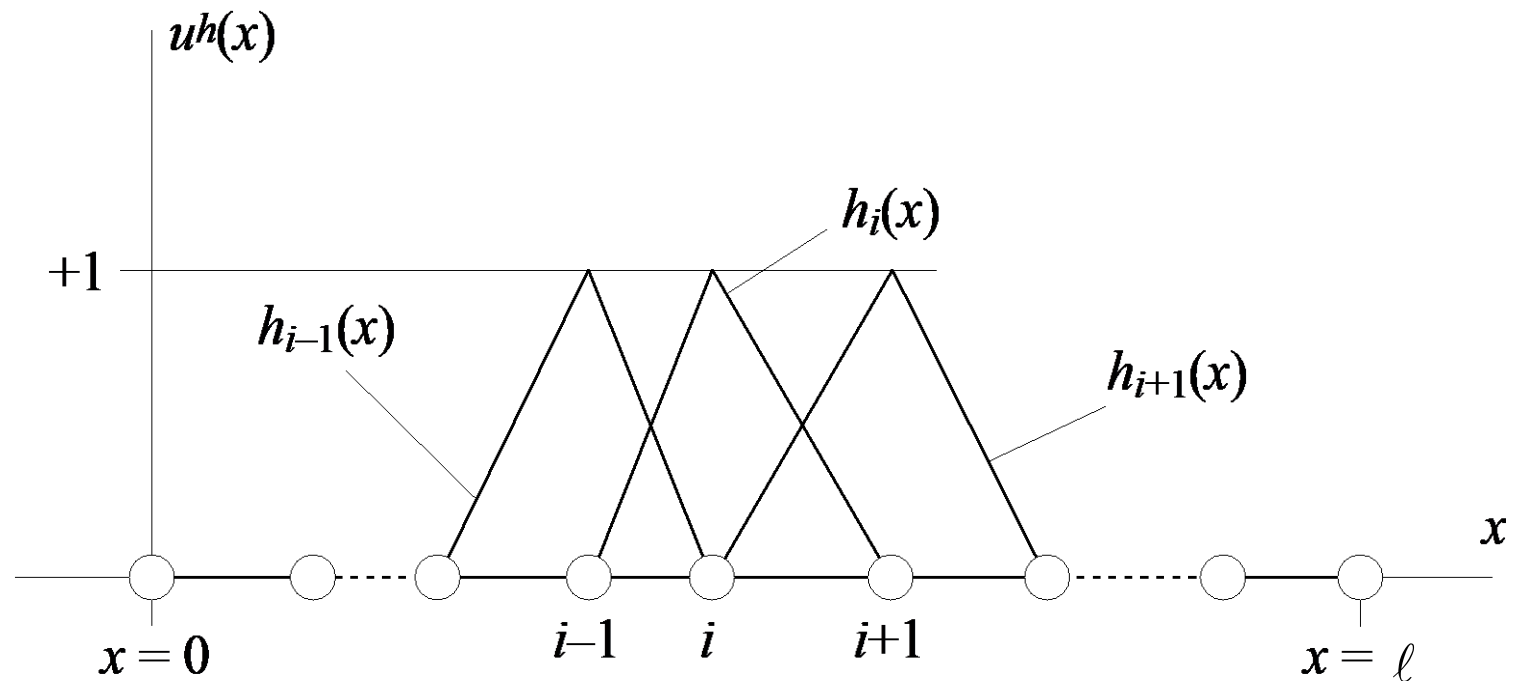
Fonctions de forme nodales $h_i(x)$ à support compact $\Rightarrow$ matrice **K** éparses



Une seule fonction de forme concernée par la condition aux limites naturelle

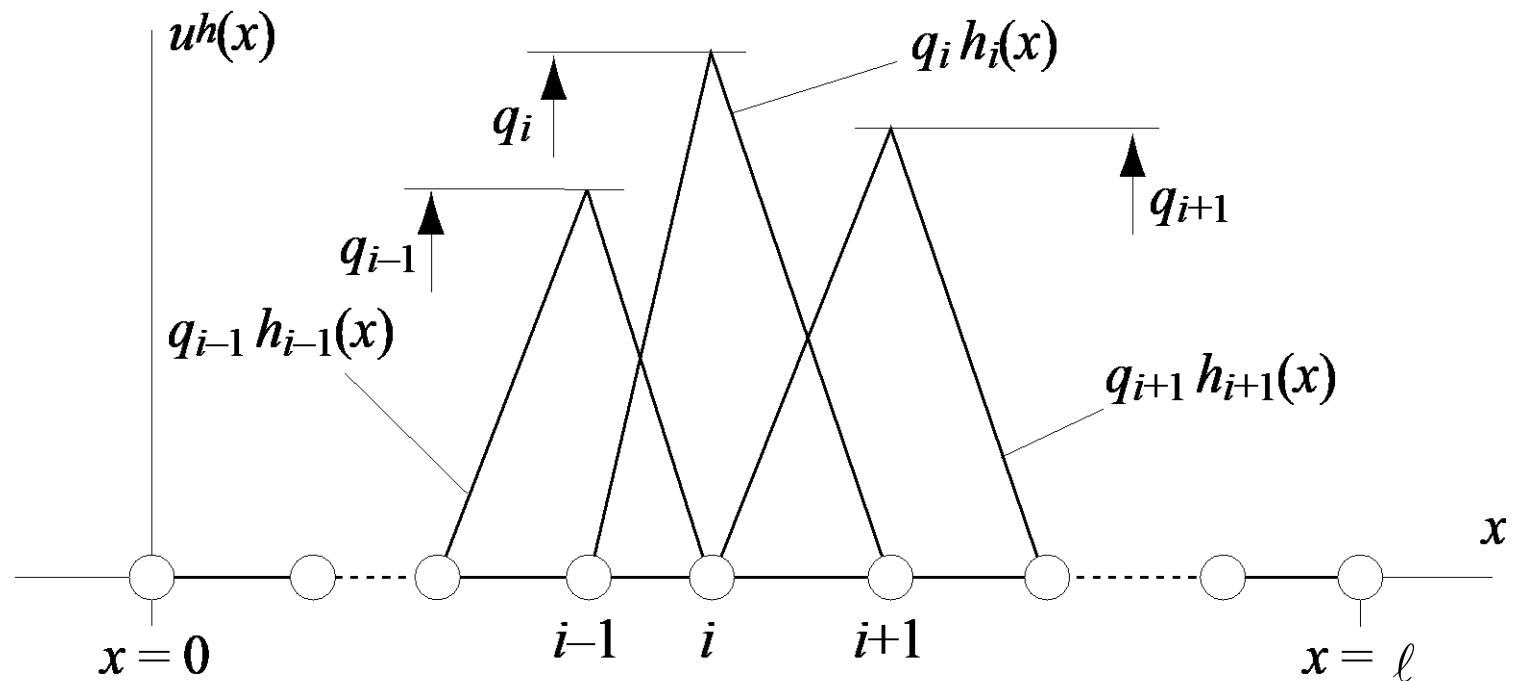
Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



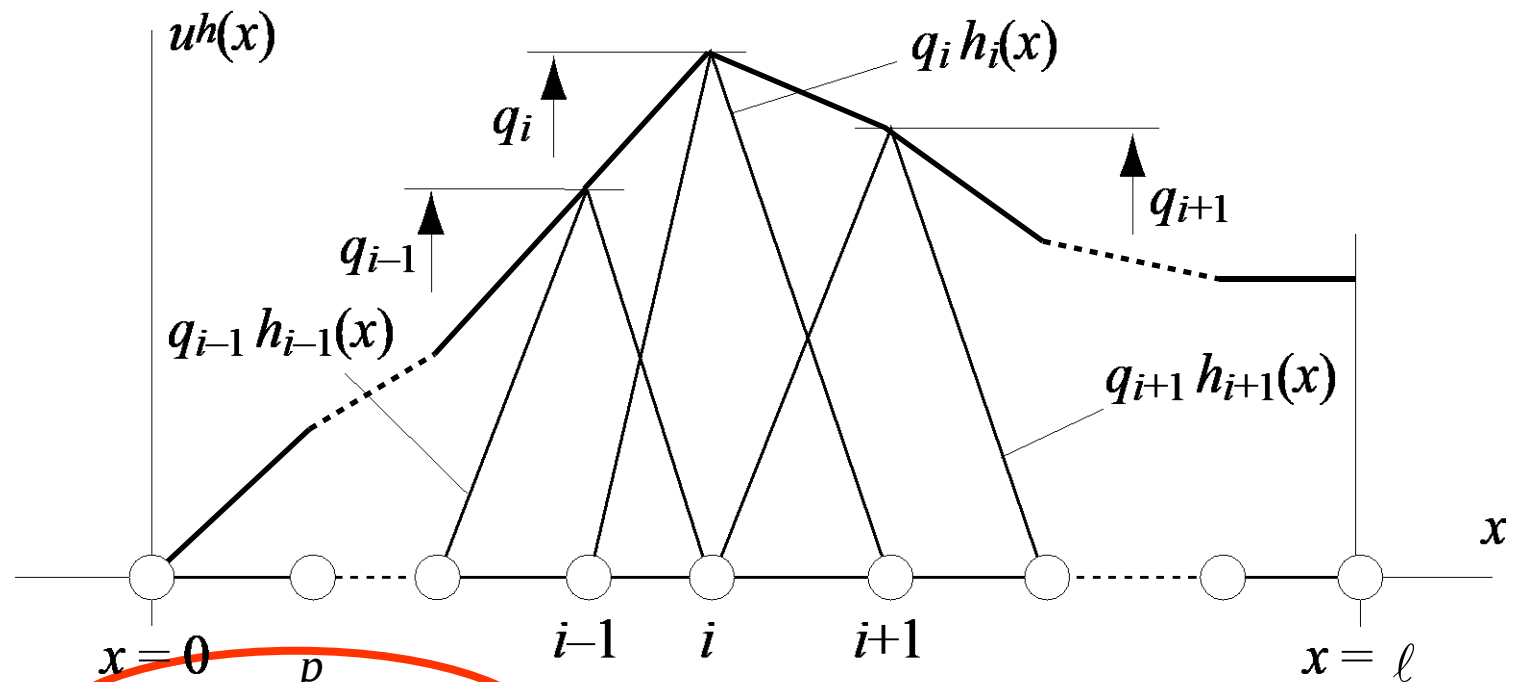
Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i \quad \text{fonction continue et linéaire par morceaux}$$

Approche globale des éléments finis : avantages et inconvénients

- Avantages de la méthode par rapport au procédé de Galerkin
 - Systématisation poussée du processus : approximation sous la forme de polynômes de faible degré continus par morceaux
 - Fonctions de forme à support compact : matrice de rigidité peu dense, condition aux limites essentielle à satisfaire par une fonction
 - Interprétation physique des inconnues : déplacements discrets
- Inconvénients de l'approche globale de la méthode des éléments finis
 - Prise en compte limitée de la compacité des fonctions de forme nodales : fonctions restant définies sur l'ensemble du domaine
 - Pas de mise à profit de l'additivité de l'intégration : intégrales calculées sur l'ensemble de domaine