

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème

modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

Rappel: Equivalence des formulations forte et faible

- Forme forte $\Rightarrow$ forme faible
 - Rappel de la formulation forte

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans }]0, \ell[$$

$$u(0) = 0$$

$$EA (du/dx)|_{x=\ell} = P$$

- Forme intégrale pondérée

$$0 = \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx \quad \forall \delta u \in V$$

$$V = \{ \delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1(]0, \ell[) ; \delta u(0) = 0 \}$$

Rappel: formulation faible

- Intégration par parties

$$0 = \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) dx - [EA \left(\frac{du}{dx} \right) \delta u] \Big|_0^\ell - \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

- Prise en compte des conditions aux limites et du caractère cinématiquement admissible du déplacement virtuel

$$u \in U: \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

$\Rightarrow$ forme faible

Rappel: Formulation faible approchée

- Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel

$$u \approx u^h \in U^h \subset U \quad \delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Choix de n fonctions de forme linéairement indépendantes, constituant une base du sous-espace U^h de dimension n

$$h_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Rappel: Méthode de Galerkin

- Approximation de Galerkin

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \boldsymbol{\alpha}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n]$ matrice $(1 \times n)$ des fonctions de forme

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}^T$ vecteur $(n \times 1)$ des inconnues

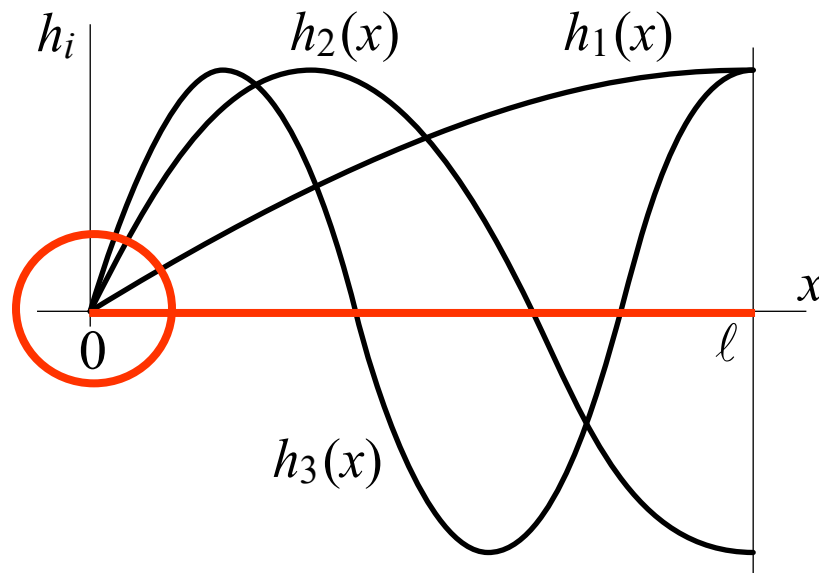
$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \delta \boldsymbol{\alpha}$$



Même forme
d'approximation
pour u^h et δu^h

Rappel: Méthode de Galerkin

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) définies globalement sur le domaine $[0, \ell]$ et respectant la condition aux limites essentielle

Rappel: Méthode de Galerkin

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^\ell EA \left[\frac{d(\mathbf{H} \delta \boldsymbol{\alpha})^T}{dx} \right] \left[\frac{d(\mathbf{H} \boldsymbol{\alpha})}{dx} \right] dx$$

$$= [\mathbf{H}(\ell) \delta \boldsymbol{\alpha}]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta \boldsymbol{\alpha}]^T q \, dx \quad \forall \delta \boldsymbol{\alpha}$$

$$\Rightarrow \delta \boldsymbol{\alpha}^T \left[\underbrace{\int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \underbrace{[\mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q \, dx]}_{\text{vecteur des forces appliquées } \mathbf{r}} \right] = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\alpha}$$

$$\Rightarrow \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\alpha}$$

Rappel: Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

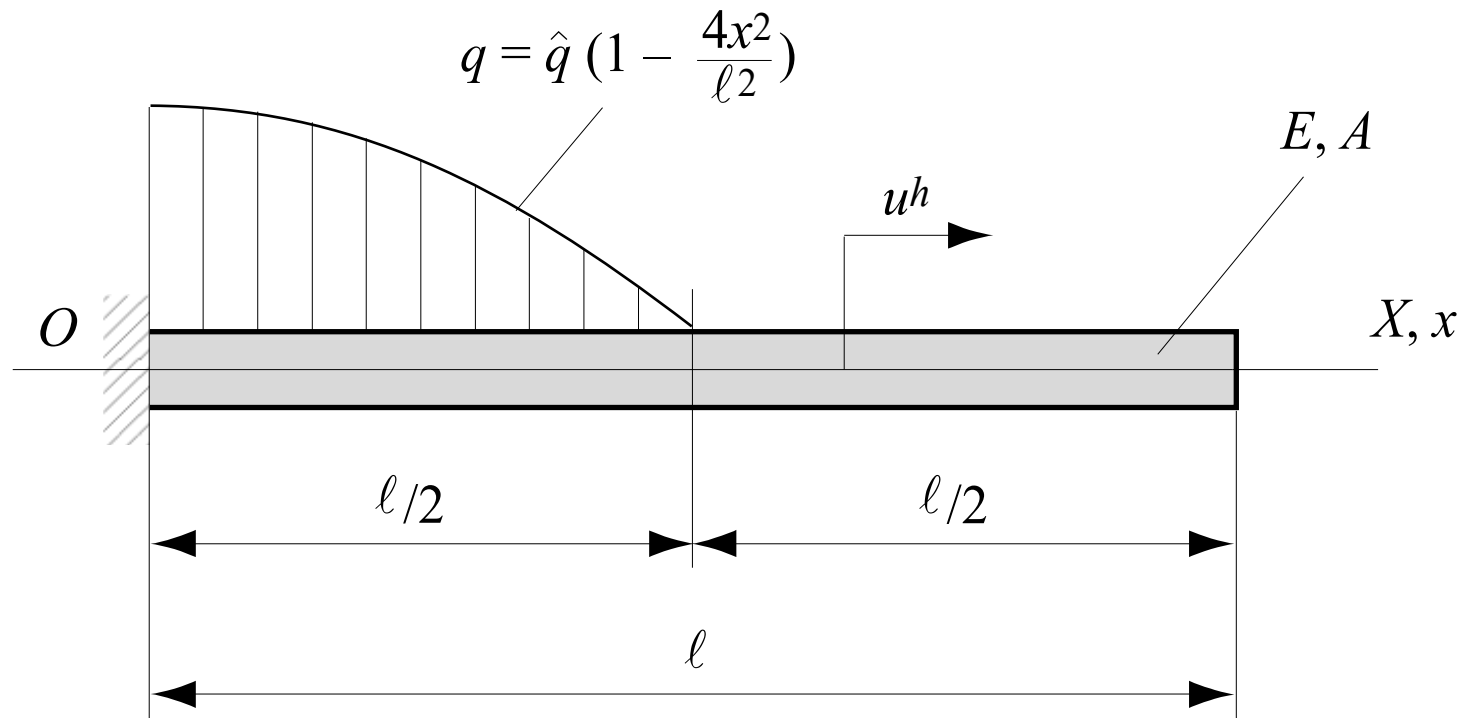
$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$= \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{H}}{dx} \quad \begin{array}{l} \text{matrice-déformation ou de} \\ \text{passage des déplacements aux} \\ \text{déformations} \end{array}$$

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Barre prismatique soumise à une charge répartie

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Adaptation de la formulation faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA \, (du^h/dx) \, (d\delta u^h/dx) \, dx \\ = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \delta u^h \, dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Approximation à deux termes des déplacements réel et virtuel par la méthode de Galerkin

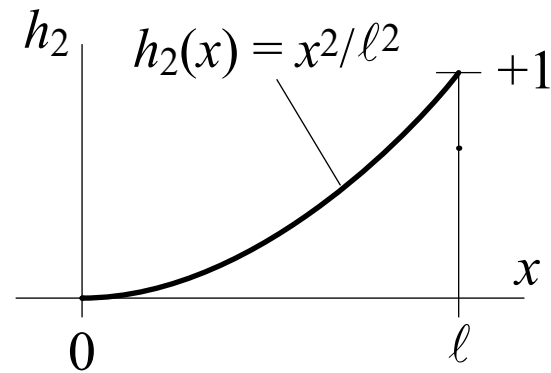
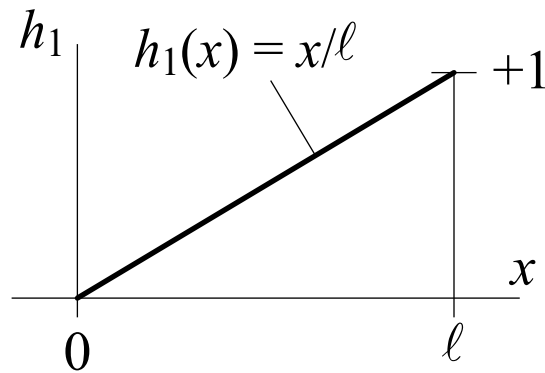
$$\begin{aligned} u^h(x) &= \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) \\ \delta u^h(x) &= \delta\alpha_1 h_1(x) + \delta\alpha_2 h_2(x) \end{aligned}$$

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Choix des fonctions d'approximation

$$h_1(x) = x/\ell \quad (dh_1/dx = 1/\ell)$$

$$h_2(x) = x^2/\ell^2 \quad (dh_2/dx = 2x/\ell^2)$$



Respect de la condition aux limites essentielle en $x = 0$

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul de la matrice de rigidité **K**

$$k_{11} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx)^2 dx = \int_0^\ell \frac{EA}{\ell^2} dx = EA/\ell$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= k_{21} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx) (dh_2/dx) dx \\ &= \int_0^\ell EA \frac{2x}{\ell^3} dx = EA/\ell \end{aligned}$$

$$k_{22} = \int_0^\ell EA (dh_2/dx)^2 dx = \int_0^\ell EA \frac{4x^2}{\ell^4} dx = 4EA/(3\ell)$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul du vecteur des forces externes $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_1 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x}{\ell} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_2 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x^2}{\ell^2} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/60 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Système d'équations $\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

- Résolution du système d'équations

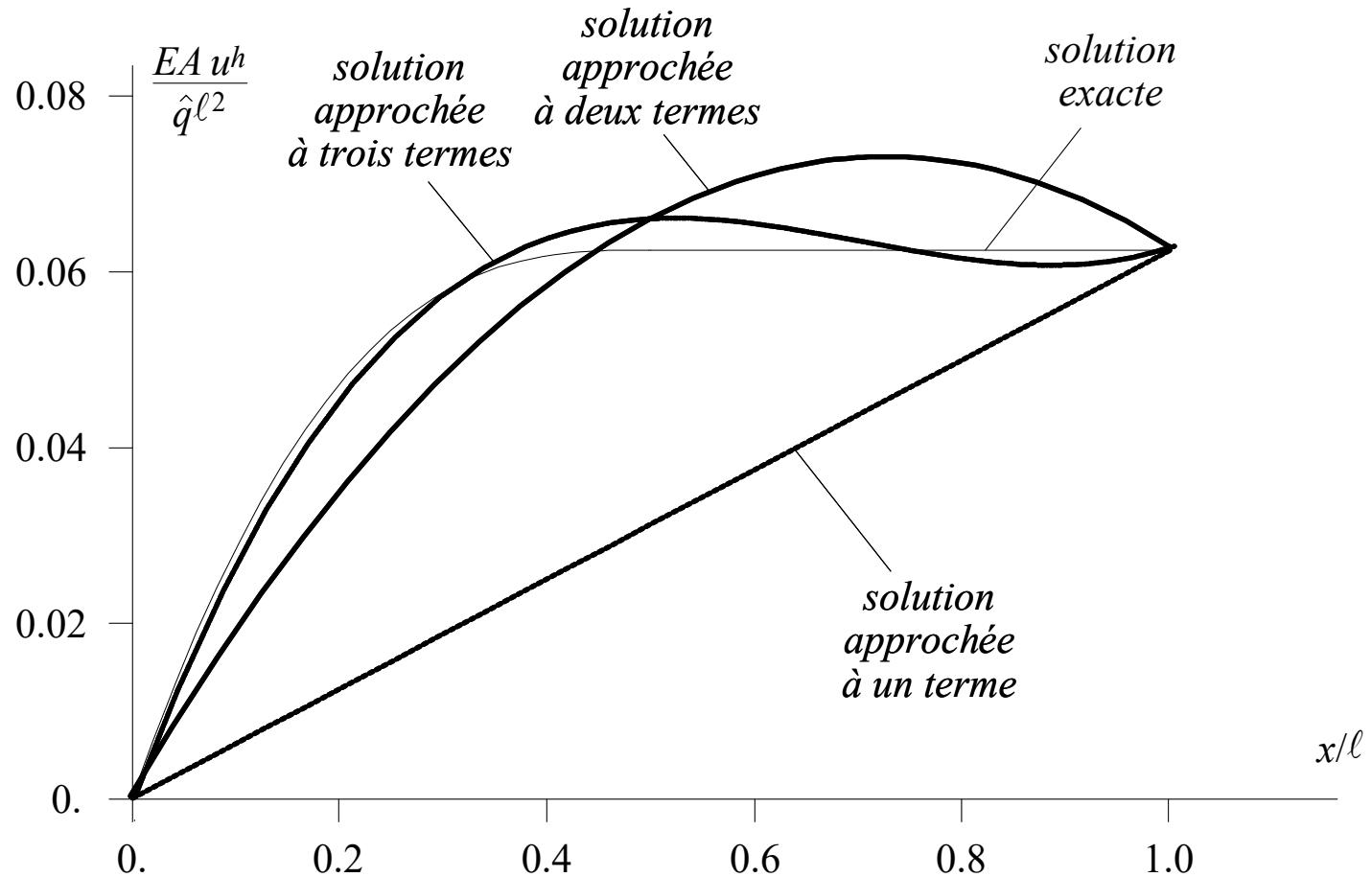
$$\alpha_1 = \hat{q}\ell^2/(5EA)$$

$$\alpha_2 = -11\hat{q}\ell^2/(80EA)$$

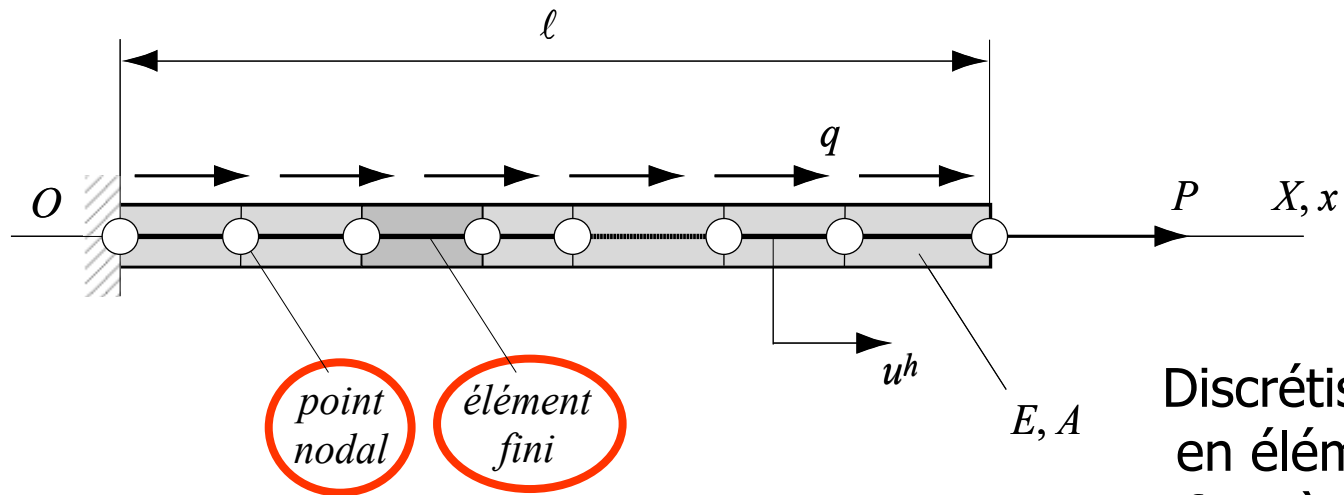
- Solution approchée du problème

$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell x}{5EA} \left(1 - \frac{11x}{16\ell} \right)$$

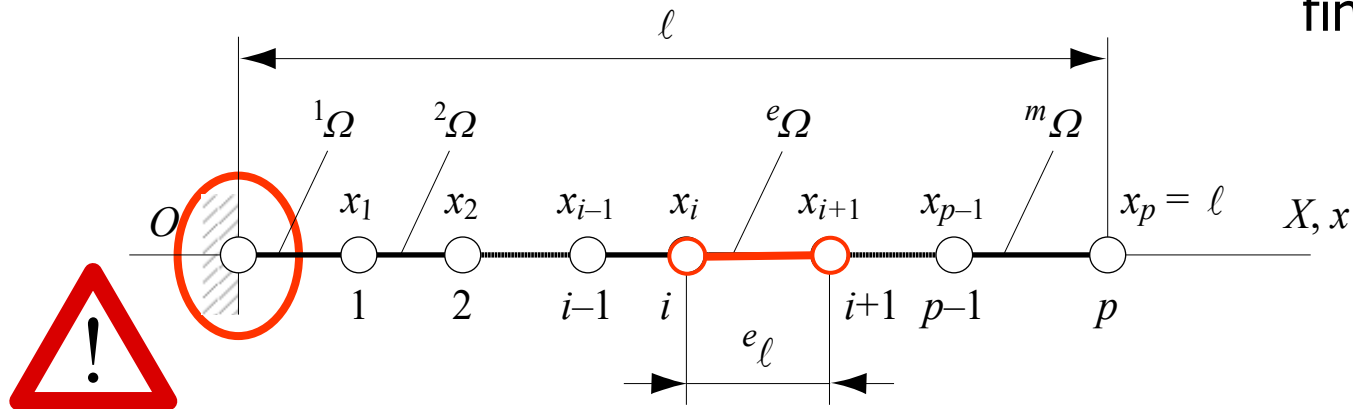
Rappel: Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Méthode des éléments finis : approche globale



Discrétisation
en éléments
finis à deux
nœuds



Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation par éléments finis : association d'une fonction $h_i(x)$ à chacun des p points nodaux

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i = \mathbf{H}(x) \mathbf{q}$$

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_p]$$



Cas particulier
de la méthode
de Galerkin

matrice $(1 \times p)$ des
fonctions de forme
nodales

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_p\}^T$$

vecteur $(p \times 1)$ des
déplacements nodaux

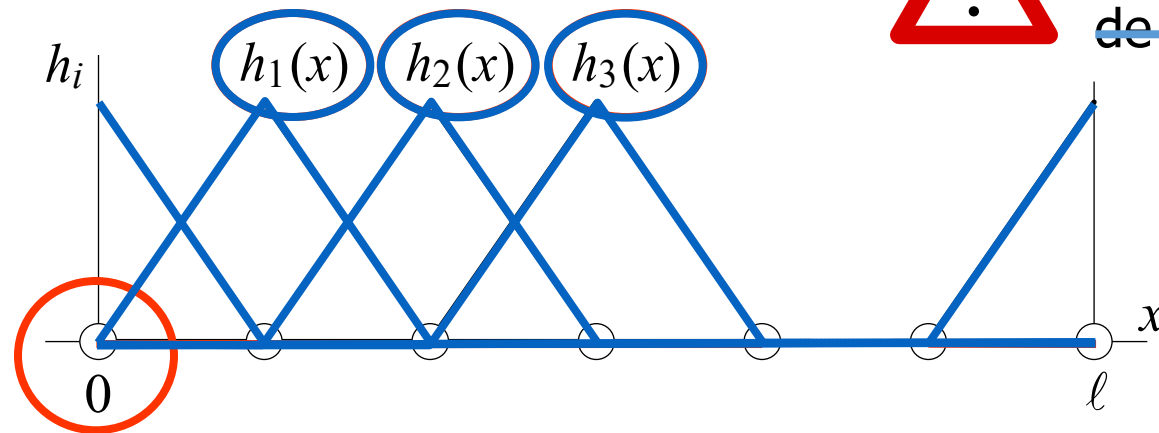
$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) \delta q_i = \mathbf{H}(x) \delta \mathbf{q}$$



Avantages de
la méthode
conservés

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) à support compact



Respect nécessaire de la condition aux limites essentielle par seule la fonction " $h_0(x)$ "

Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix des fonctions de forme nodale $h_i(x)$ à support compact

$$u^h \in U^h \quad \int_0^\ell EA \left(\frac{du^h}{dx} \right) \left(\frac{d\delta u^h}{dx} \right) dx$$

$$+ \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell f u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i \quad \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) \delta q_i$$

- Fonctions au moins du premier degré (polynômes)
- Fonctions suffisamment régulières
- Fonctions continues

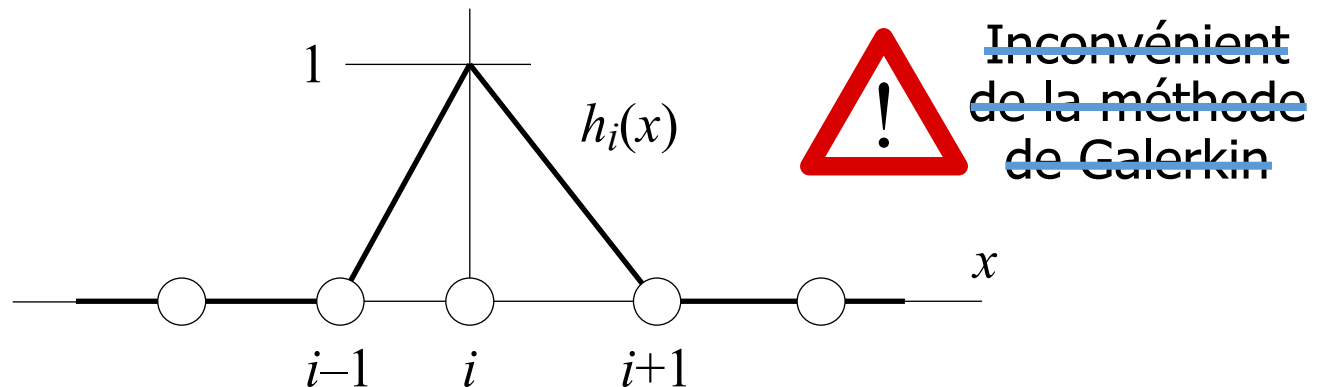
Méthode des éléments finis : approche globale

- Critères généraux de convergence
 - Critère de complétude ou de complétion : fonctions $h_i(x)$ affines sur les éléments, c'est-à-dire constituant une base complète permettant la représentation des états de déformation constante et les déplacements rigides
 - Critère de différentiabilité : fonctions $h_i(x)$ suffisamment régulières à l'intérieur des éléments pour assurer que le déplacement u^h appartienne à la classe des fonctions U^h
 - Critère de continuité : fonctions $h_i(x)$ continues aux interfaces des éléments pour assurer la continuité du déplacement u^h

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation physique des inconnues (critère restreint de continuité) = déplacements nodaux

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad x_j \text{ position du nœud } j$$

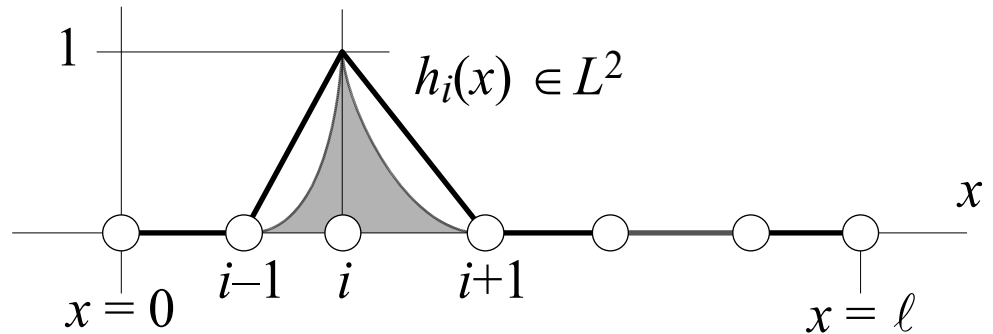


$$\Rightarrow u^h(x_j) = \sum_{i=1}^p h_i(x_j) q_i = \sum_{i=1}^p \delta_{ij} q_i = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

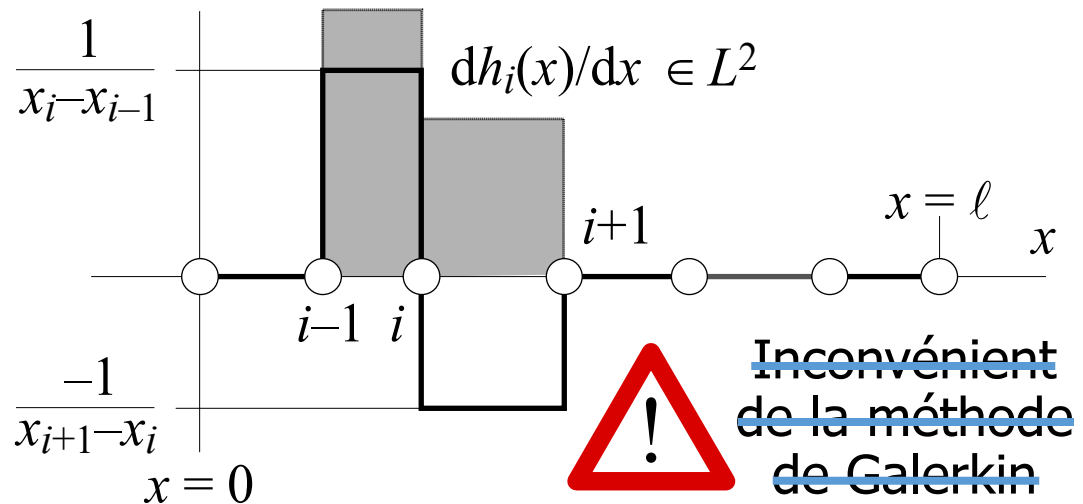
Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix final des fonctions de forme nodales

$$h_i(x) \in H^1(]0, \ell[)$$



$h_i(x)$ fonction linéaire prenant la valeur 1 au nœud i et 0 aux autres points nodaux



Méthode des éléments finis : approche globale

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^\ell EA \left[\frac{d(\mathbf{H} \delta \mathbf{q})^T}{dx} \right] \left[\frac{d(\mathbf{H} \mathbf{q})}{dx} \right] dx$$

$\alpha \rightarrow \mathbf{q}$ $= [\mathbf{H}(\ell) \delta \mathbf{q}]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta \mathbf{q}]^T q dx \quad \forall \delta \mathbf{q}$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{q}^T \left[\underbrace{\int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} - \underbrace{[\mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx]}_{\substack{\text{vecteur des forces} \\ \text{appliquées } \mathbf{r}}} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Système d'équations linéaires (analogue à la forme faible discrète issue du processus de Galerkin)

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx && \text{matrice } (p \times p) \\ & && \text{de rigidité} \\ &= \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \quad \text{vecteur } (p \times 1) \text{ des forces appliquées}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme indicielle du système d'équations

$$\sum_{j=1}^p k_{ij} q_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$
$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_i}{dx} \right) \left(\frac{dh_j}{dx} \right) dx$$
$$r_i = h_i(\ell) P + \int_0^\ell h_i q dx$$



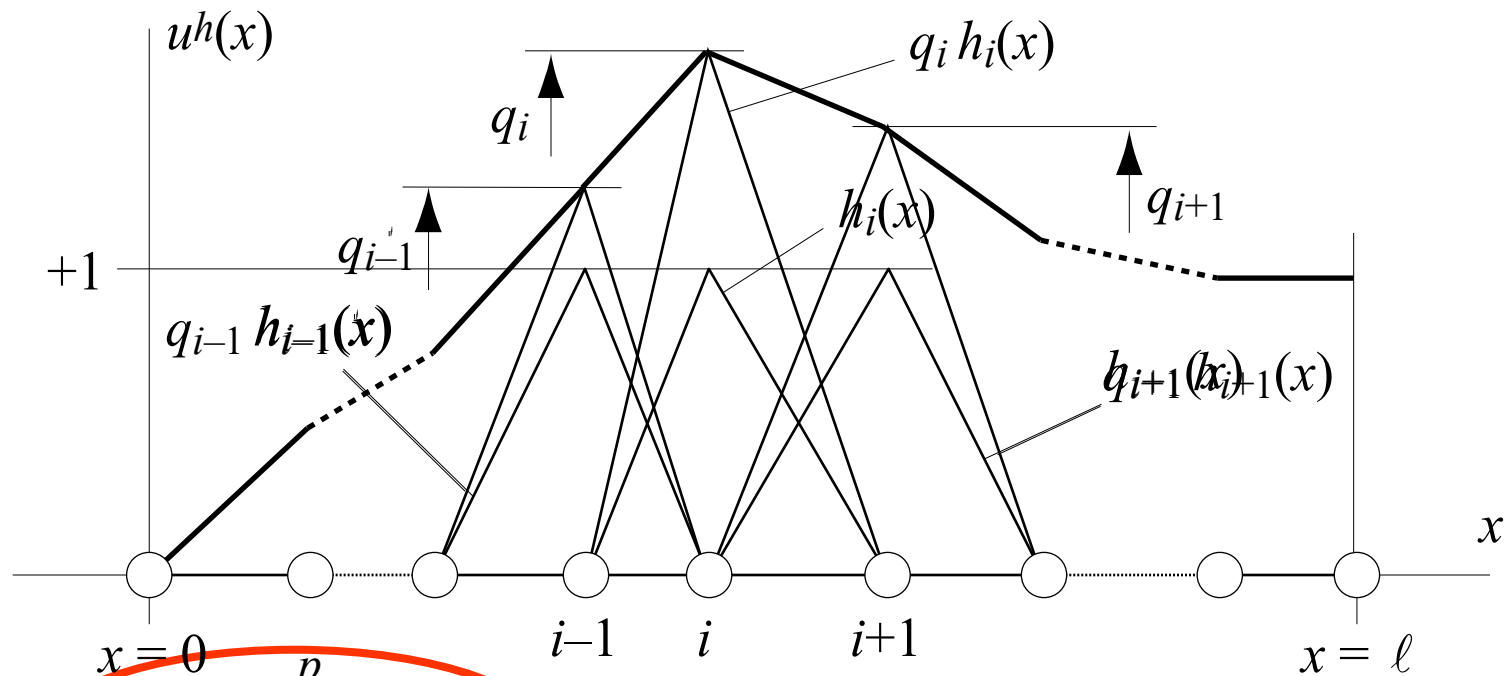
Fonctions de forme nodales $h_i(x)$ à support compact $\Rightarrow$ matrice **K** éparses



Une seule fonction de forme concernée par la condition aux limites naturelle

Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p h_i(x) q_i \quad \text{fonction continue et linéaire par morceaux}$$

Approche globale des éléments finis : avantages et inconvénients

- Avantages de la méthode par rapport au procédé de Galerkin
 - Systématisation poussée du processus : approximation sous la forme de polynômes de faible degré continus par morceaux
 - Fonctions de forme à support compact : matrice de rigidité peu dense, condition aux limites essentielle à satisfaire par une fonction
 - Interprétation physique des inconnues : déplacements discrets
- Inconvénients de l'approche globale de la méthode des éléments finis
 - Prise en compte limitée de la compacité des fonctions de forme nodales : fonctions restant définies sur l'ensemble du domaine
 - Pas de mise à profit de l'additivité de l'intégration : intégrales calculées sur l'ensemble de domaine