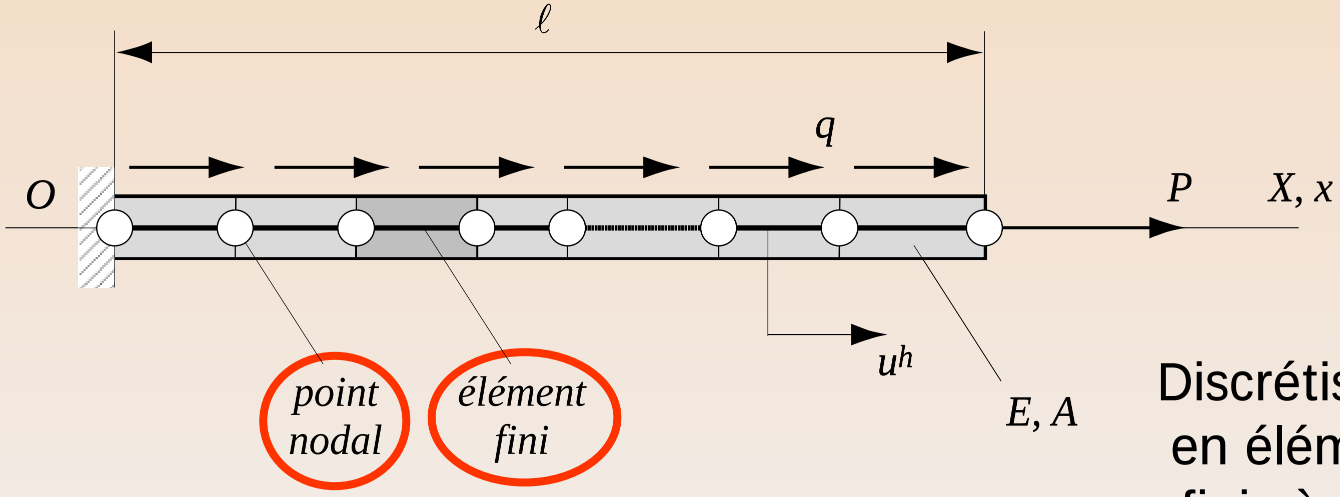
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. Th. Gmür

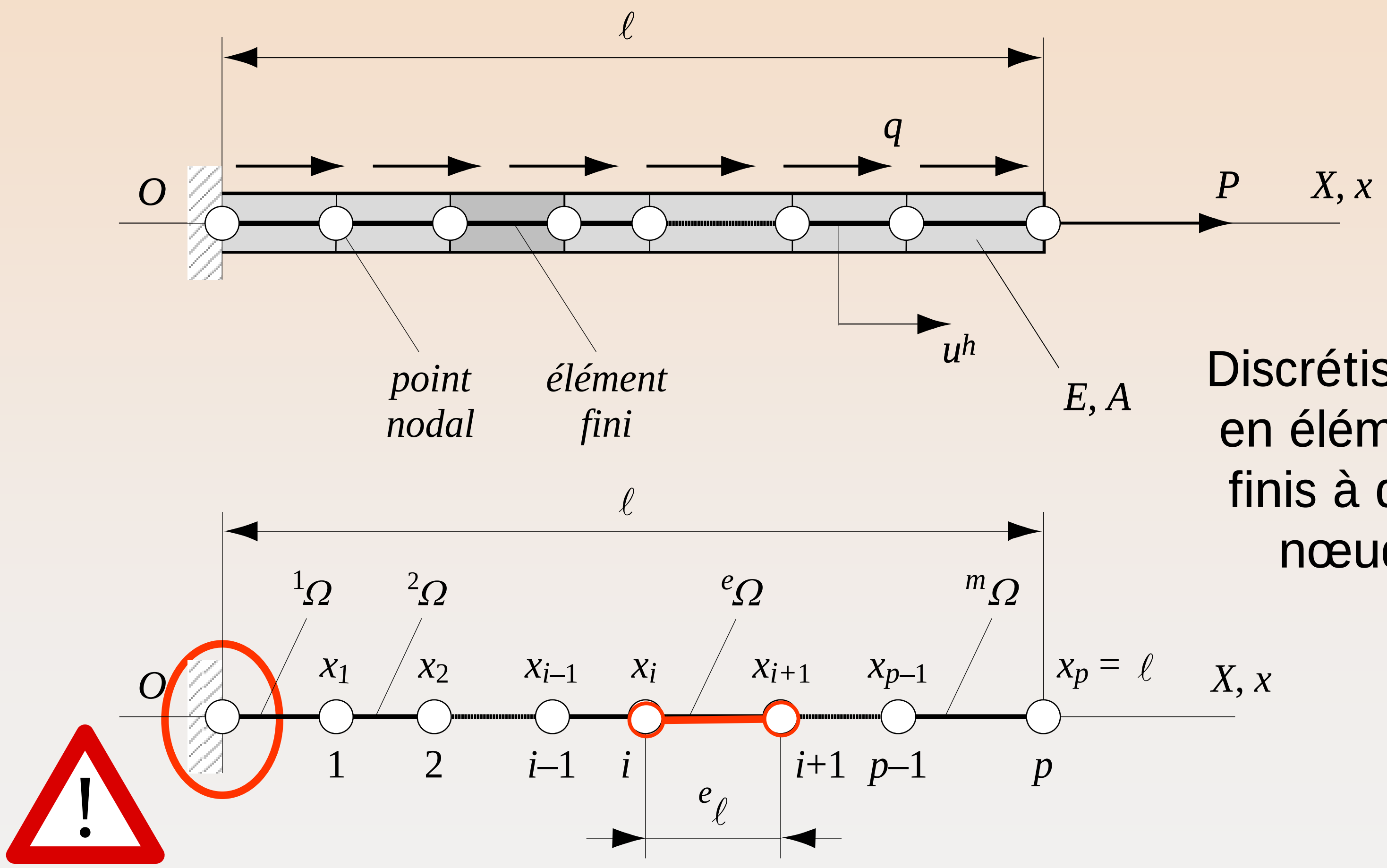
EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Méthode des éléments finis : approche globale



Discrétisation en éléments finis à deux nœuds

Méthode des éléments finis : approche globale



Discrétisation en éléments finis à deux nœuds

Méthode des éléments finis : approche globale

- Approximation par éléments finis : association d'une fonction $h_i(x)$ à chacun des p points nodaux

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\, q_i = \mathbf{H}(x)\,\mathbf{q}$$

Cas particulier de la méthode de Galerkin

$$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots, h_p]$$

matrice $(1\times p)$ des fonctions de forme nodales

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_p\}^{\mathrm{T}}$$

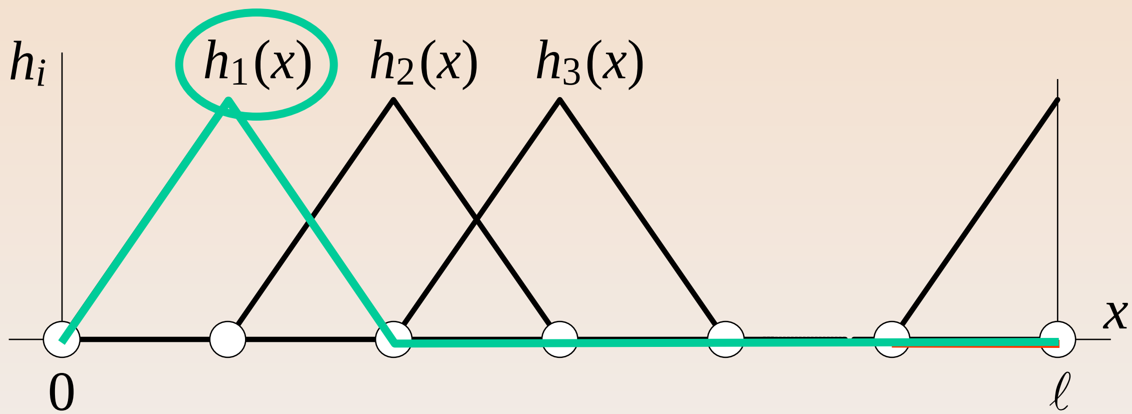
vecteur $(p\times 1)$ des déplacements nodaux

$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\, \delta q_i = \mathbf{H}(x)\,\delta\mathbf{q}$$

Avantages de la méthode conservés

Méthode des éléments finis : approche globale

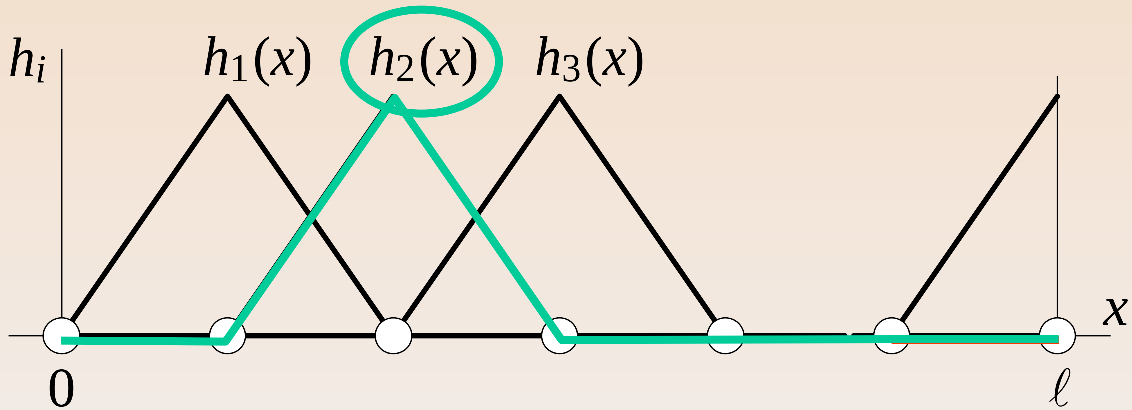
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

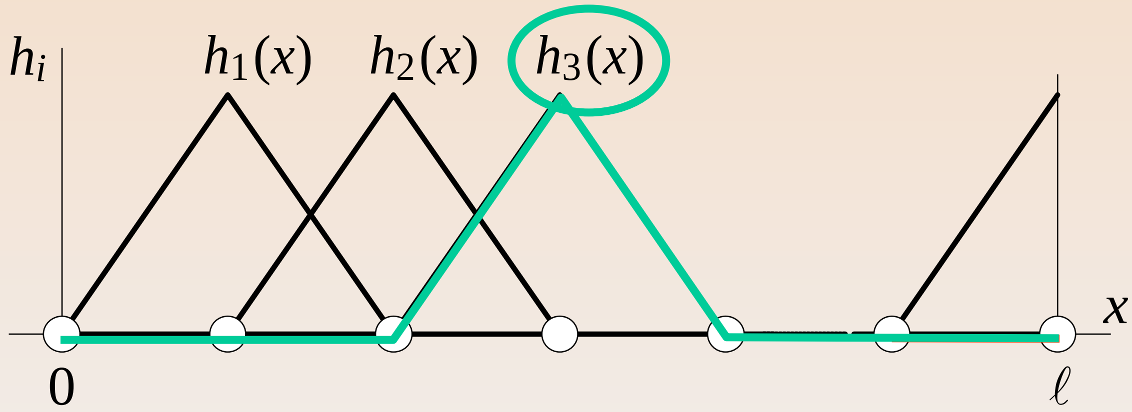
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

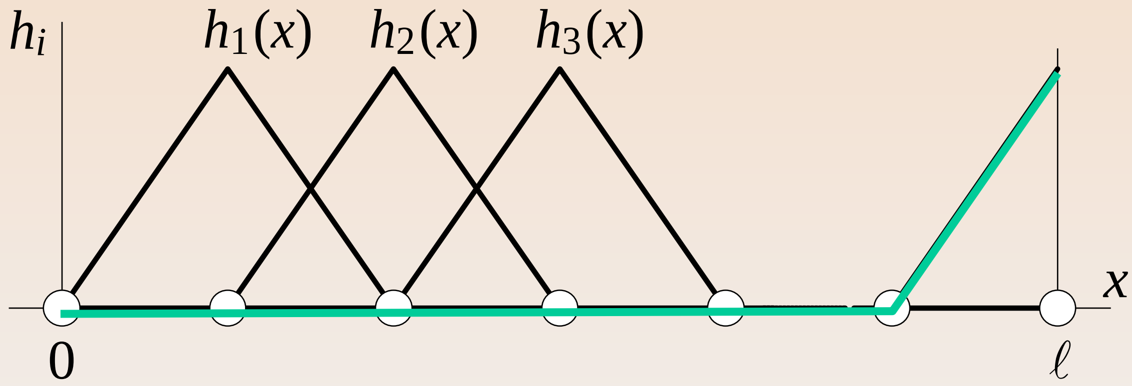
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

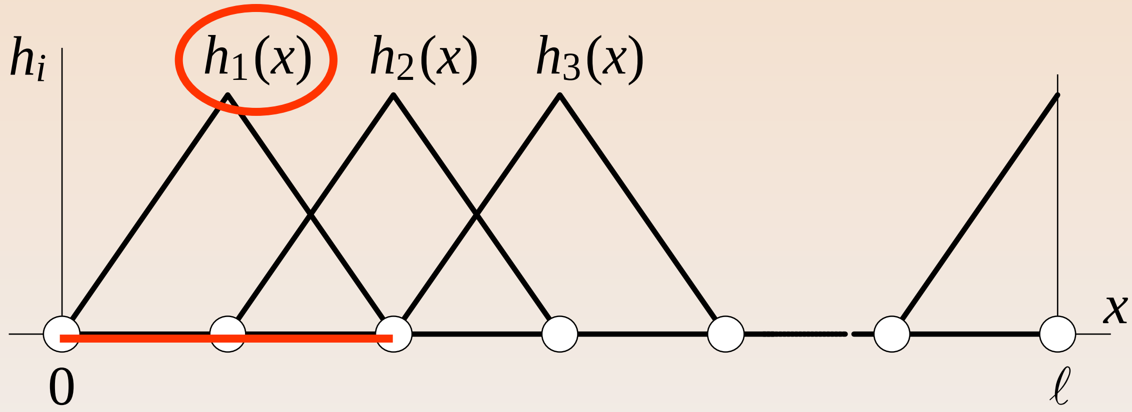
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

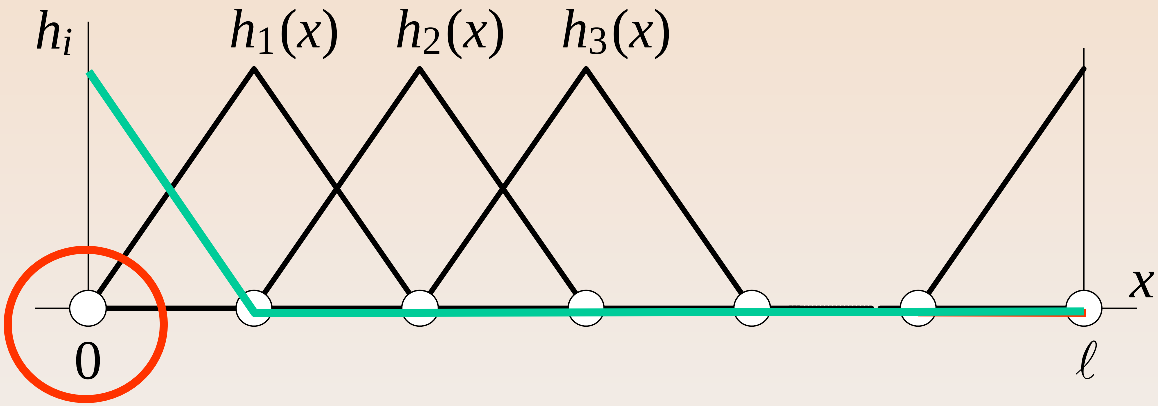
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., p$) à support compact

Méthode des éléments finis : approche globale

- Caractérisation des fonctions de forme



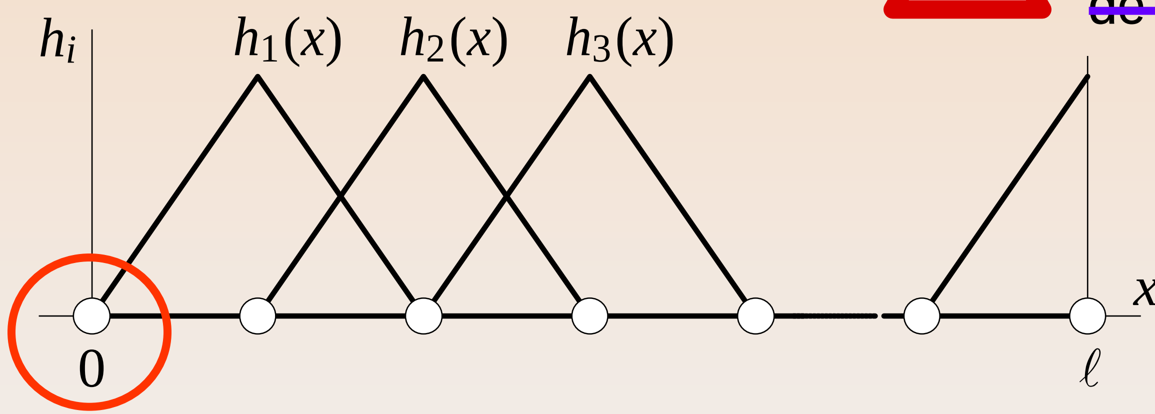
Fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ à support compact

Respect nécessaire de la condition aux limites essentielle par seule la fonction "$h_0(x)$"

Méthode des éléments finis : approche globale

~~Inconvénient de la méthode de Galerkin~~

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ à support compact

Respect nécessaire de la condition aux limites essentielle par seule la fonction "$h_0(x)$"

Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix des fonctions de forme nodale $h_i(x)$ à support compact

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

$$= R\,\delta u^h(\ell) + \int_0^\ell \ldots \delta u^h\,\mathrm{d}x \quad \forall\, \delta u^h \in V^h$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\,q_i \qquad \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\,\delta q_i$$

  - Fonctions au moins du premier degré (polynômes)
  - Fonctions suffisamment régulières
  - Fonctions continues

Méthode des éléments finis : approche globale

- Critères généraux de convergence
  - Critère de complétude ou de complétion : fonctions $h_i(x)$ affines sur les éléments, c'est-à-dire constituant une base complète permettant la représentation des états de déformation constante et les déplacements rigides
  - Critère de différentiabilité : fonctions $h_i(x)$ suffisamment régulières à l'intérieur des éléments pour assurer que le déplacement u^h appartienne à la classe des fonctions U^h
  - Critère de continuité : fonctions $h_i(x)$ continues aux interfaces des éléments pour assurer la continuité du déplacement u^h

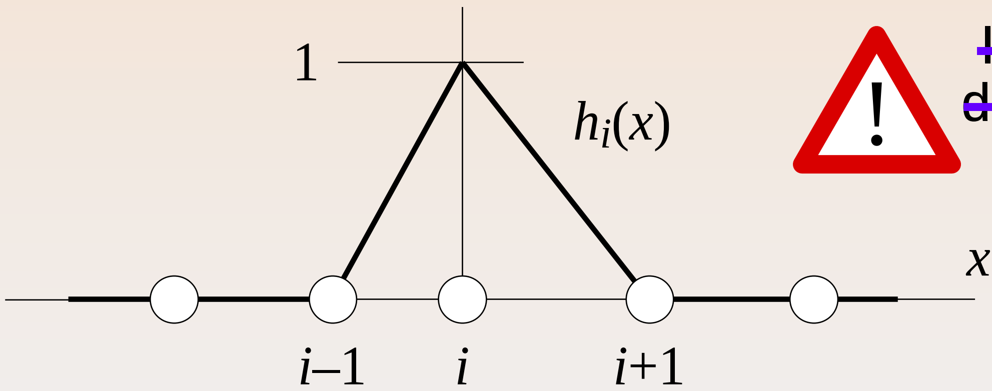
Méthode des éléments finis : approche globale

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

LMAF

- Caractérisation physique des inconnues (critère restreint de continuité) = déplacements nodaux

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p) \qquad x_j \text{ position du nœud } j$$



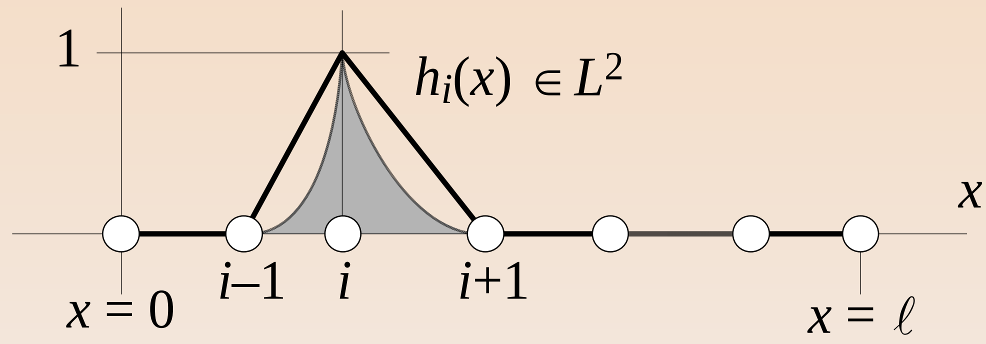
~~Inconvénient de la méthode de Galerkin~~

$$\Rightarrow u^h(x_j) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_j)\, q_i = \sum_{i=1}^{p} \delta_{ij}\, q_i = q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

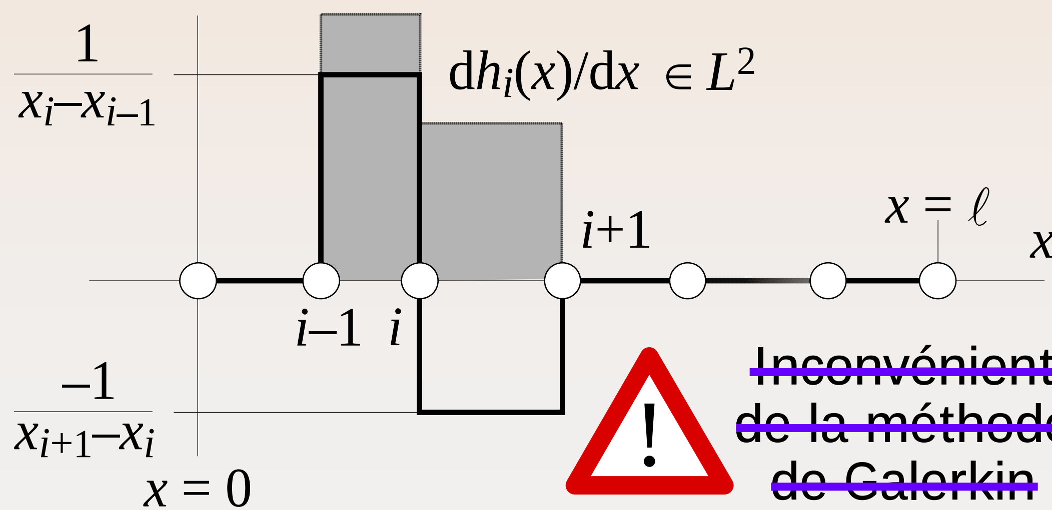
Méthode des éléments finis : approche globale

- Choix final des fonctions de forme nodales

$$h_i(x) \in H^1(]0, \ell[)$$



$h_i(x)$ fonction linéaire prenant la valeur 1 au nœud i et 0 aux autres points nodaux



~~Inconvénient de la méthode de Galerkin~~

Méthode des éléments finis : approche globale

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^{\ell} EA\,[\mathrm{d}(\mathbf{H}\,\delta\mathbf{q})^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x]\,[\mathrm{d}(\mathbf{H}\,\mathbf{q})/\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}x$$

$\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{q}$

$$= [\mathbf{H}(\ell)\,\delta\mathbf{q}]^{\mathrm{T}} P + \int_0^{\ell} [\mathbf{H}\,\delta\mathbf{q}]^{\mathrm{T}} q\,\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow\ \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \left[\underbrace{\int_0^{\ell} EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} - \underbrace{[\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P + \int_0^{\ell} \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x]}_{\text{vecteur des forces appliquées } \mathbf{r}} \right] = 0 \qquad \forall\,\delta\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow\ \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0 \qquad \forall\,\delta\mathbf{q}$$

Méthode des éléments finis : approche globale

- Système d'équations linéaires (analogue à la forme faible discrète issue du processus de Galerkin)

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA\,(\mathrm{d}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

matrice ($p \times p$) de rigidité

$$= \int_0^\ell EA\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\ell)\,P + \int_0^\ell \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,q\,\mathrm{d}x$$

vecteur ($p \times 1$) des forces appliquées

Méthode des éléments finis : approche globale

- Forme indicielle du système d'équations

$$\sum_{j=1}^{p} k_{ij}\, q_j = r_i \qquad (i = 1, 2, ..., p)$$

$$k_{ij} = \int_0^{\ell} EA\,(\mathrm{d}h_i/\mathrm{d}x)\,(\mathrm{d}h_j/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

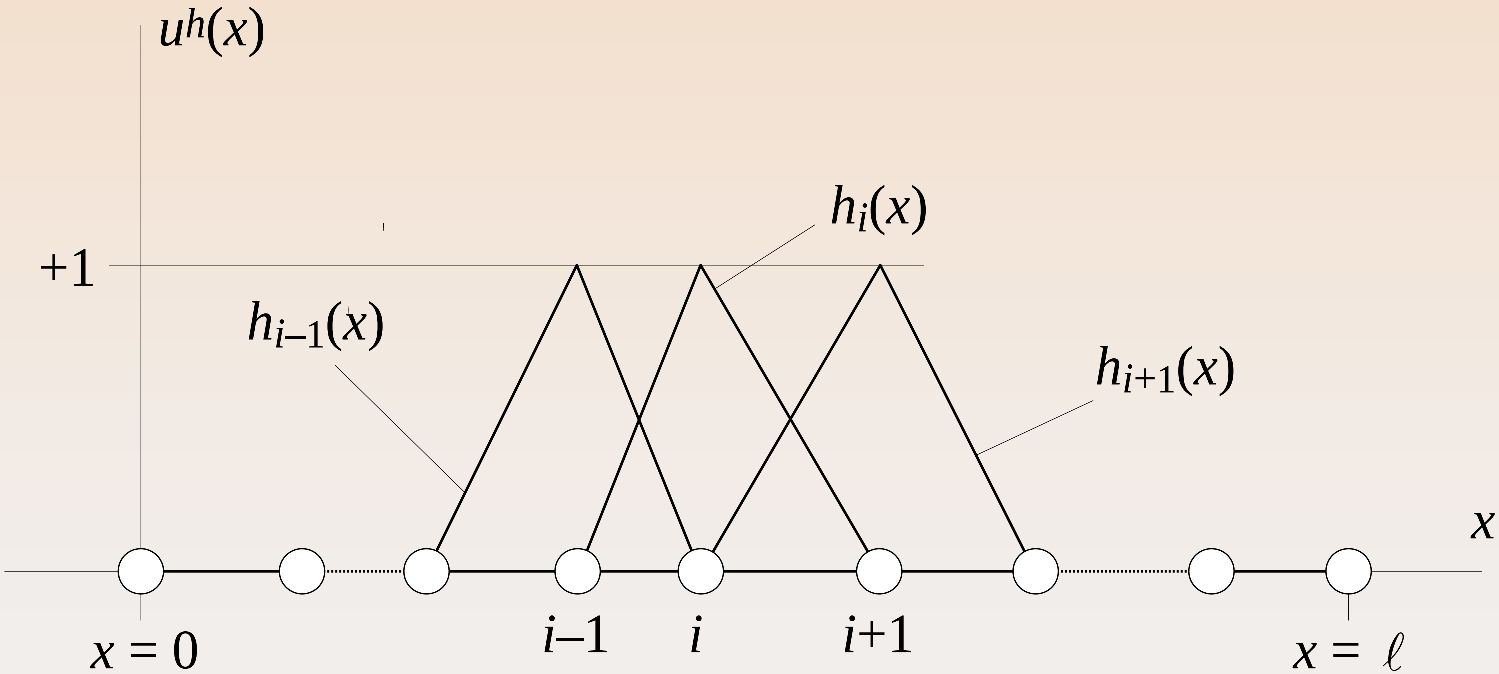
$$r_i = h_i(\ell)\,P + \int_0^{\ell} h_i\, q\,\mathrm{d}x$$

⚠ Fonctions de forme nodales $h_i(x)$ à support compact $\Rightarrow$ matrice $\mathbf{K}$ éparse

⚠ Une seule fonction de forme concernée par la condition aux limites naturelle

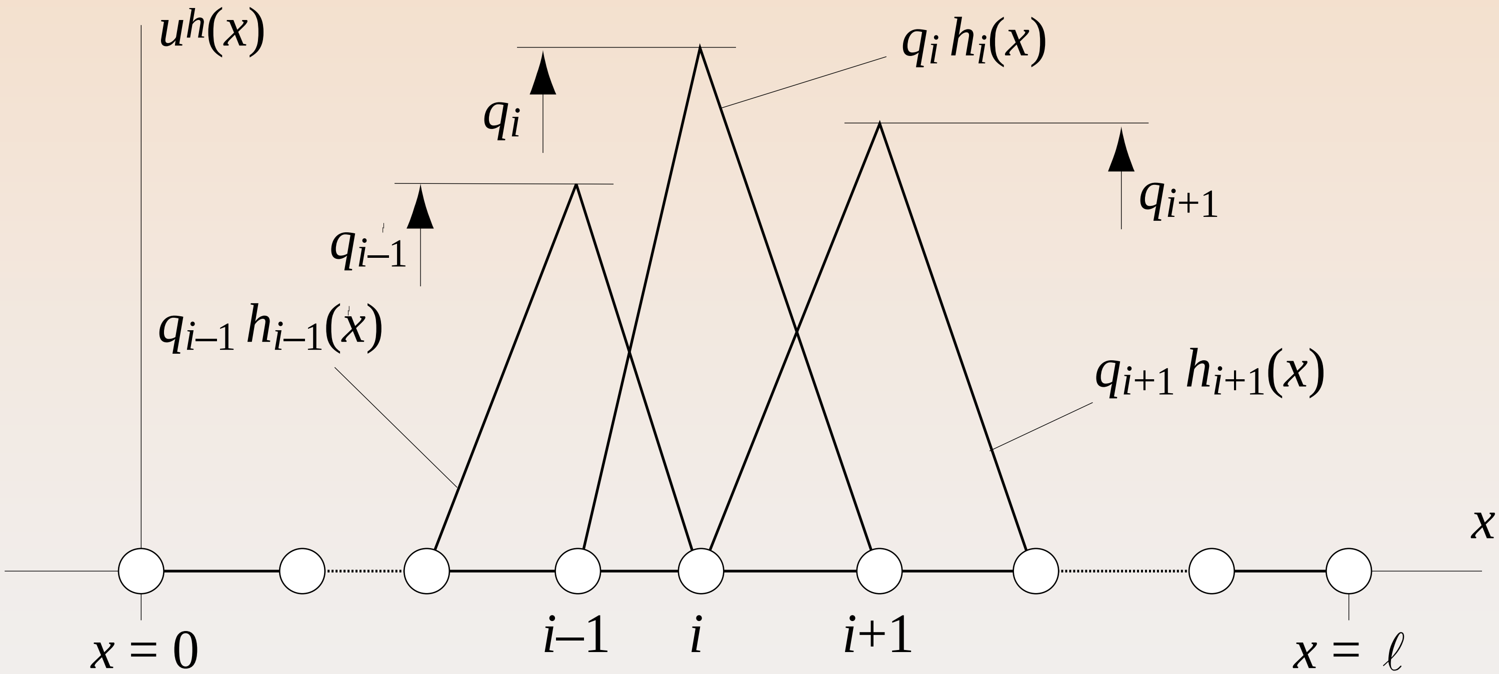
Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



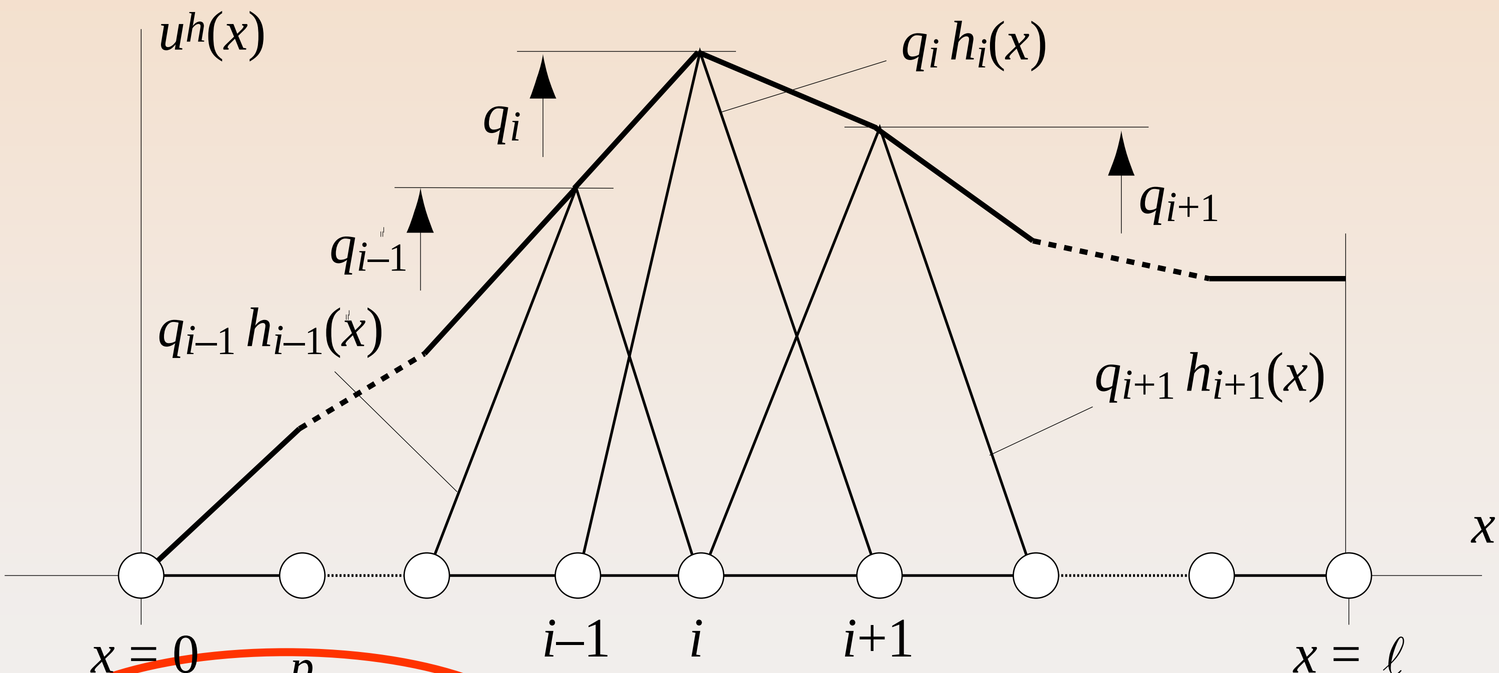
Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



Méthode des éléments finis : approche globale

- Allure de la solution obtenue par la méthode des éléments finis



$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\, q_i$$ fonction continue et linéaire par morceaux

Approche globale des éléments finis : avantages et inconvénients

- Avantages de la méthode par rapport au procédé de Galerkin
  - Systématisation poussée du processus : approximation sous la forme de polynômes de faible degré continus par morceaux
  - Fonctions de forme à support compact : matrice de rigidité peu dense, condition aux limites essentielle à satisfaire par une fonction
  - Interprétation physique des inconnues : déplacements discrets

- Inconvénients de l'approche globale de la méthode des éléments finis
  - Prise en compte limitée de la compacité des fonctions de forme nodales : fonctions restant définies sur l'ensemble du domaine
  - Pas de mise à profit de l'additivité de l'intégration : intégrales calculées sur l'ensemble de domaine