

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

Equivalence des formulations forte et faible

- Forme forte $\Rightarrow$ forme faible
 - Rappel de la formulation forte

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans }]0, \ell[$$

$$u(0) = 0$$

$$EA (du/dx)|_{x=\ell} = P$$

- Forme intégrale pondérée

$$0 = \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx \quad \forall \delta u \in V$$

Equivalence des formulations forte et faible

- Intégration par parties

$$0 = \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - [EA (du/dx) \delta u]_0^\ell - \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

- Prise en compte des conditions aux limites et du caractère cinématiquement admissible du déplacement virtuel

$$\begin{aligned} u \in U: \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - P \delta u(\ell) \\ = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V \\ \Rightarrow \text{forme } \underline{\text{faible}} \end{aligned}$$

Equivalence des formulations forte et faible

- Forme faible $\Rightarrow$ forme forte
 - Rappel de la formulation faible

$$\begin{aligned} u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - P \delta u(\ell) \\ = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

- Intégration par parties

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u dx \\ + [EA (du/dx) - P] \delta u \big|_{x=\ell} = 0 \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

Equivalence des formulations forte et faible

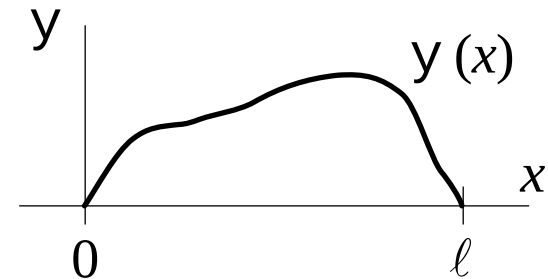
- Choix d'une forme pour le déplacement virtuel

$$\delta u = \psi [EA (d^2u/dx^2) + q]$$

$\psi(x)$ arbitraire

- Cas particulier 1

$$\psi > 0, \psi(0) = 0, \psi(\ell) = 0$$



$$\Rightarrow \int_0^\ell \psi [EA (d^2u/dx^2) + q]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow -EA (d^2u/dx^2) = q \text{ dans }]0, \ell[$$

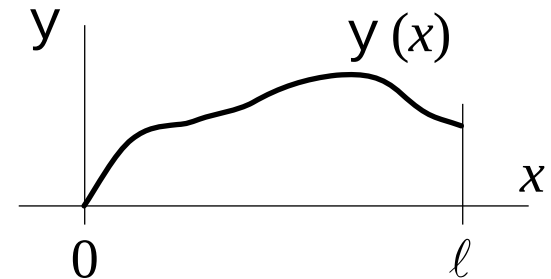
Equivalence des formulations forte et faible

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx \\ + [EA (du/dx) - P] \delta u \big|_{x=\ell} = 0 \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

- Cas particulier 2

$$\delta u = \psi$$

$$\psi > 0, \quad \psi(0) = 0,$$



$$EA (d^2u/dx^2) + q = 0 \quad \forall x \in]0, \ell[$$

$$\Rightarrow [EA (du/dx) - P] \delta u \big|_{x=\ell} = 0$$

$$\Rightarrow EA (du/dx) \big|_{x=\ell} = P$$

$$u(0) = 0 \quad \text{car } u \in U$$

$\Rightarrow$ forme forte

Formulation faible approchée

- Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel

$$u \approx u^h \in U^h \subset U \quad \delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Choix de n fonctions de forme linéairement indépendantes, constituant une base du sous-espace U^h de dimension n

$$h_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Méthode de Galerkin(e)

- Approximation de Galerkin

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \boldsymbol{\alpha}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n]$ matrice ($1 \times n$) des fonctions de forme

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}^T$ vecteur ($n \times 1$) des inconnues

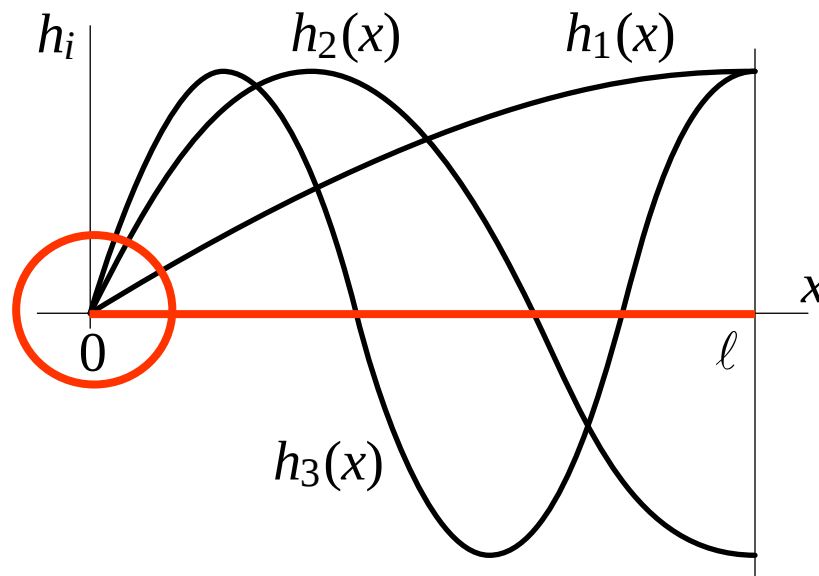
$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \delta \boldsymbol{\alpha}$$



Même forme
d'approximation
pour u^h et δu^h

Méthode de Galerkin

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) définies globalement sur le domaine $[0, \ell]$ et respectant la condition aux limites essentielle

Méthode de Galerkin

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^\ell EA [d(\mathbf{H} \delta\alpha)^T/dx] [d(\mathbf{H} \alpha)/dx] dx$$

$$= [\mathbf{H}(\ell) \delta\alpha]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta\alpha]^T q dx \quad \forall \delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\alpha^T \left[\underbrace{\int_0^\ell EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) dx}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \underbrace{\triangle !}_{\text{Transposition}} - \underbrace{[\mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx]}_{\text{vecteur des forces appliquées } \mathbf{r}} \right] = 0 \quad \forall \delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\alpha^T (\mathbf{K} \alpha - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta\alpha$$

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$= \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{H}}{dx} \quad \begin{array}{l} \text{matrice-déformation ou de} \\ \text{passage des déplacements aux} \\ \text{déformations} \end{array}$$

Méthode de Galerkin

- Forme indicielle de la formulation faible discrète

$$\delta \alpha^T (\mathbf{K} \alpha - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta \alpha \Rightarrow \mathbf{K} \alpha = \mathbf{r}$$

$$\delta \alpha = \{1, 0, \dots, 0, \dots, 0\}^T \rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \quad \sum_{j=1}^n k_{1j} \alpha_j = r_1$$

$$\delta \alpha = \{0, 1, \dots, 0, \dots, 0\}^T \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad \sum_{j=1}^n k_{2j} \alpha_j = r_2$$

...

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^\ell EA (dh_i/dx) (dh_j/dx) dx \\ r_i &= h_i(\ell) P + \int_0^\ell h_i q dx \end{aligned}$$

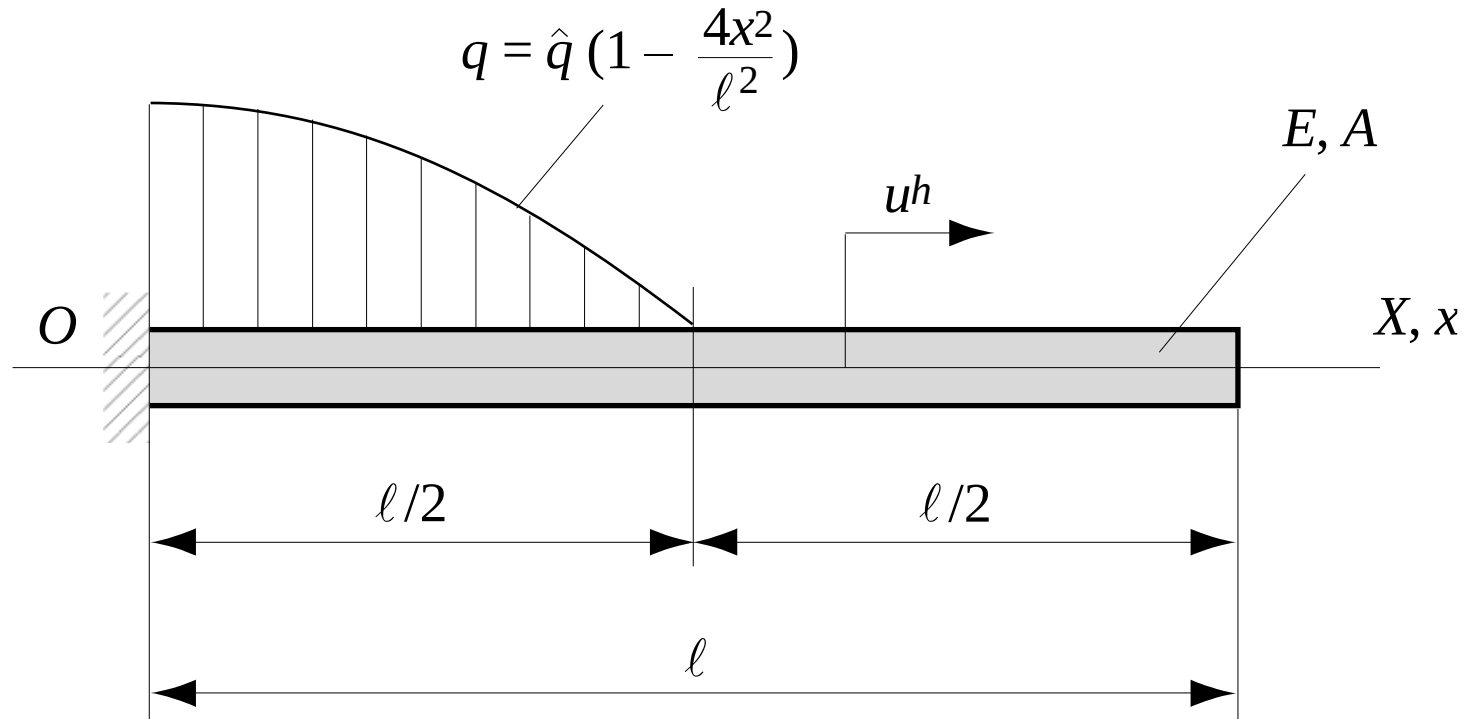
Avantages et inconvénients de la méthode de Galerkin

- Avantages de la méthode de Galerkin par rapport aux autres procédés des résidus pondérés
 - Même approximation pour u^h et $\delta u^h \Rightarrow$ construction d'un seul sous-espace U^h et d'un seul ensemble de fonctions $h_i(x)$
 - Meilleure approximation possible de u^h dans le sous-espace U^h
- Inconvénients de la méthode de Galerkin
 - Aucune information pour la construction des fonctions de forme $h_i(x) \Rightarrow$ manque de systématisation de la procédure
 - Difficultés à trouver des fonctions $h_i(x)$ globales satisfaisant les conditions aux limites essentielles
 - Inconnues α_i sans interprétation physique



Démonstration
ultérieure

Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Barre prismatique soumise à une charge répartie

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Adaptation de la formulation faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Approximation à deux termes des déplacements réel et virtuel par la méthode de Galerkin

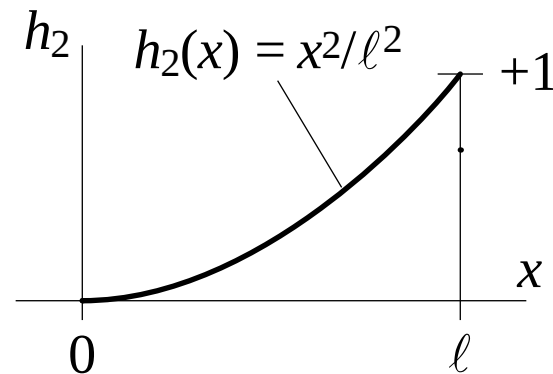
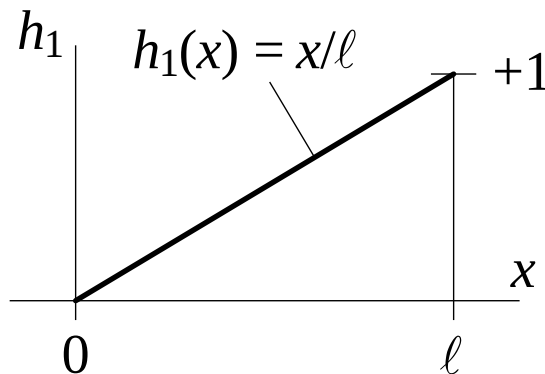
$$\begin{aligned} u^h(x) &= \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) \\ \delta u^h(x) &= \delta\alpha_1 h_1(x) + \delta\alpha_2 h_2(x) \end{aligned}$$

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Choix des fonctions d'approximation

$$h_1(x) = x/\ell \quad (dh_1/dx = 1/\ell)$$

$$h_2(x) = x^2/\ell^2 \quad (dh_2/dx = 2x/\ell^2)$$



Respect de la condition aux limites essentielle en $x = 0$

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul de la matrice de rigidité $\mathbf{K}$

$$k_{11} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx)^2 dx = \int_0^\ell \frac{EA}{\ell^2} dx = EA/\ell$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= k_{21} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx) (dh_2/dx) dx \\ &= \int_0^\ell EA \frac{2x}{\ell^3} dx = EA/\ell \end{aligned}$$

$$k_{22} = \int_0^\ell EA (dh_2/dx)^2 dx = \int_0^\ell EA \frac{4x^2}{\ell^4} dx = 4EA/(3\ell)$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul du vecteur des forces externes $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_1 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x}{\ell} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_2 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x^2}{\ell^2} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/60 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Système d'équations $\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

- Résolution du système d'équations

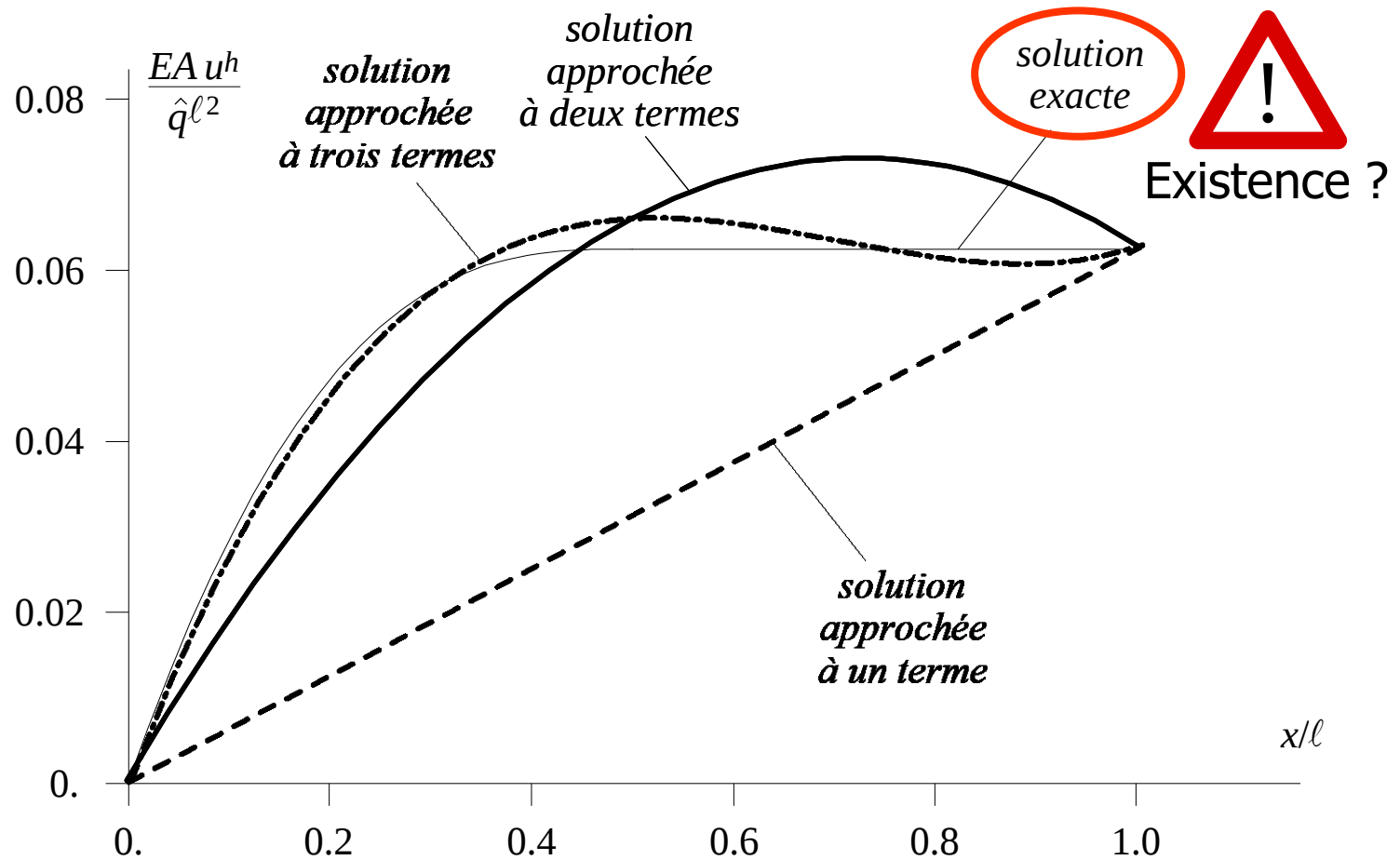
$$\alpha_1 = \hat{q}\ell^2/(5EA)$$

$$\alpha_2 = -11\hat{q}\ell^2/(80EA)$$

- Solution approchée du problème

$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell x}{5EA} \left(1 - \frac{11x}{16\ell} \right)$$

Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Discussion des résultats et commentaires
 - Accroissement de la précision globale avec le nombre n de termes dans l'approximation u^h
 - Solution exacte en $x = 0$

Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation u^h
 - Solution exacte en $x = \ell$

Résultat non généralisable
 - Condition aux limites naturelle approchée en $x = \ell$, mais approximation améliorée avec le nombre n de termes