

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Equivalence des formulations forte et faible

- Forme forte $\Rightarrow$ forme faible
 - Rappel de la formulation forte

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans }]0, \ell[$$

$$u(0) = 0$$

$$EA (du/dx)|_{x=\ell} = P$$

- Forme intégrale pondérée

$$0 = \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx \quad \forall \delta u \in V$$



Equivalence des formulations forte et faible

- Intégration par parties

$$0 = \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - [EA (du/dx) \delta u]_0^\ell - \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

- Prise en compte des conditions aux limites et du caractère cinématiquement admissible du déplacement virtuel

$$u \in U: \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

$\Rightarrow$ forme faible



Equivalence des formulations forte et faible

- Forme faible $\Rightarrow$ forme forte
 - Rappel de la formulation faible

$$\begin{aligned} u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - P \delta u(\ell) \\ = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V \end{aligned}$$

- Intégration par parties

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u dx \\ + [EA (du/dx) - P] \delta u \big|_{x=\ell} = 0 \quad \forall \delta u \end{aligned}$$



Equivalence des formulations forte et faible

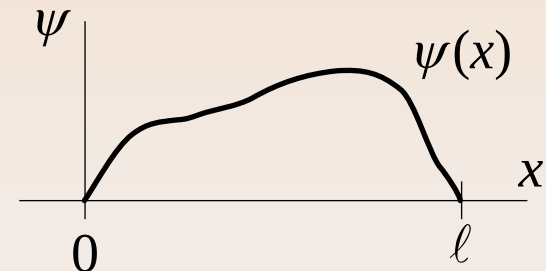
- Choix d'une forme pour le déplacement virtuel

$$\delta u = \psi [EA (d^2u/dx^2) + q]$$

$\psi(x)$ arbitraire

- Cas particulier 1

$$\psi > 0, \psi(0) = 0, \psi(\ell) = 0$$



$$\Rightarrow \int_0^\ell \psi [EA (d^2u/dx^2) + q]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow -EA (d^2u/dx^2) = q \text{ dans }]0, \ell[$$

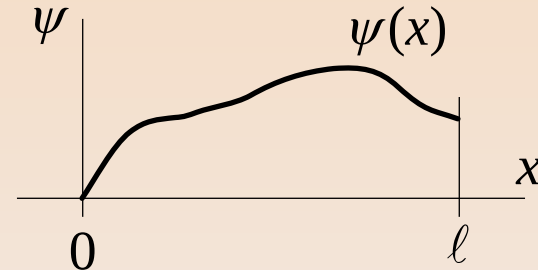


Equivalence des formulations forte et faible

- Cas particulier 2

$$\psi > 0, \psi(0) = 0,$$

$$EA (d^2u/dx^2) + q = 0 \\ \forall x \in]0, \ell[$$



$$\Rightarrow [EA (du/dx) - P] \delta u |_{x=\ell} = 0$$

$$\Rightarrow EA (du/dx)|_{x=\ell} = P \quad \text{car } \delta u \in V$$

$$u(0) = 0 \quad \text{car } u \in U$$

$\Rightarrow$ forme forte



Formulation faible approchée

- Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel

$$u \approx u^h \in U^h \subset U \quad \delta u \approx \delta u^h \in V^h \subset V$$

- Forme faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Choix de n fonctions de forme linéairement indépendantes, constituant une base du sous-espace U^h de dimension n

$$h_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



Méthode de Galerkin(e)

- Approximation de Galerkin

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \boldsymbol{\alpha}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n]$ matrice $(1 \times n)$ des fonctions de forme

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}^T$ vecteur $(n \times 1)$ des inconnues

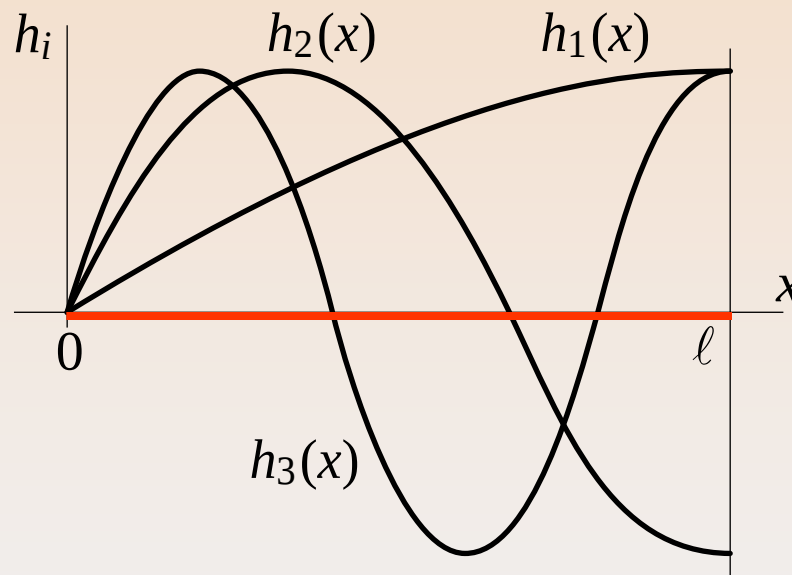
$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x) = \mathbf{H}(x) \delta \boldsymbol{\alpha}$$



Même forme
d'approximation
pour u^h et δu^h

Méthode de Galerkin

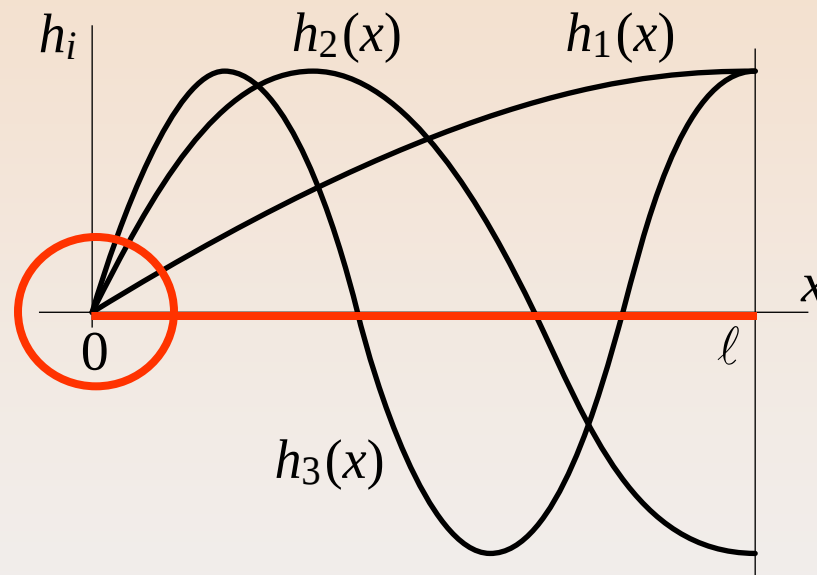
- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) définies globalement sur le domaine $[0, \ell]$

Méthode de Galerkin

- Caractérisation des fonctions de forme



Fonctions $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) définies globalement sur le domaine $[0, \ell]$ et respectant la condition aux limites essentielle

Méthode de Galerkin

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EA [d(\mathbf{H} \delta\boldsymbol{\alpha})^T/dx] [d(\mathbf{H} \boldsymbol{\alpha})/dx] dx \\ = [\mathbf{H}(\ell) \delta\boldsymbol{\alpha}]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta\boldsymbol{\alpha}]^T q dx \quad \forall \delta\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$



Transposition



Méthode de Galerkin

- Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

$$\int_0^\ell EA [d(\mathbf{H} \delta\alpha)^T/dx] [d(\mathbf{H} \alpha)/dx] dx$$

$$= [\mathbf{H}(\ell) \delta\alpha]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta\alpha]^T q dx \quad \forall \delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\alpha^T \left[\underbrace{\int_0^\ell EA (d\mathbf{H}^T/dx) (d\mathbf{H}/dx) dx}_{\text{matrice de rigidité } \mathbf{K}} \cdot \alpha - \underbrace{[\mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx]}_{\text{vecteur des forces appliquées } \mathbf{r}} \right] = 0 \quad \forall \delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\alpha^T (\mathbf{K} \alpha - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta\alpha$$

Méthode de Galerkin

- Forme faible discrète

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dx} \right) dx \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$= \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell) P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \quad \text{vecteur des forces appliquées}$$

$$\mathbf{B} = d\mathbf{H}/dx \quad \begin{array}{l} \text{matrice-déformation ou de} \\ \text{passage des déplacements aux} \\ \text{déformations} \end{array}$$



Méthode de Galerkin

- Forme indicielle de la formulation faible discrète

$$\delta \alpha^T (\mathbf{K} \alpha - \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \delta \alpha \Rightarrow \mathbf{K} \alpha = \mathbf{r}$$

$$\delta \alpha = \{1, 0, \dots, 0, \dots, 0\}^T \rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \quad \sum_{j=1}^n k_{1j} \alpha_j = r_1$$

$$\delta \alpha = \{0, 1, \dots, 0, \dots, 0\}^T \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad \sum_{j=1}^n k_{2j} \alpha_j = r_2$$

...

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA (dh_i/dx) (dh_j/dx) dx$$

$$r_i = h_i(\ell) P + \int_0^\ell h_i q dx$$



Avantages et inconvénients de la méthode de Galerkin

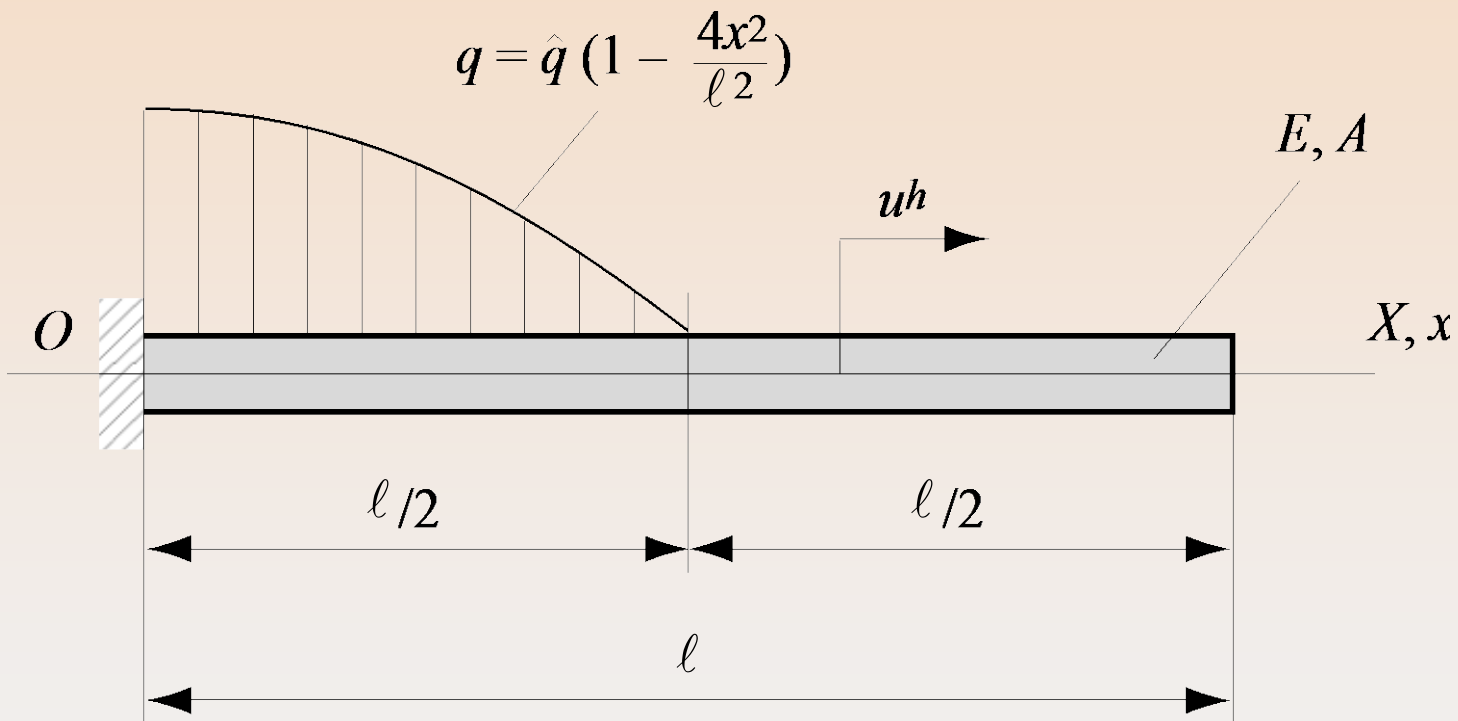
- Avantages de la méthode de Galerkin par rapport aux autres procédés des résidus pondérés
 - Même approximation pour u^h et $\delta u^h \Rightarrow$ construction d'un seul sous-espace U^h et d'un seul ensemble de fonctions $h_i(x)$
 - Meilleure approximation possible de u^h dans le sous-espace U^h
- Inconvénients de la méthode de Galerkin
 - Aucune information pour la construction des fonctions de forme $h_i(x) \Rightarrow$ manque de systématisation de la procédure
 - Difficultés à trouver des fonctions $h_i(x)$ globales satisfaisant les conditions aux limites essentielles
 - Inconnues α_i sans interprétation physique



Démonstration
ultérieure



Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Barre prismatique soumise à une charge répartie



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Adaptation de la formulation faible approchée

$$\begin{aligned} u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx \\ = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h \end{aligned}$$

- Approximation à deux termes des déplacements réel et virtuel par la méthode de Galerkin

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) \\ \delta u^h(x) &= \delta\alpha_1 h_1(x) + \delta\alpha_2 h_2(x) \end{aligned}$$

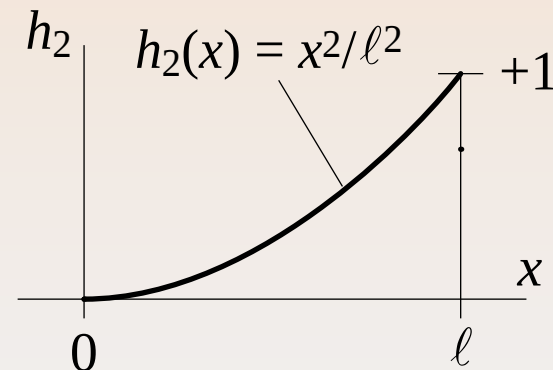
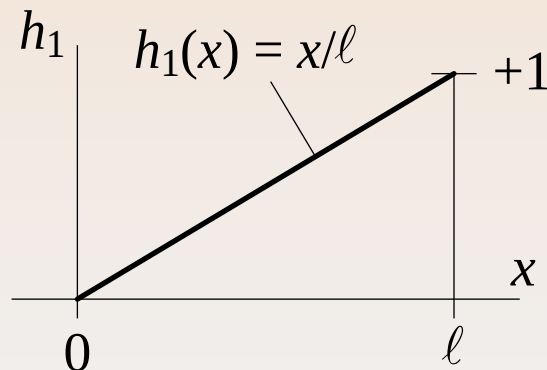


Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Choix des fonctions d'approximation

$$h_1(x) = x/\ell \quad (dh_1/dx = 1/\ell)$$

$$h_2(x) = x^2/\ell^2 \quad (dh_2/dx = 2x/\ell^2)$$



Respect de la condition aux limites essentielle en $x = 0$



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul de la matrice de rigidité $\mathbf{K}$

$$k_{11} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx)^2 dx = \int_0^\ell \frac{EA}{\ell^2} dx = EA/\ell$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= k_{21} = \int_0^\ell EA (dh_1/dx) (dh_2/dx) dx \\ &= \int_0^\ell EA \frac{2x}{\ell^3} dx = EA/\ell \end{aligned}$$

$$k_{22} = \int_0^\ell EA (dh_2/dx)^2 dx = \int_0^\ell EA \frac{4x^2}{\ell^4} dx = 4EA/(3\ell)$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Calcul du vecteur des forces externes $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_1 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x}{\ell} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] h_2 \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left[1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right] \frac{x^2}{\ell^2} \, dx \\ &= \hat{q}\ell/60 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Système d'équations $\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{Bmatrix} 15 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

- Résolution du système d'équations

$$\alpha_1 = \hat{q}\ell^2/(5EA)$$

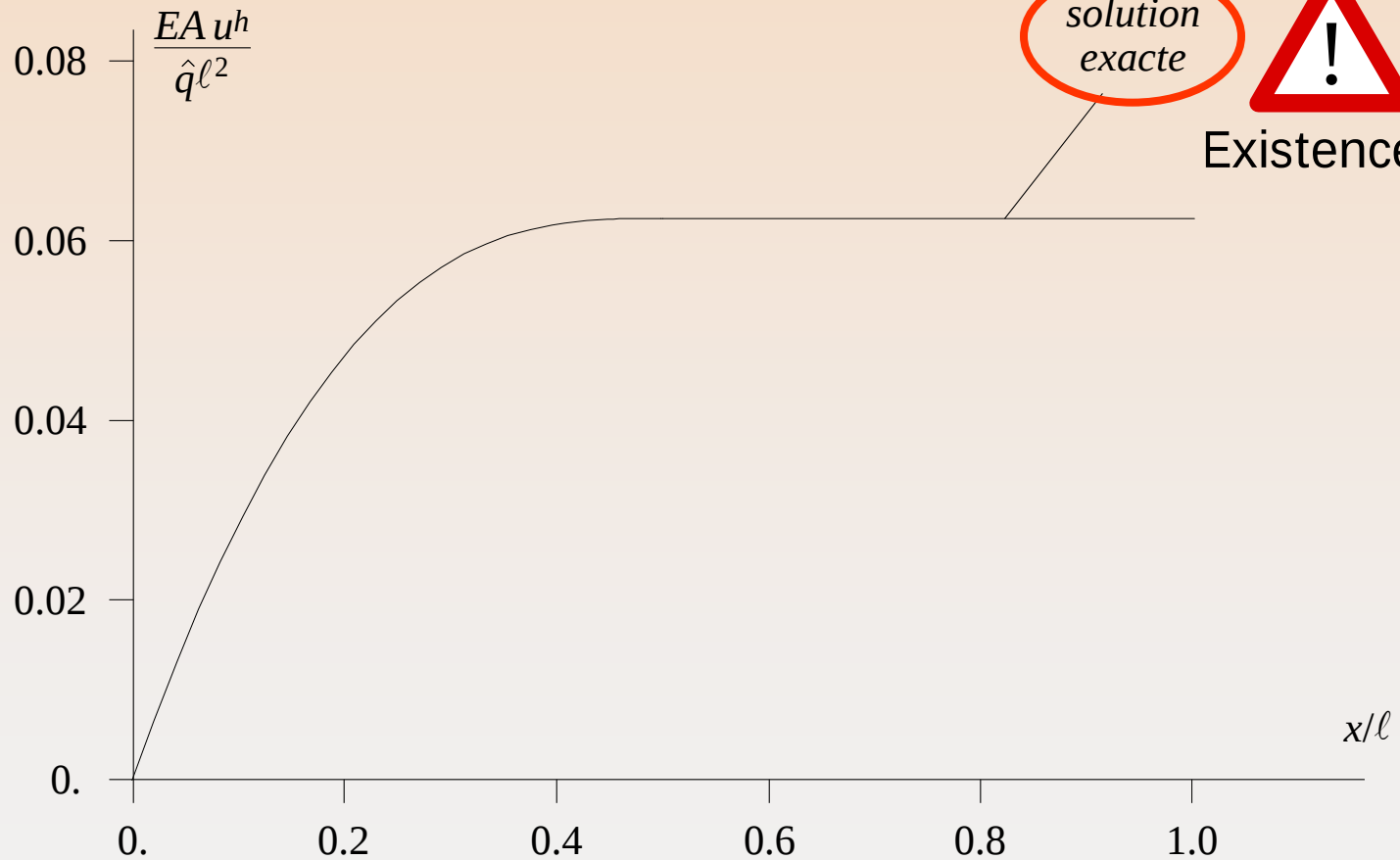
$$\alpha_2 = -11\hat{q}\ell^2/(80EA)$$

- Solution approchée du problème

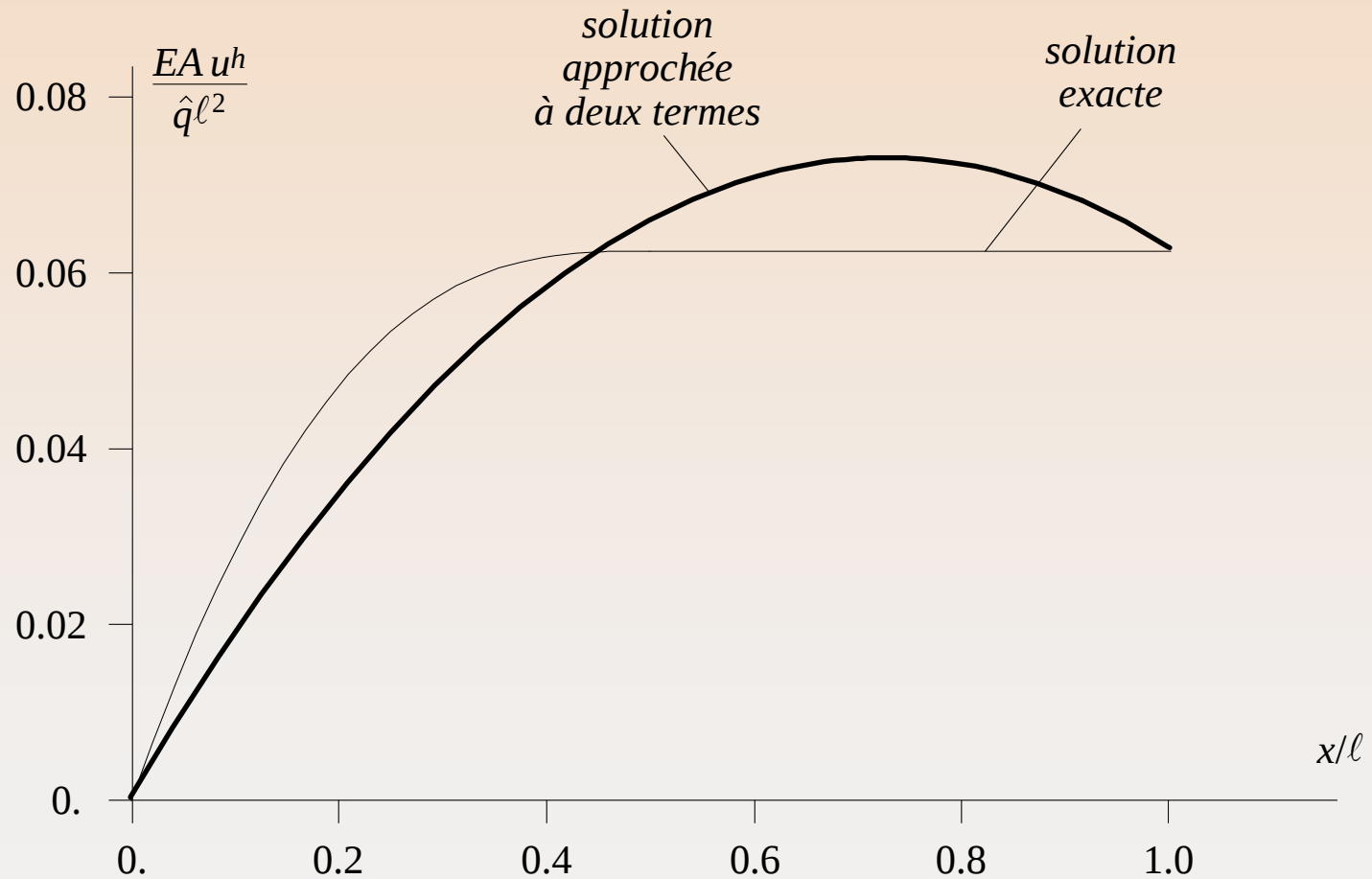
$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell x}{5EA} \left(1 - \frac{11x}{16\ell} \right)$$



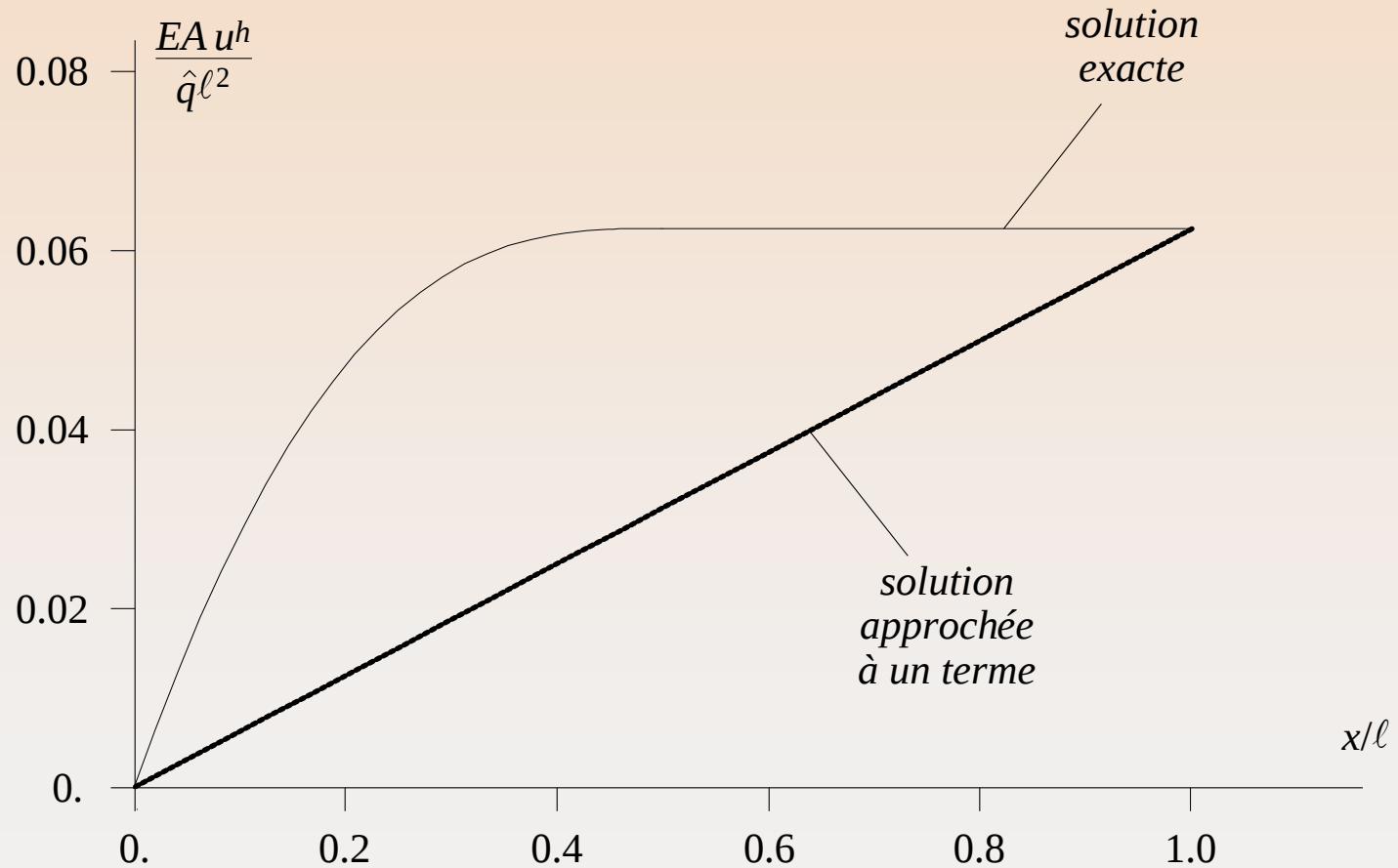
Exemple d'application de la méthode de Galerkin



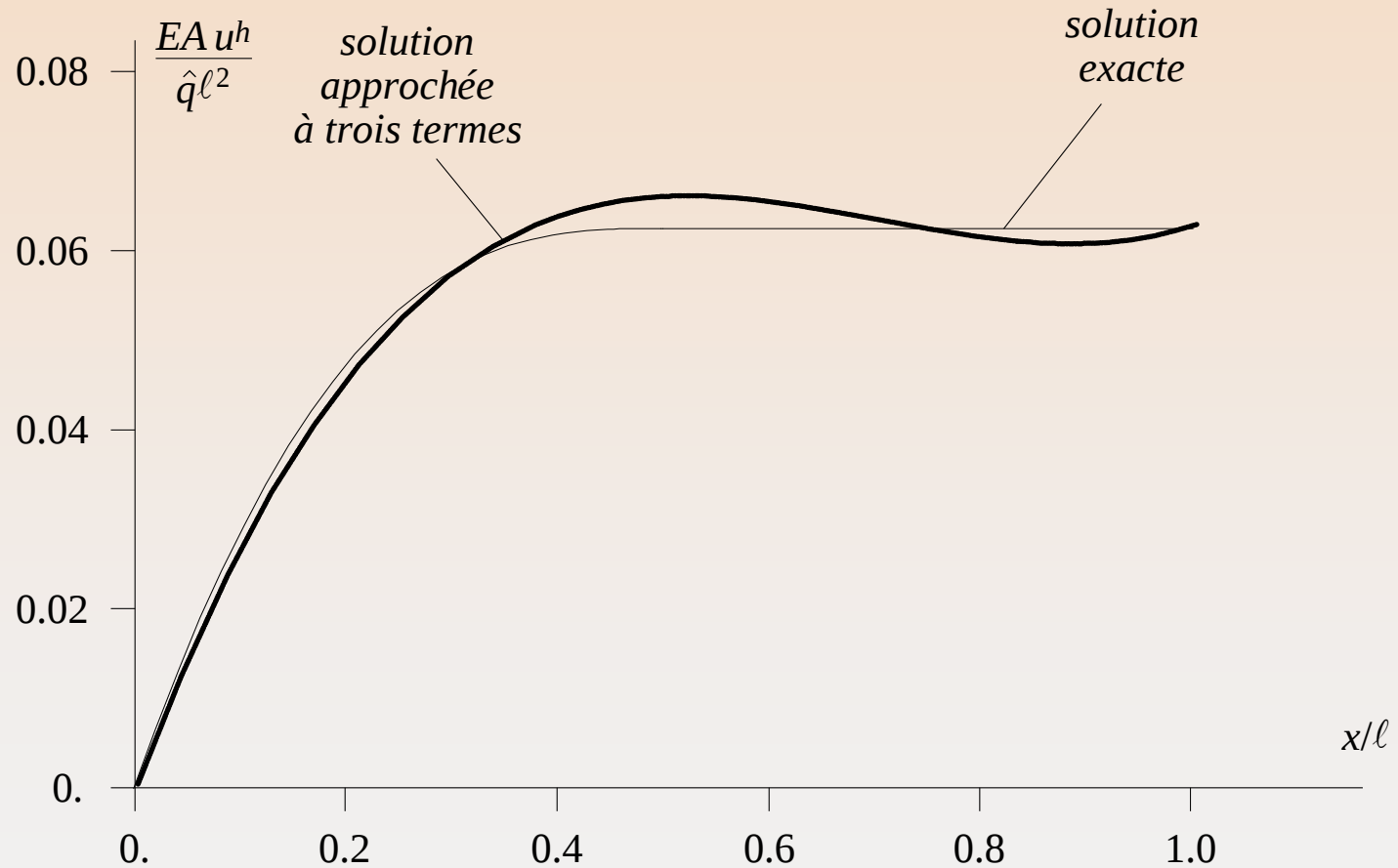
Exemple d'application de la méthode de Galerkin



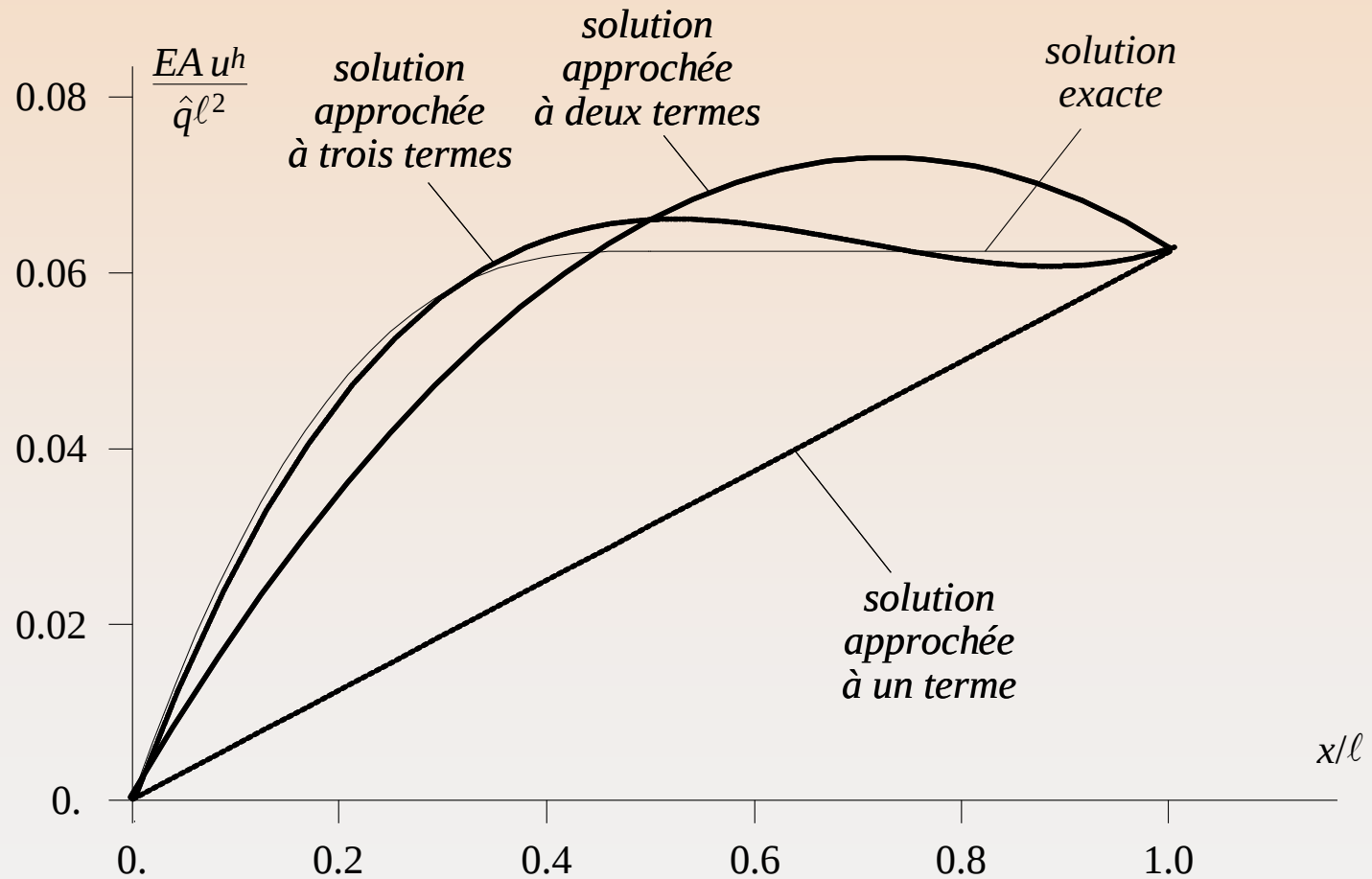
Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Exemple d'application de la méthode de Galerkin



Exemple d'application de la méthode de Galerkin

- Discussion des résultats et commentaires
 - Accroissement de la précision globale avec le nombre n de termes dans l'approximation u^h
 - Solution exacte en $x = 0$



Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation u^h
 - Solution exacte en $x = \ell$



Résultat non généralisable
 - Condition aux limites naturelle approchée en $x = \ell$, mais approximation améliorée avec le nombre n de termes

