

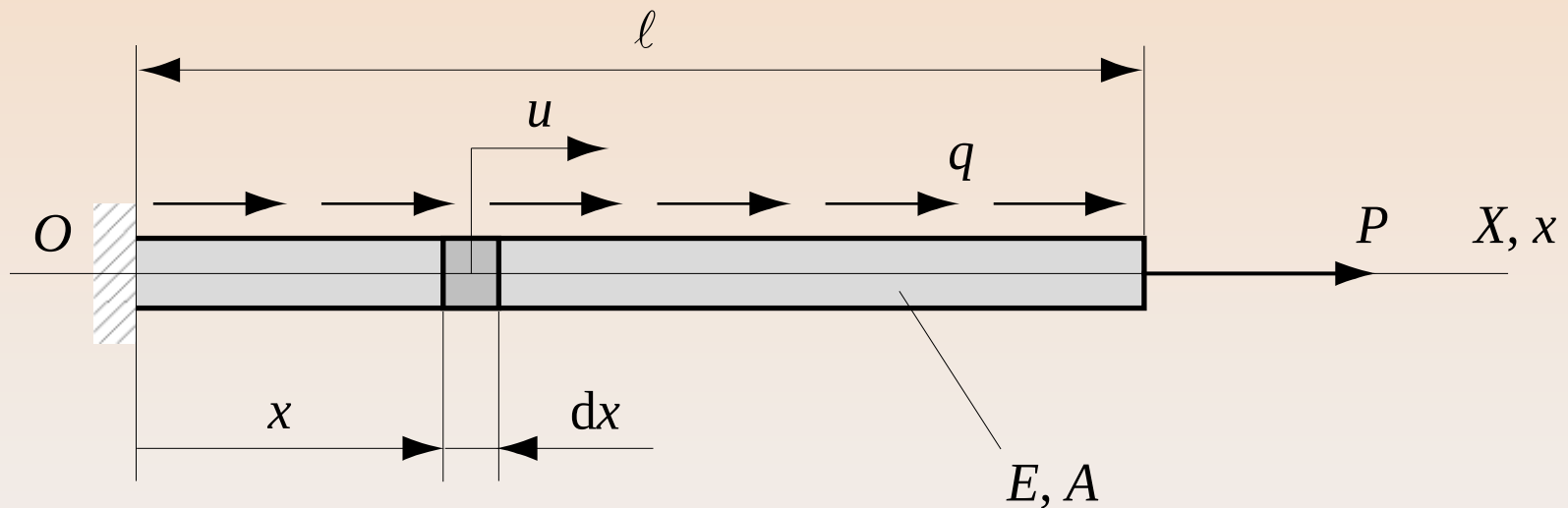
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Problème modèle de la barre en traction/compression



Barreau prismatique encasté soumis à une charge répartie axiale et une force ponctuelle longitudinale



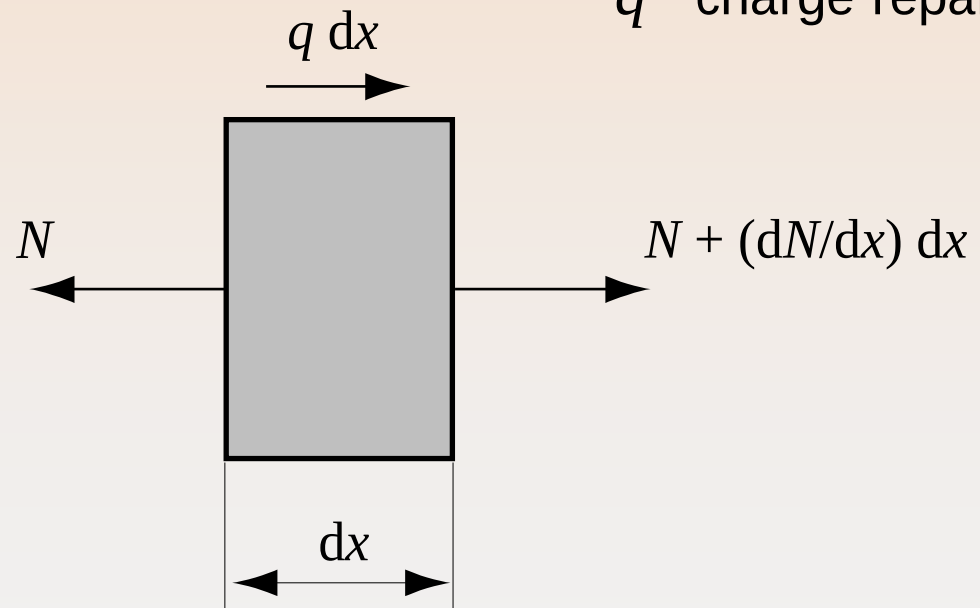
Equilibre de la barre

- Equation d'équilibre

$$\cancel{N} + (dN/dx) \cancel{dx} - \cancel{N} + q \cancel{dx} = 0$$

N effort intérieur
 q charge répartie

$$-dN/dx = q$$



Equilibre de la barre

- Equation constitutive (loi de Hooke)

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

σ_x contrainte normale
 E module d'élasticité
 ε_x déformation axiale

- Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = du/dx \quad u \text{ déplacement axial}$$

- Lien entre effort normal N et déplacement u

$$N = A \sigma_x = EA \varepsilon_x = EA (du/dx) \quad A \text{ section de la barre}$$



Formulation forte du problème

- Equation différentielle du 2^{ème} ordre

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans }]0, \ell[\quad \ell \text{ longueur}$$

$$u \in C^2([0, \ell]); q \in L^2(]0, \ell[)$$

$$L^2(]0, \ell[) = \{q(x) \mid \left\{ \int_0^\ell q^2 dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$



q charge
ponctuelle



charge ponctuelle en
flexion des poutres



Formulation forte du problème

- Equation différentielle du 2^{ème} ordre

$$-EA (d^2u/dx^2) = q \quad \text{dans }]0, \ell[\quad \ell \text{ longueur}$$

$$u \in C^2([0, \ell]); q \in L^2(]0, \ell[)$$

$$L^2(]0, \ell[) = \{q(x) \mid \left\{ \int_0^\ell q^2 dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Condition aux limites essentielle

$$u(0) = 0$$

- Condition aux limites naturelle

$$EA \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=\ell} = P \quad P \text{ force ponctuelle axiale}$$



Formulation intégrale du problème

- Forme intégrale de l'élastostatique du barreau

$$\int_0^\ell [EA (d^2u/dx^2) + q] \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u$$

δu déplacement axial virtuel



caractère
arbitraire de δu

- Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) \, dx - [EA (du/dx) \delta u] \Big|_0^\ell \\ = \int_0^\ell q \delta u \, dx \quad \forall \delta u \end{aligned}$$



Formulation intégrale du problème

- Déplacement virtuel cinématiquement admissible

$$\delta u(0) = 0$$


δu compatible avec la condition aux limites essentielle

- Insertion de la condition aux limites naturelle et de la contrepartie virtuelle de la condition aux limites essentielle

$$\int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx + EA (du/dx)|_{x=0} \delta u(0) = 0$$

$$- EA (du/dx)|_{x=\ell} \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$

$= P$

$$\int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u$$



Formulation faible du problème

- Forme faible de l'élastostatique du barreau : principe des travaux virtuels

$$u \in U : \int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u/dx) dx \\ = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in V$$

- Classes des fonctions admissibles U et V



$$U = \{u(x) \mid u(x) \in H^1(]0, \ell[) , u(0) = 0\}$$

$$V = \{\delta u(x) \mid \delta u(x) \in H^1(]0, \ell[) ; \delta u(0) = 0\}$$

$$H^1(]0, \ell[) = \{w(x) \mid \left\{ \int_0^\ell [w^2 + (dw/dx)^2] dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées continues d'ordre k

$$C^k([0, \ell]) = \{u(x) \mid |u|_k < \infty\}$$

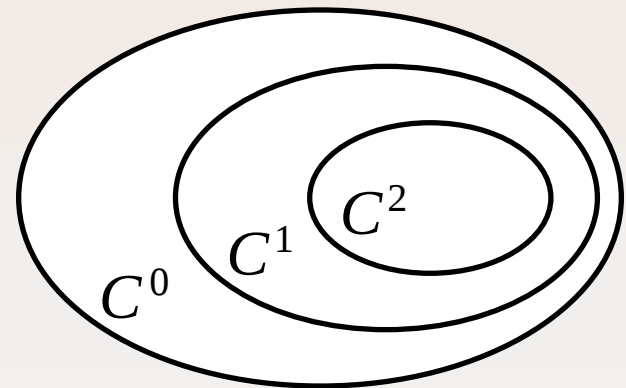
- Norme maximale bornée

$$|u|_k = \max_{0 \leq x \leq \ell} (|u| + |du/dx| + |d^2u/dx^2| + \dots + |d^k u/dx^k|)$$

- Régularité

$$|u|_0 \leq |u|_1 \leq |u|_2 \dots$$

$$\dots C^2 \subset C^1 \subset C^0$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k (espace de Sobolev ou de Hilbert d'ordre k)

$$H^k(]0, \ell[) = \{u(x) \mid \|u\|_k < \infty\}$$

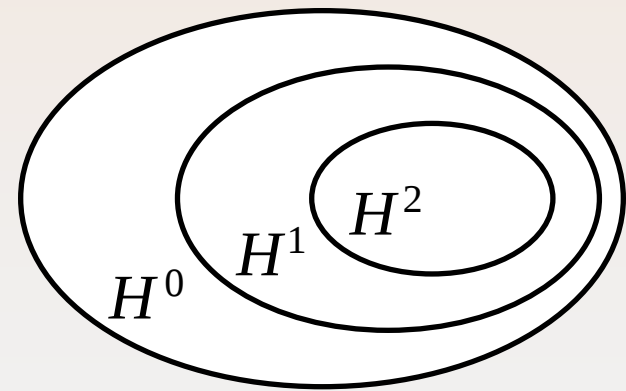
- Norme hilbertienne (norme euclidienne généralisée) bornée

$$\|u\|_k = \left\{ \int_0^\ell [u^2 + (du/dx)^2 + (d^2u/dx^2)^2 + \dots + (d^k u/dx^k)^2] dx \right\}^{1/2}$$

- Régularité

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \dots$$

$$\dots H^2 \subset H^1 \subset H^0$$



Définition des classes de fonctions

- Classe des fonctions de carrés sommables

$$L^2(]0, \ell[) = \{u(x) \mid \left\{ \int_0^\ell u^2 dx \right\}^{1/2} < \infty\}$$

- Autre définition de la classe $H^k(]0, \ell[)$ des fonctions à dérivées de carrés sommables d'ordre k

$$H^k(]0, \ell[) = \{u(x) \mid u \in L^2(]0, \ell[);$$

$$du/dx \in L^2(]0, \ell[);$$

$$d^2u/dx^2 \in L^2(]0, \ell[); \dots;$$

$$d^k u/dx^k \in L^2(]0, \ell[)\}$$



Comparaison des classes de fonctions

- Inclusion des classes de fonctions

$$C^k \subset H^k \quad (k \geq 0)$$

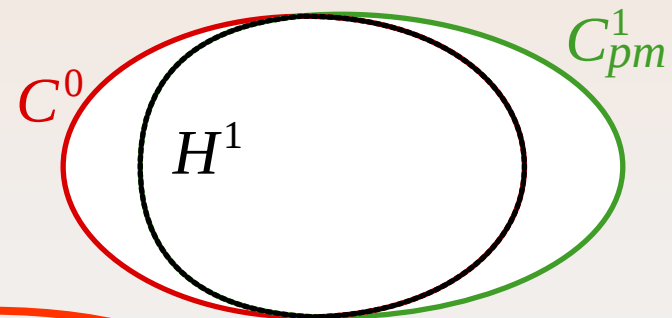
- Théorème d'injection de Sobolev (n dimension du problème)

$$C^k \subset H^k \hookrightarrow C^h \quad (k - h > n/2 ; k, h \geq 0)$$

- Cas particuliers

$$n = 1 \quad C^1 \subset H^1 \hookrightarrow C^0$$

$$n = 2 \quad C^2 \subset H^2 \hookrightarrow C^0$$



$$H^1 \approx C^0 \cap C_{pm}^1 \quad \forall n$$



Comparaison des classes de fonctions

- Exemples en 1D

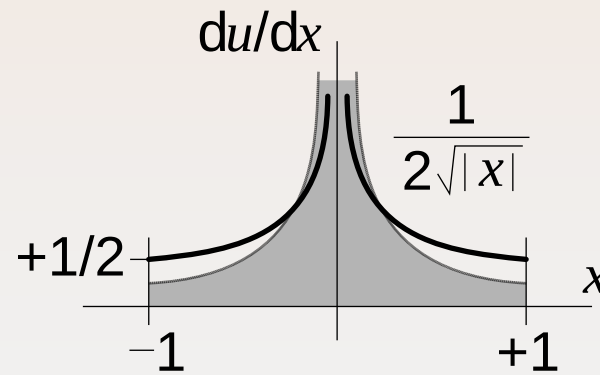
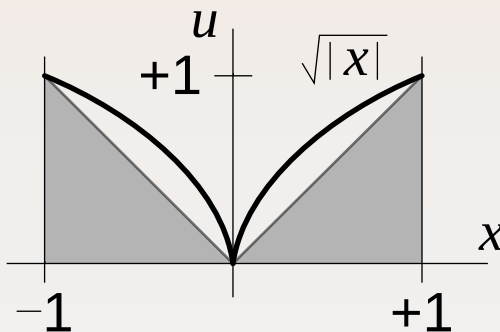
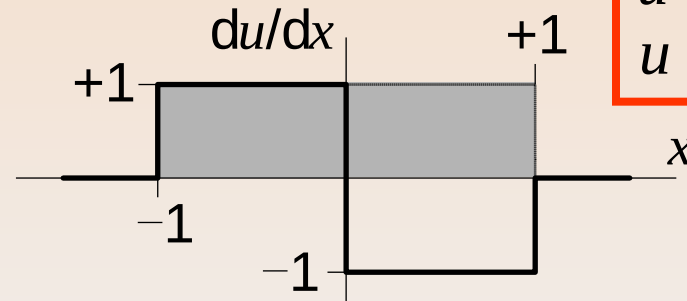
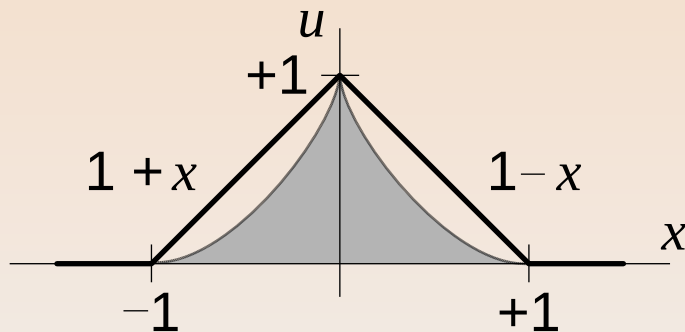
$$H^1 \subsetneq C^0$$



faible $\Leftrightarrow$ forte

$$H^1 \Leftrightarrow C^2$$

$$\begin{aligned} u &\in C^0 \\ u &\in H^1 \\ u &\notin C^1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u &\in C^0 \\ u &\notin H^1 \end{aligned}$$

