

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

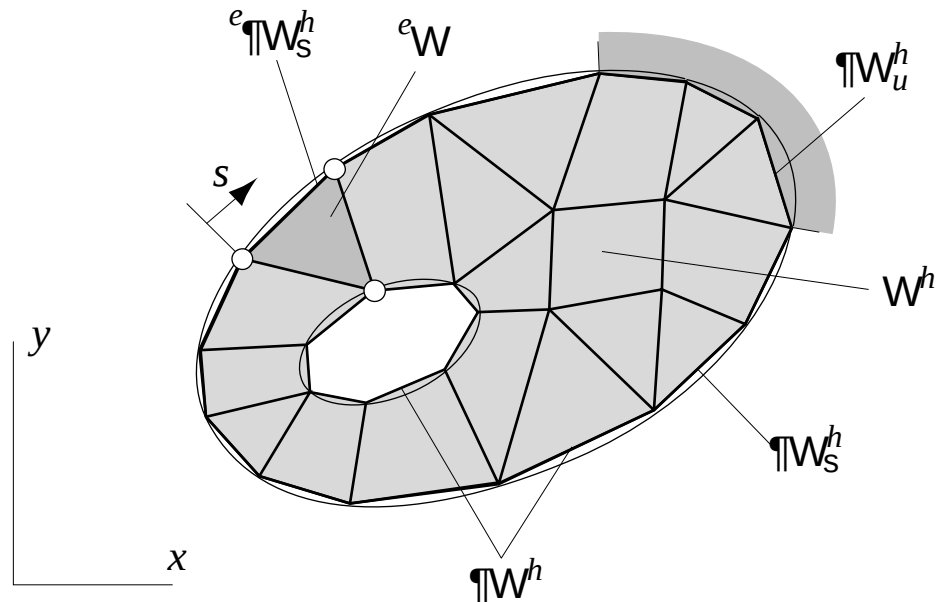
- Rappel de la forme faible discrète étudiée

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

$$(\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m \Omega^e)$$



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Rappel des grandeurs structurelles

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} ({}^e\kappa {}^e\mathbf{B}^\top {}^e\mathbf{B} + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^\top {}^e\mathbf{H}) \, dx \, dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e r {}^e\mathbf{H}^\top {}^e\mathbf{H} \, ds$$

matrice élémentaire de conductivité

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^\top {}^e q \, dx \, dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e\mathbf{H}^\top {}^e t \, ds$$

vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^e\mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_{e_p}]$$

matrice des fonctions de base

$${}^e\mathbf{B} = \nabla {}^e\mathbf{H} = [\partial {}^e\mathbf{H} / \partial x, \partial {}^e\mathbf{H} / \partial y]^\top$$

matrice-gradient

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis

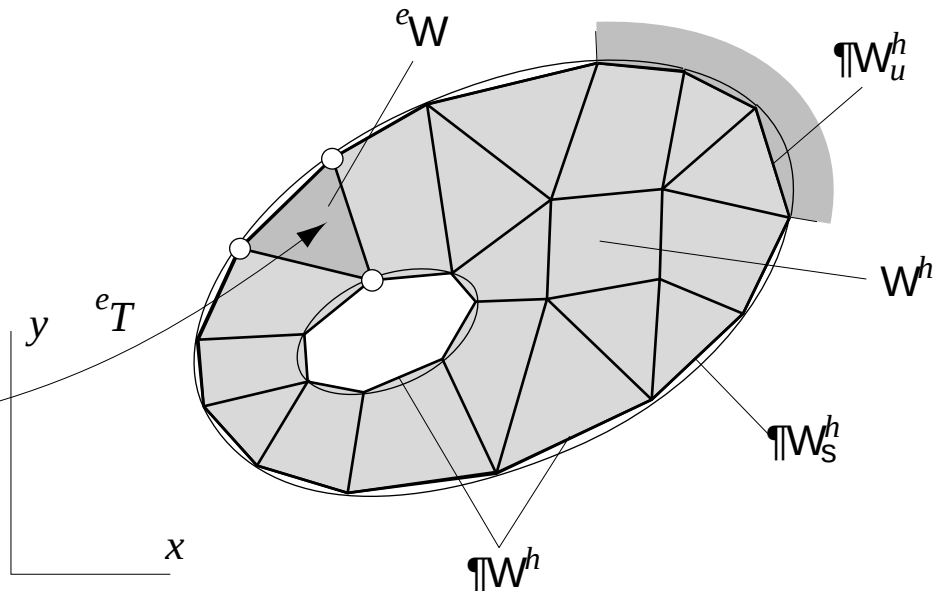
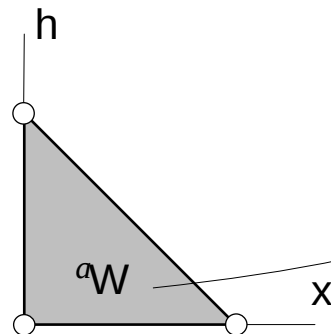
$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e \mathbf{x}_i = \{{}^e x_i, {}^e y_i\}^T$$



Existence
de ${}^eT^{-1}$



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis (*suite*)

$$\begin{aligned}
 {}^e u^h(x, y) &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] {}^e q_i \\
 &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i
 \end{aligned}$$



Matrice ${}^e \mathbf{J}^{-1}$
calculée
explicitement

$$\Rightarrow {}^e h_i(x, y) \rightarrow {}^a h_i(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial x} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = {}^e J_{11}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} + {}^e J_{12}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial y} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = {}^e J_{21}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} + {}^e J_{22}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$

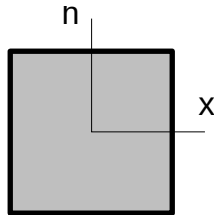
Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Insertion de la notion d'élément père ou archétype

- Traitement des intégrales surfaciques

jacobien de la
transformation eT
 $= \det({}^eJ)$

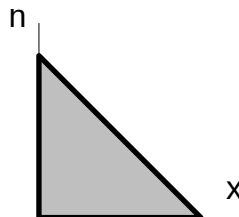
$$\begin{aligned} \int_{e\Omega} (\cdot) \, dx dy &= \int_{e\Omega} (\cdot) {}^e d\Omega \\ &= \int_{a\Omega} (\cdot) {}^e j^a d\Omega = \int_{a\Omega} (\cdot) {}^e j \, d\xi d\eta \end{aligned}$$



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{---} d\eta d\xi$$



Bornes



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \text{---} d\eta d\xi$$

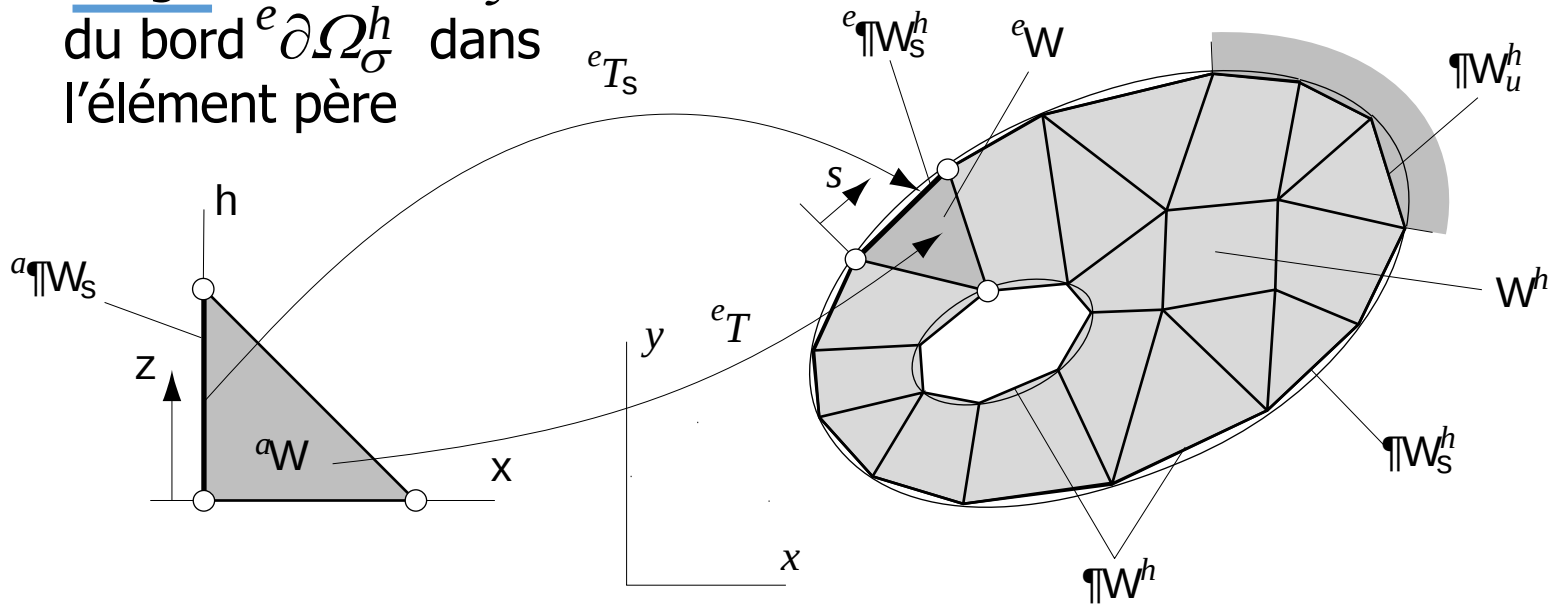
Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes

$$\int_{e_{\partial\Omega_\sigma^h}} (\cdot) ds = \int_{a_{\partial\Omega_\sigma}} (\cdot) {}^e j_\sigma d\zeta$$

image d'abscisse ζ
du bord $e_{\partial\Omega_\sigma^h}$ dans
l'élément père

jacobien de la
transformation ${}^e T_\sigma$
d'une arête donnée

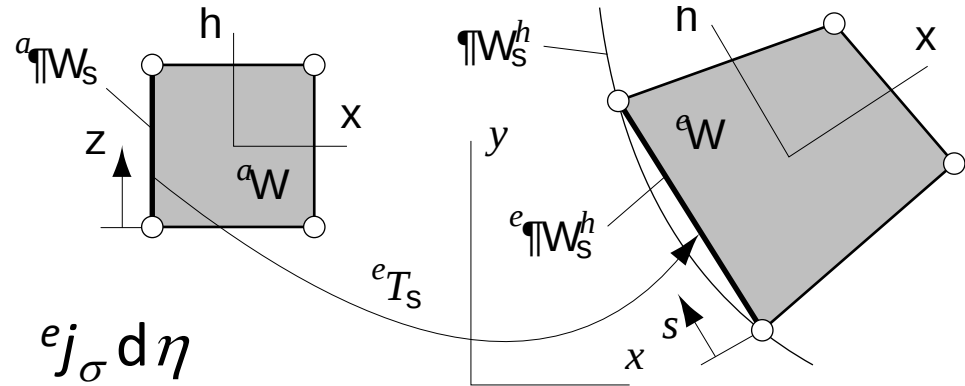


Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : évaluation du jacobien ${}^e j_\sigma$

$$\int_{a\partial\Omega_\sigma} (\cdot) {}^e j_\sigma d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{+1} (\cdot) \Big|_{\xi=-1} {}^e j_\sigma d\eta$$



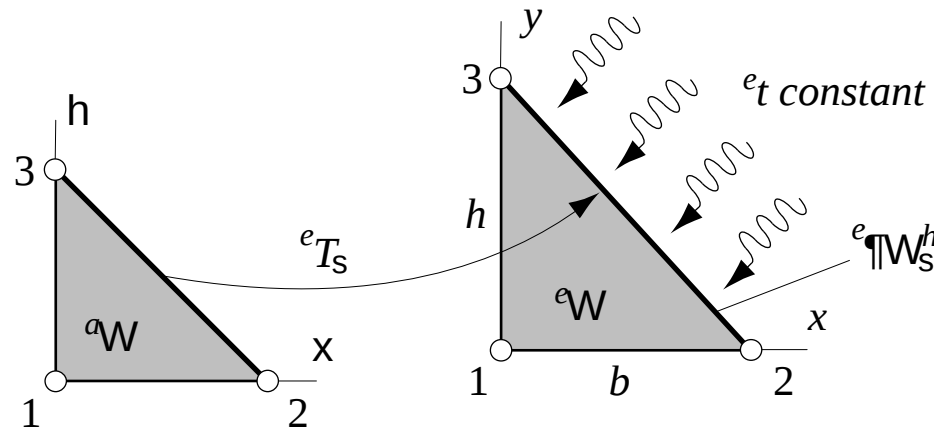
$${}^e T_\sigma \equiv {}^e T \Big|_{\xi=-1} : s = s(\eta) \Rightarrow \begin{aligned} x &= x(-1, \eta) \\ y &= y(-1, \eta) \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{[\partial x(-1, \eta)/\partial \eta]^2 + [\partial y(-1, \eta)/\partial \eta]^2} d\eta = {}^e j_\sigma d\eta$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : exemple de flux externe traversant la frontière d'un élément triangulaire



$$\begin{aligned}
 eT_\sigma : \quad x &= b \frac{h_2}{h} \Big|_{\xi=1-\eta} = b \xi \Big|_{\xi=1-\eta} = b(1-\eta) \\
 y &= h \frac{h_3}{h} \Big|_{\xi=1-\eta} = h \eta \Big|_{\xi=1-\eta} = h\eta \\
 \partial x / \partial \eta &= -b \quad \partial y / \partial \eta = h
 \end{aligned}$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : calcul des contributions élémentaires du flux externe donné en exemple

$$^e j_\sigma = \sqrt{(\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$^e r_i = \int_{^e \partial \Omega_\sigma^h} ^e h_i \, ^e t \, ds = \int_0^1 ^a h_i \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \, ^e j_\sigma \, d\eta$$



Justification
des résultats

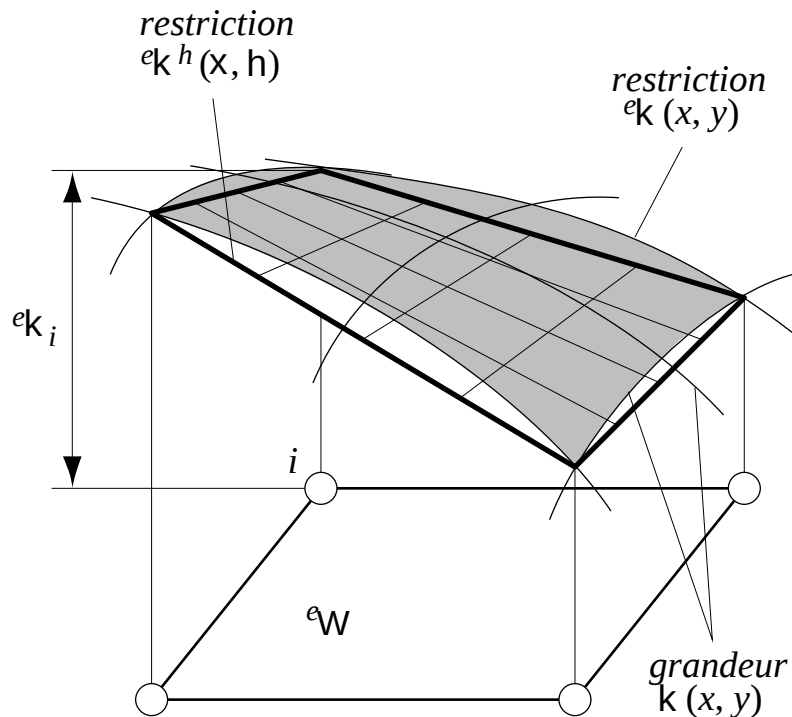
$$^e r_1 = \int_0^1 (1-\xi-\eta) \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = 0$$

$$^e r_2 = \int_0^1 \xi \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = ^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$

$$^e r_3 = \int_0^1 \eta \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = ^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation des grandeurs physiques
 - Traitement des coefficients surfaciques



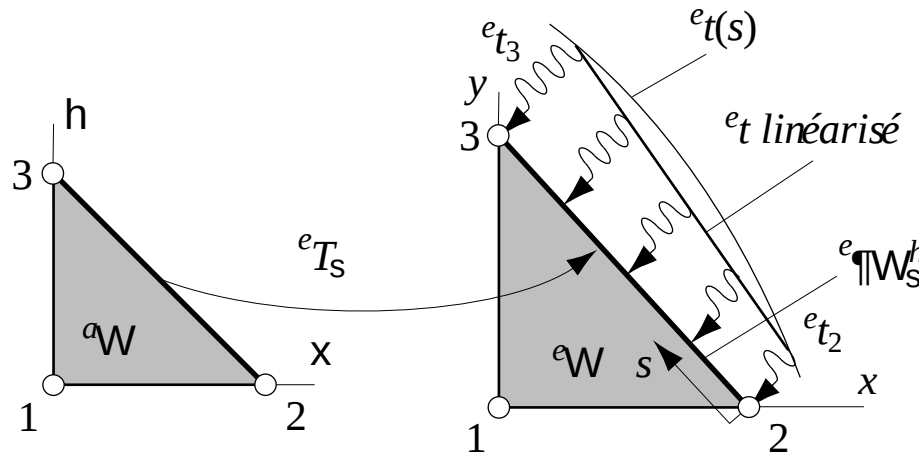
$$e_K(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_K_i = e_K^h(\xi, \eta)$$

$$e_\rho(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_\rho_i = e_\rho^h(\xi, \eta)$$

$$e_q(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_q_i = e_q^h(\xi, \eta)$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Cas particulier : paramétrisation le long du site des conditions naturelles de bord (exemple d'un élément triangulaire)

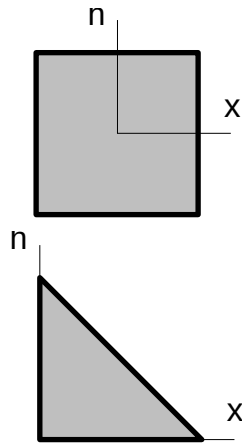


Démarche
identique pour
la variable $e_r(s)$

$$\begin{aligned}
 e_t(s) &\approx \sum_{i=1}^{e p_\sigma} a h_i(\xi, \eta) \Big|_{\xi=1-\eta}^{e t_i} \quad e p_\sigma \text{ nombre de } \\
 &\quad \text{noeuds sur l'arête} \\
 &= \xi \Big|_{\xi=1-\eta}^{e t_2} + \eta \Big|_{\xi=1-\eta}^{e t_3} = e t_2 (1-\eta) + e t_3 \eta
 \end{aligned}$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Intégration numérique
 - Quadrature de Gauss-Legendre



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j} \omega_i \omega_j$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j} \omega_{ij}$$

ξ_k, η_k coordonnées du point d'intégration k
 ω_k coefficient de pondération du point k



Intégration sur les éléments quadrangulaires non optimale

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Règles unidimensionnelles appliquées aux éléments quadrangulaires

<i>Abscisse ξ</i>	<i>Coefficient de pondération ω</i>	<i>Précision</i>
0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000	ordre 1
$\pm 0.57735\ 02691\ 89626$	1.00000 00000 00000	ordre 3
0.00000 00000 00000 $\pm 0.77459\ 66692\ 41483$	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556	ordre 5
$\pm 0.33998\ 10435\ 84856$ $\pm 0.86113\ 63115\ 94053$	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454	ordre 7
0.00000 00000 00000 $\pm 0.53846\ 93101\ 05683$ $\pm 0.90617\ 98459\ 38664$	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189	ordre 9

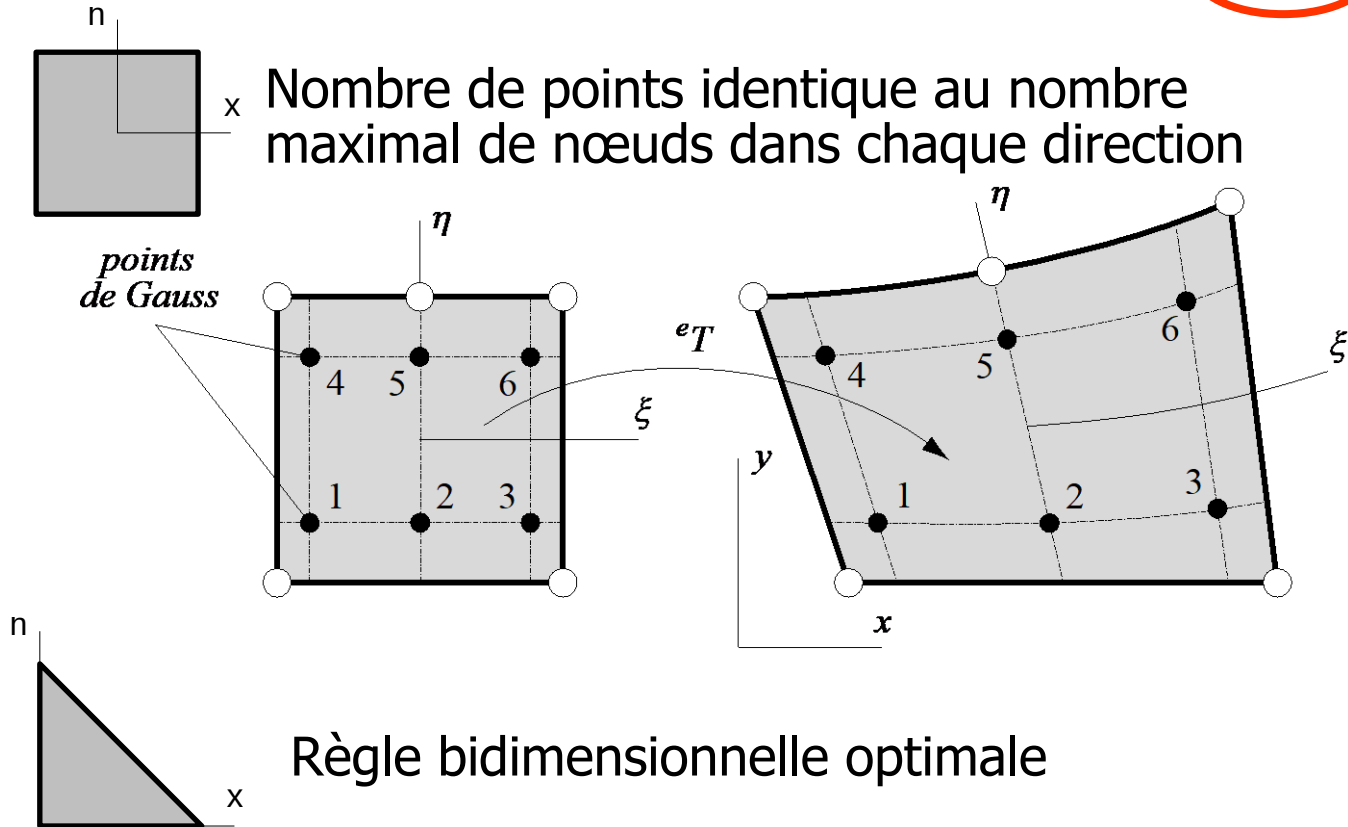
Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Règles bidimensionnelles appliquées aux éléments triangulaires

<i>Abscisse ξ</i>	<i>Abscisse η</i>	<i>Coefficient de pondération ω</i>	<i>Précision</i>
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.50000 00000 00000	ordre 1
0.20000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	ordre 3
0.60000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.20000 00000 00000	0.60000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	– 0.28125 00000 00000	
0.10128 65073 23456	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	ordre 5
0.79742 69853 53087	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	
0.10128 65073 23456	0.79742 69853 53087	0.06296 95902 72413	
0.47014 20641 05115	0.05971 58717 89770	0.06619 70763 94253	
0.47014 20641 05115	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.05971 58717 89770	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.11250 00000 00000	

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Choix du nombre de points de Gauss pour une intégration **exacte**



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Comparaison des intégrations exacte et réduite

Intégration exacte



Intégration réduite

⊕ Stabilité
numérique

⊕ Monotonie de la
convergence

⊖ Surestimation
de la rigidité

⊖ Risque de
blocage des
éléments linéaires

⊕ Assouplissement
de la rigidité

⊕ Diminution des
coûts de calcul

⊖ Perte de la
monotonie de
convergence

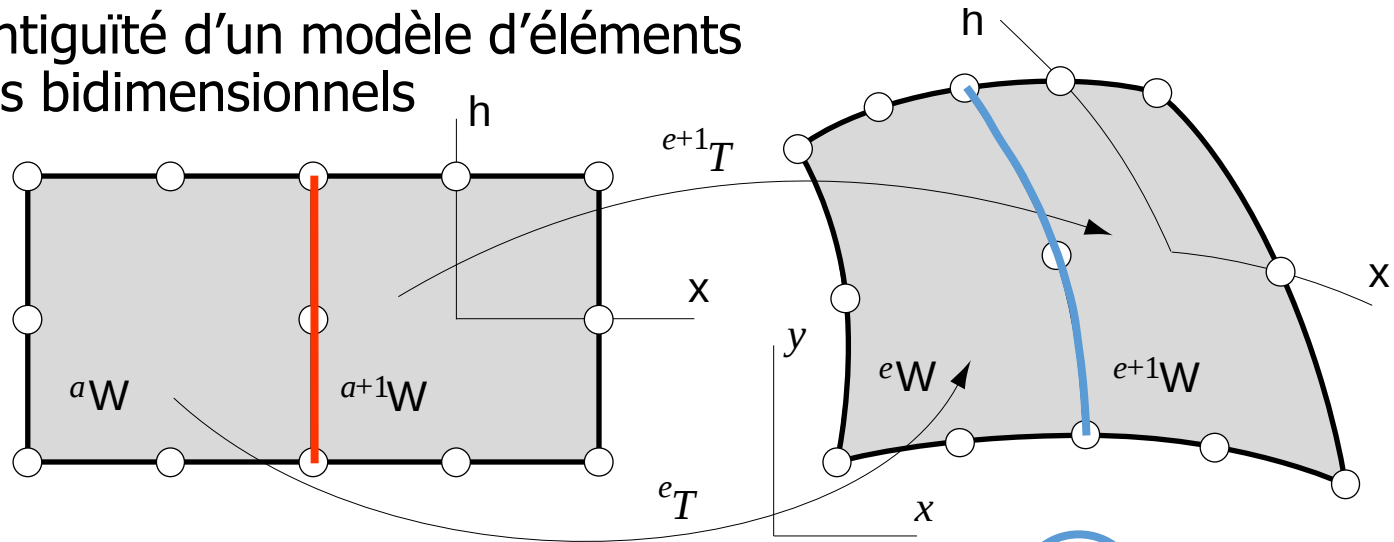
⊖ Risque d'instabilité
numérique



Nombre de
points de Gauss
réduit

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Contiguïté d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels



$$^e u^h(x, y) = {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{q}$$

$$^{e+1} u^h(x, y) = {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{q}$$

Continuité $\Rightarrow$ Contiguïté

$$^e T: \begin{aligned} x &= {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{x} \\ y &= {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$^{e+1} T: \begin{aligned} x &= {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{x} \\ y &= {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critères classiques de convergence

- Critère de continuité
- Critère de différentiabilité
- Critère de complétude



Critères non perturbés
par le changement de
variables

$${}^eT: \quad \begin{aligned} x &= \textcircled{{}^g h}(\xi, \eta) {}^e\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{{}^g p} \textcircled{{}^g h_i}(\xi, \eta) {}^e x_i \\ y &= \textcircled{{}^g h}(\xi, \eta) {}^e\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{{}^g p} \textcircled{{}^g h_i}(\xi, \eta) {}^e y_i \end{aligned}$$



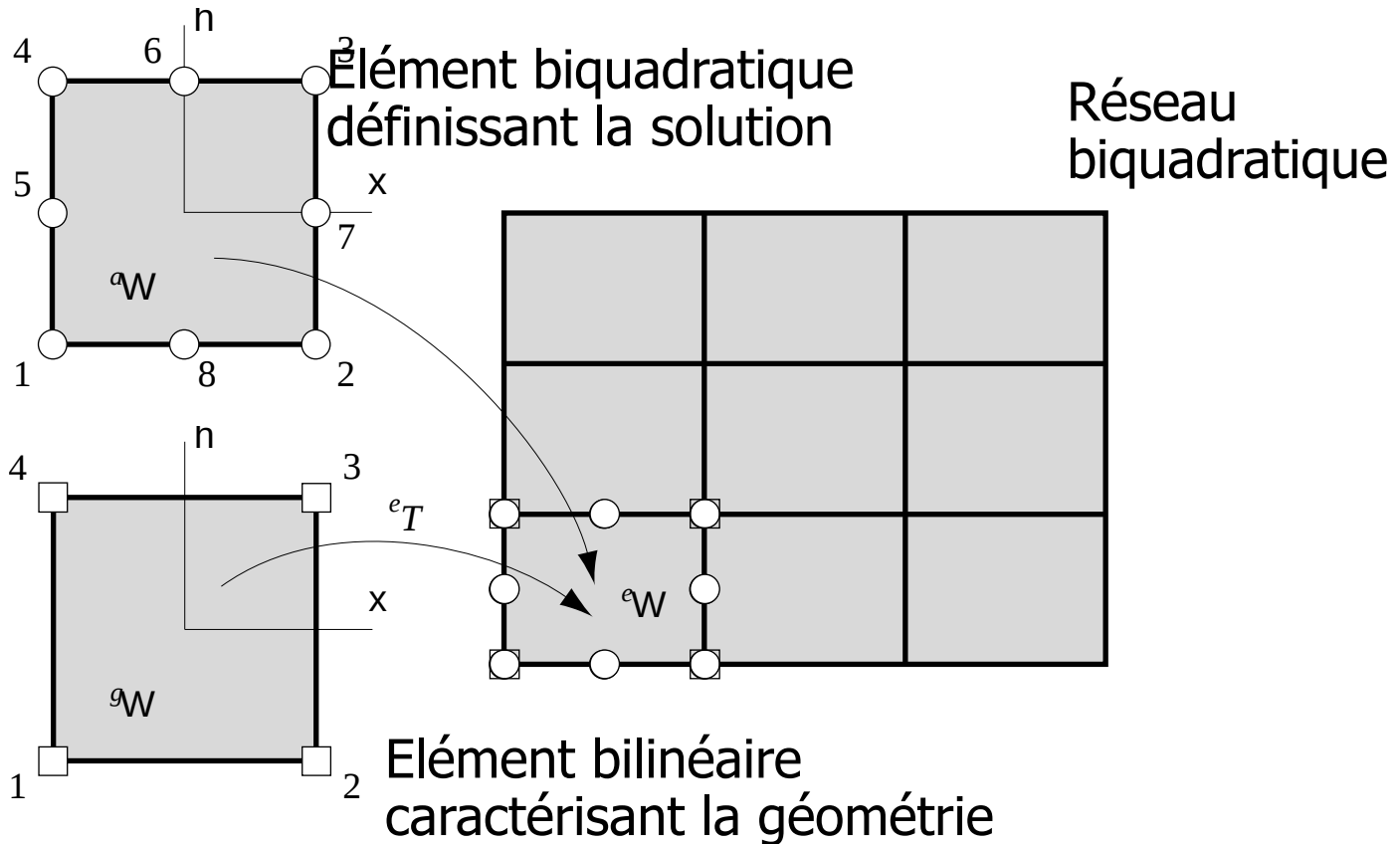
Élément ${}^g\Omega$
caractérisant
la géométrie

$${}^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = \sum_{i=1}^{{}^e p} \textcircled{{}^a h_i}(\xi, \eta) {}^e q_i$$

Élément ${}^a\Omega$
définissant la
solution

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

$${}^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$



Définition de la complétude

$$\Rightarrow {}^e u^h({}^e x_i, {}^e y_i) \equiv {}^e q_i = \alpha + \beta {}^e x_i + \gamma {}^e y_i \quad (i = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

$$\Rightarrow {}^e u^h(x, y) = \alpha \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) + \beta \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i + \gamma \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i$$



Identification terme à terme

$$\equiv \alpha 1 + \beta x + \gamma y$$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Conditions nécessaires de complétude

$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) = 1 \quad \triangle ! \quad \text{Critère de continuité restreinte}$$

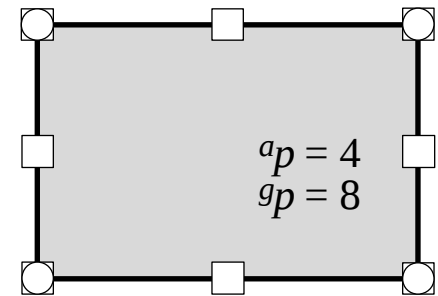
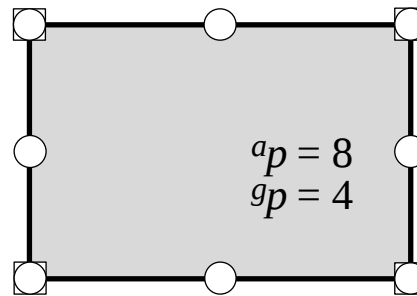
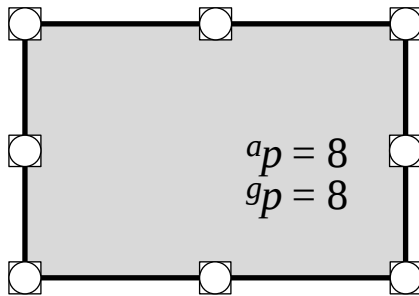
$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i = x \equiv \sum_{i=1}^{ep} {}^g h_i(\xi, \eta) {}^e x_i$$

$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i = y \equiv \sum_{i=1}^{ep} {}^g h_i(\xi, \eta) {}^e x_i \quad \triangle ! \quad \text{Transformation de coordonnées}$$

$\triangle !$ Conditions vérifiées si ${}^g \Omega = {}^a \Omega$
 Complétude à vérifier (*patch test*) si ${}^g \Omega \neq {}^a \Omega$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Notion d'éléments finis isoparamétrique, sous-paramétrique et superparamétrique



○ point de spécification de la fonction cherchée

□ point de spécification des coordonnées

Élément
isoparamétrique

Géométrie de même
ordre que la solution

Élément sous-
paramétrique

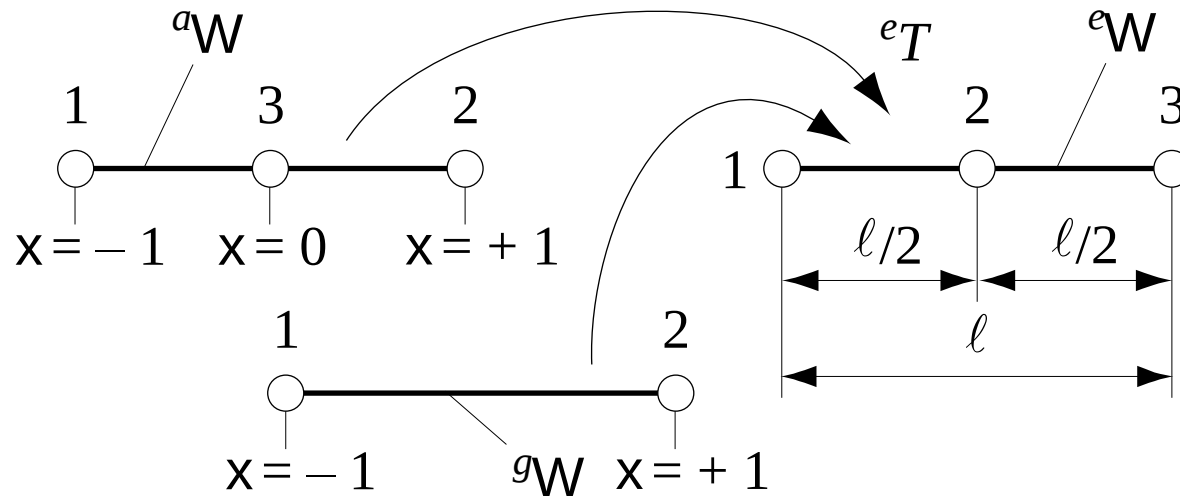
Géométrie d'un
ordre inférieur à
celui de la solution

Élément super-
paramétrique

Géométrie d'un
ordre supérieur à
celui de la solution

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Exemple d'un élément fini sous-paramétrique bien connu



$${}^eT: x = \sum_{i=1}^3 {}^a h_i(\xi) {}^e x_i$$

$$= \ell(1 - \xi^2)/2 + \ell \xi(\xi + 1)/2 = \ell(1 + \xi)/2$$



Transformation
linéaire

Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation H^1 de l'écart entre la restriction $^e u$ et son interpolation nodale $^e u_I$

$$\| ^e u - ^e u_I \|_{1, ^e \Omega}^2 \leq \| ^e T^{-1} \|_1^2 \max_{^e \Omega} (^e j) \| ^a u - ^a u_I \|_{1, ^a \Omega}^2$$

- Norme H^{k+1} de la restriction $^e u$ transformée par les coordonnées naturelles

$$\| ^a u \|_{k+1, ^a \Omega}^2 \leq \| ^e T \|_{k+1}^2 \frac{1}{\min_{^e \Omega} (^e j)} \| ^e u \|_{k+1, ^e \Omega}^2$$



Influence de la transformation
de coordonnées

Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation asymptotique locale de l'erreur pour un élément fini père

$$\| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega} \leq {}^a C_1 {}^e h^k \| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega} \quad ({}^e h \rightarrow 0)$$

${}^e h$ diamètre de l'élément fini

k degré de l'interpolation

${}^a C_1$ facteur de convergence



Re transcription de l'estimation
asymptotique de l'erreur pour un
élément fini régulier ($e \rightarrow a$)

Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Caractérisation de l'estimation H^1 de l'écart entre la restriction ${}^e u$ et son interpolation nodale ${}^e u_I$

$$\begin{aligned}
 \| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega} &\leq \| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} \| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega} \\
 &\leq \| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} {}^a C_1 {}^e h^k \| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega} \\
 &\leq \underbrace{\| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} {}^a C_1 {}^e h^k}_{\text{Identification}} \underbrace{\| {}^e T \|_{k+1}}_{\text{terme à terme}} \cdot \underbrace{[\min_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{-1/2} \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega}}_{\text{terme à terme}}
 \end{aligned}$$



Identification
terme à terme

- Forme standard de l'estimation H^1 de l'écart entre ${}^e u$ et ${}^e u_I$

$$\| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega} \leq \underbrace{{}^e C_1}_{\text{circled}} {}^e h^k \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega} \quad ({}^e h \rightarrow 0)$$

Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Lien entre les facteurs de convergence

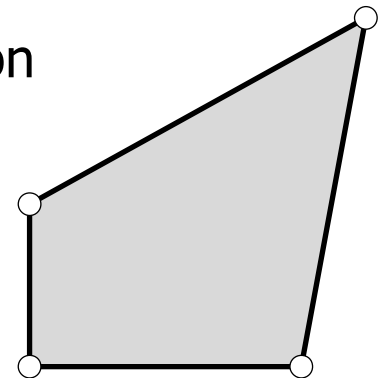
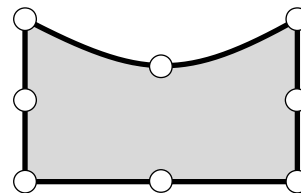
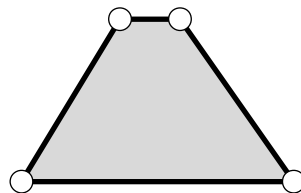
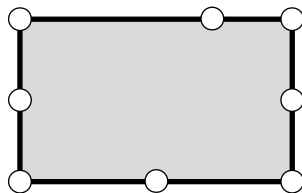
$$^eC_1 \leq ^aC_1 \left(\frac{\max(^ej)}{\min(^ej)} \right)^{1/2}_{e_\Omega} \| ^eT \|_{k+1} \| ^eT^{-1} \|_1$$



Dégradation de la précision si $\left(\frac{\max(^ej)}{\min(^ej)} \right)_{e_\Omega}$ croît

$\Rightarrow$ Forme de l'élément aussi régulière que possible

- Exemples d'éléments entraînant une dégradation de la précision



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation H^1 de l'erreur globale e^h

$$\|e^h\|_{1,\Omega} = \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C_1 h^k \quad (h \rightarrow 0)$$

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e {}^e h$)

k degré de l'interpolation

C_1 facteur de convergence



Longueur ${}^e h$ mesurée selon le système local de coordonnées

