

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

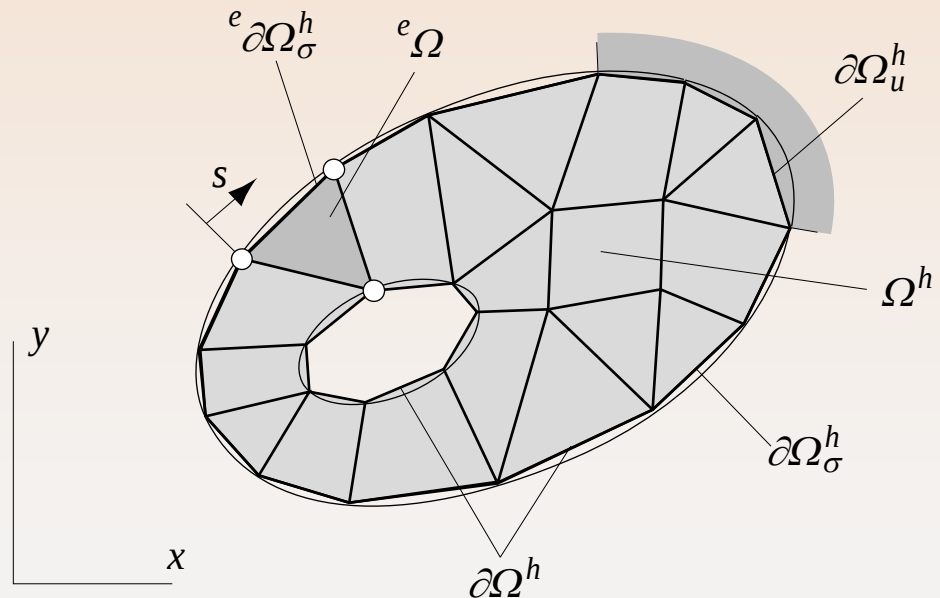
- Rappel de la forme faible discrète étudiée

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u^h)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

$$(\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m \Omega^e)$$



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Rappel des grandeurs structurelles

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} ({}^e\kappa {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{B} + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H}) dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e r {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} ds$$

matrice élémentaire de conductivité

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^e q dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e\mathbf{H}^T {}^e t ds$$

vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^e\mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_{e_p}]$$

matrice des fonctions de base

$${}^e\mathbf{B} = \nabla {}^e\mathbf{H} = [\partial {}^e\mathbf{H} / \partial x, \partial {}^e\mathbf{H} / \partial y]^T$$

matrice-gradient



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis

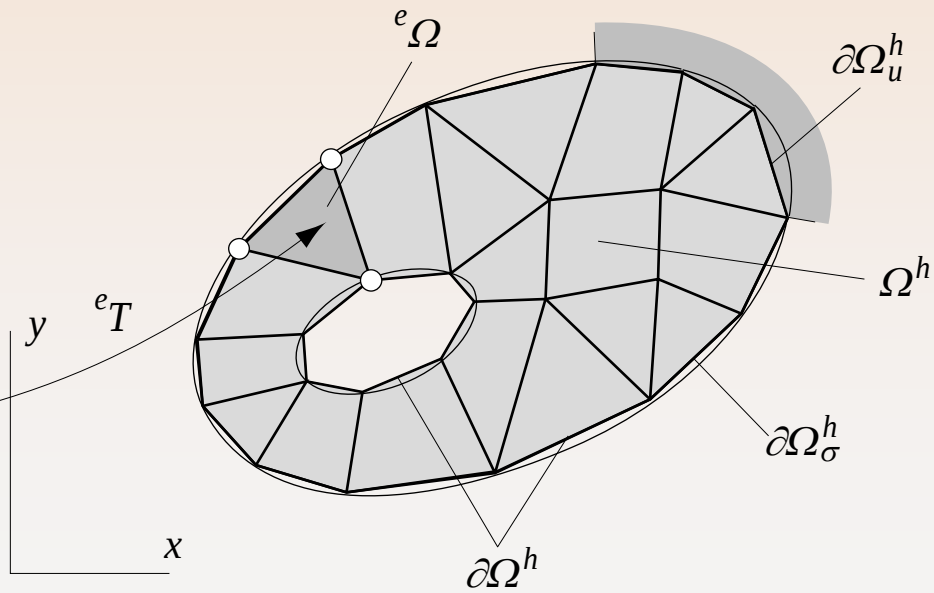
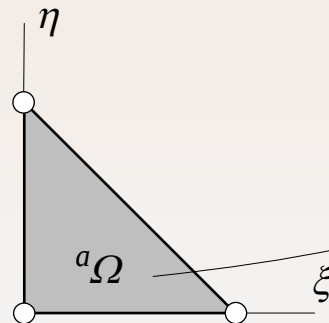
$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{{}^ep} {}^ah_i(\xi, \eta) {}^e\mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e\mathbf{x}_i = \{{}^ex_i, {}^ey_i\}^T$$



Existence
de ${}^eT^{-1}$



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis (*suite*)

$$\begin{aligned}
 {}^e u^h(x, y) &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] {}^e q_i \\
 &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i
 \end{aligned}$$



Matrice ${}^e \mathbf{J}^{-1}$
calculée
explicitement

$$\Rightarrow {}^e h_i(x, y) \rightarrow {}^a h_i(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial x} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = {}^e J_{11}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} + {}^e J_{12}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial y} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = {}^e J_{21}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} + {}^e J_{22}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta}$$

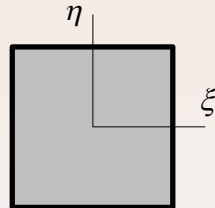


Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Insertion de la notion d'élément père ou archétype
 - Traitement des intégrales surfaciques

jacobien de la
transformation eT
 $= \det({}^eJ)$

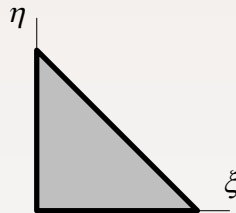
$$\begin{aligned}\int_{e\Omega} (\cdot) \, dx dy &= \int_{e\Omega} (\cdot) {}^e d\Omega \\ &= \int_{a\Omega} (\cdot) \textcircled{{}^e j} {}^a d\Omega = \int_{a\Omega} (\cdot) \textcircled{{}^e j} d\xi d\eta\end{aligned}$$



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{---} d\eta d\xi$$



Bornes



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \textcircled{\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \text{---} d\eta d\xi}$$



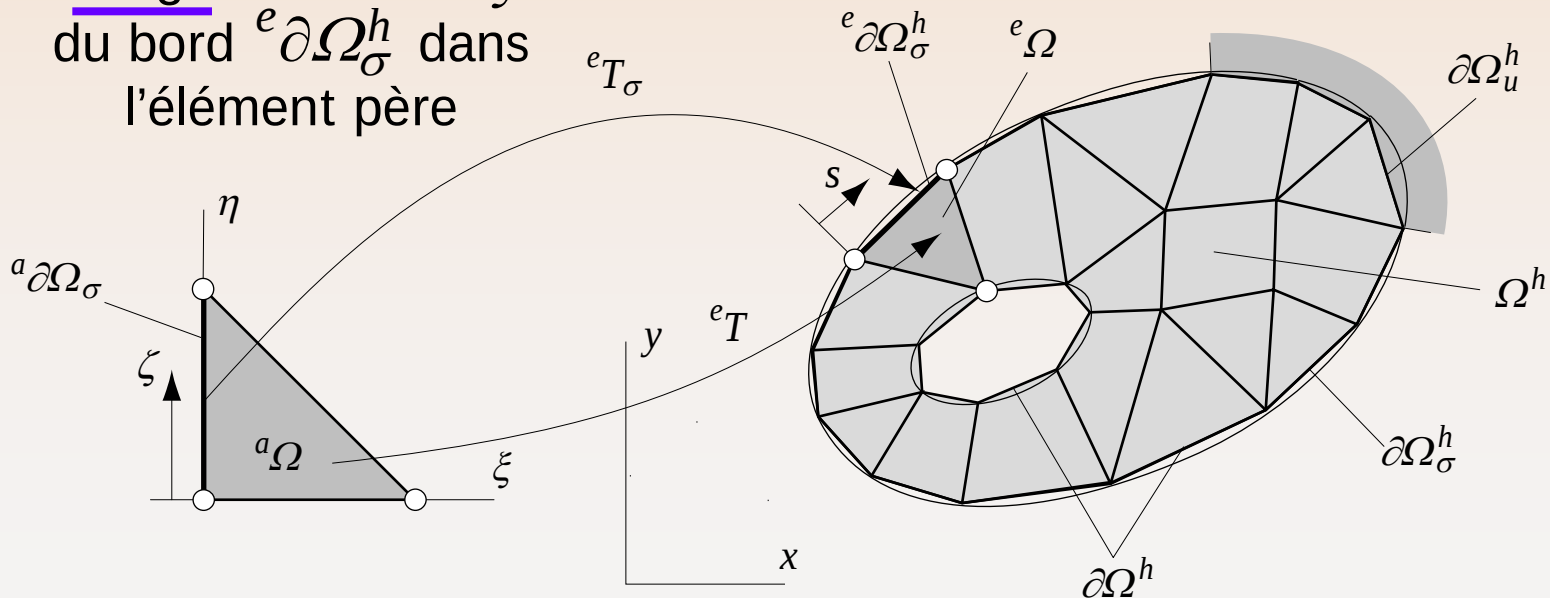
Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes

$$\int_{e_{\partial\Omega_\sigma^h}} (\cdot) ds = \int_{a_{\partial\Omega_\sigma}} (\cdot) {}^e j_\sigma d\zeta$$

image d'abscisse ζ
du bord ${}^e\partial\Omega_\sigma^h$ dans
l'élément père

jacobien de la
transformation ${}^e T_\sigma$
d'une arête donnée

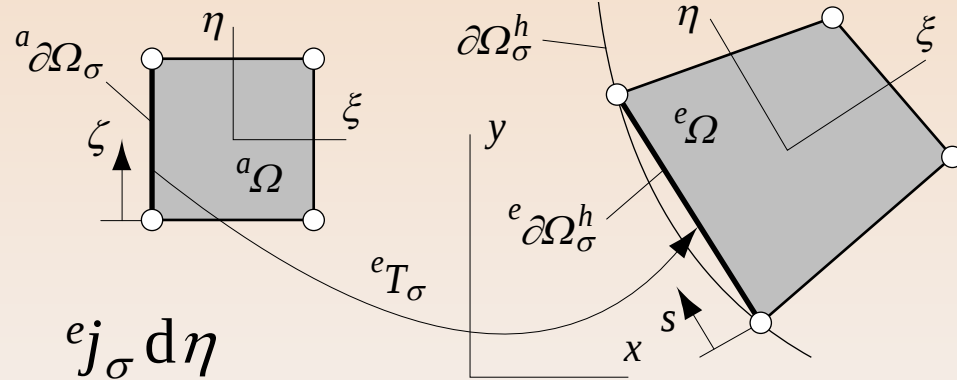


Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : évaluation du jacobien ${}^e j_\sigma$

$$\int_{a\partial\Omega_\sigma} (\cdot) {}^e j_\sigma d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{+1} (\cdot) \Big|_{\xi=-1} {}^e j_\sigma d\eta$$



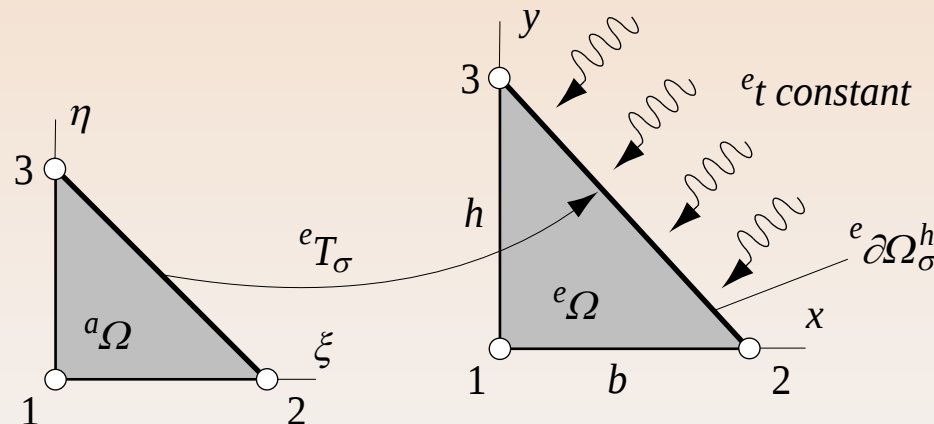
$${}^e T_\sigma \equiv {}^e T \Big|_{\xi=-1} : s = s(\eta) \Rightarrow \begin{aligned} x &= x(-1, \eta) \\ y &= y(-1, \eta) \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{[\partial x(-1, \eta) / \partial \eta]^2 + [\partial y(-1, \eta) / \partial \eta]^2} d\eta = {}^e j_\sigma d\eta$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : exemple de flux externe traversant la frontière d'un élément triangulaire



$$\begin{aligned}
 e_{T_\sigma} : \quad x &= b \, {}^a h_2 \Big|_{\xi=1-\eta} = b \xi \Big|_{\xi=1-\eta} = b(1-\eta) \\
 y &= h \, {}^a h_3 \Big|_{\xi=1-\eta} = h \eta \Big|_{\xi=1-\eta} = h\eta \\
 \partial x / \partial \eta &= -b \quad \partial y / \partial \eta = h
 \end{aligned}$$

Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : calcul des contributions élémentaires du flux externe donné en exemple

$$^e j_\sigma = \sqrt{(\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$^e r_i = \int_{^e \partial \Omega_\sigma^h} ^e h_i \, ^e t \, ds = \int_0^1 ^a h_i \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \, ^e j_\sigma \, d\eta$$



Justification
des résultats

$$^e r_1 = \int_0^1 (1-\xi-\eta) \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = 0$$

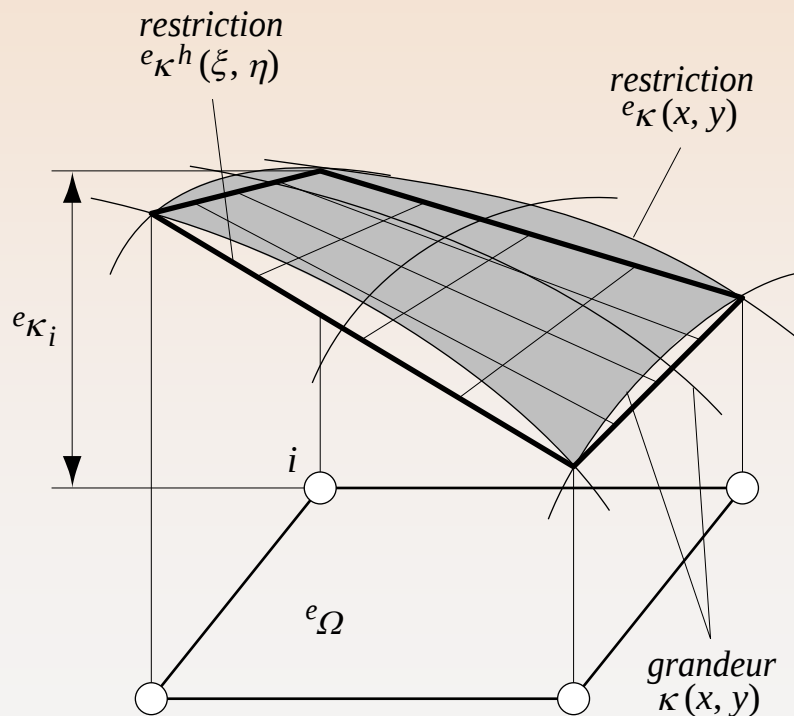
$$^e r_2 = \int_0^1 \xi \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = ^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$

$$^e r_3 = \int_0^1 \eta \Big|_{\xi=1-\eta} \, ^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = ^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation des grandeurs physiques
 - Traitement des coefficients surfaciques



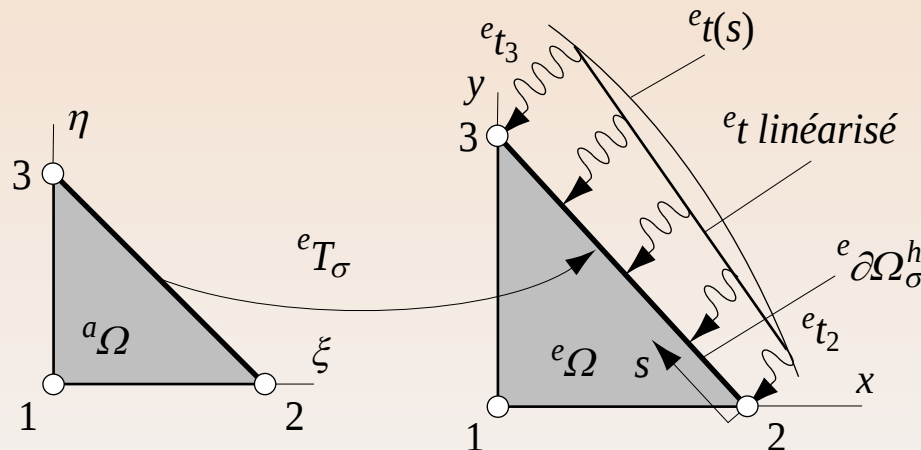
$$e_K(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) e_{K_i} = e_K^h(\xi, \eta)$$

$$e_\rho(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) e_{\rho_i} = e_\rho^h(\xi, \eta)$$

$$e_q(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) e_{q_i} = e_q^h(\xi, \eta)$$

Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Cas particulier : paramétrisation le long du site des conditions naturelles de bord (exemple d'un élément triangulaire)



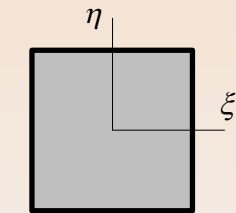
Démarche
identique pour
la variable $e_r(s)$

$$\begin{aligned}
 e_t(s) &\approx \sum_{i=1}^{e p_\sigma} {}^a h_i(\xi, \eta) \Big|_{\xi=1-\eta} e_{t_i} \quad e p_\sigma \text{ nombre de nœuds sur l'arête} \\
 &= \xi \Big|_{\xi=1-\eta} e_{t_2} + \eta \Big|_{\xi=1-\eta} e_{t_3} = e_{t_2}(1-\eta) + e_{t_3}\eta
 \end{aligned}$$

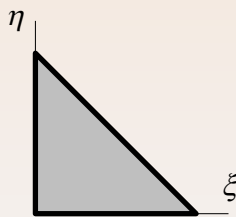


Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Intégration numérique
 - Quadrature de Gauss-Legendre



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j} \omega_i \omega_j$$



$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_i} \omega_{ij}$$

ξ_k, η_k coordonnées du point d'intégration k
 ω_k coefficient de pondération du point k



Intégration sur les éléments quadrangulaires non optimale



Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Règles unidimensionnelles appliquées aux éléments quadrangulaires

<i>Abscisse ξ</i>	<i>Coefficient de pondération ω</i>	<i>Précision</i>
0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000	ordre 1
$\pm$ 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	ordre 3
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556	ordre 5
$\pm$ 0.33998 10435 84856 $\pm$ 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454	ordre 7
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.53846 93101 05683 $\pm$ 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189	ordre 9



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

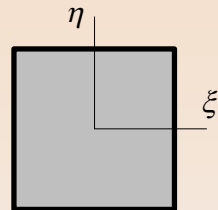
- Règles bidimensionnelles appliquées aux éléments triangulaires

<i>Abscisse ξ</i>	<i>Abscisse η</i>	<i>Coefficient de pondération ω</i>	<i>Précision</i>
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.50000 00000 00000	ordre 1
0.20000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	ordre 3
0.60000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.20000 00000 00000	0.60000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	– 0.28125 00000 00000	
0.10128 65073 23456	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	ordre 5
0.79742 69853 53087	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	
0.10128 65073 23456	0.79742 69853 53087	0.06296 95902 72413	
0.47014 20641 05115	0.05971 58717 89770	0.06619 70763 94253	
0.47014 20641 05115	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.05971 58717 89770	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.11250 00000 00000	



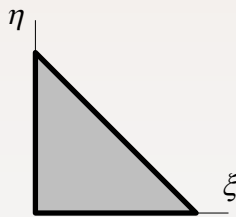
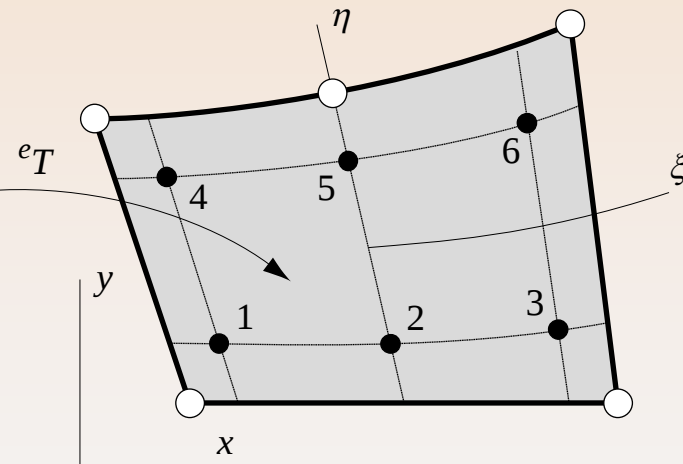
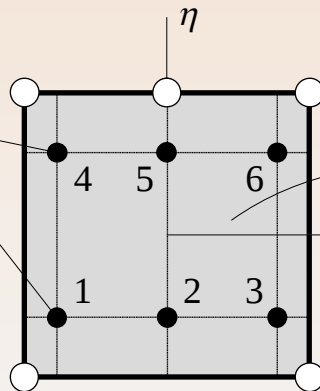
Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Choix du nombre de points de Gauss pour une intégration **exacte**



Nombre de points identique au nombre maximal de nœuds dans chaque direction

points de Gauss



Règle bidimensionnelle optimale

Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Comparaison des intégrations exacte et réduite



Nombre de
points de Gauss
réduit



Systématisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Comparaison des intégrations exacte et réduite

Intégration exacte



Intégration réduite



Stabilité
numérique



Assouplissement
de la rigidité



Monotonie de la
convergence



Diminution des
coûts de calcul



Surestimation
de la rigidité



Perte de la
monotonie de
convergence



Risque de
blocage des
éléments linéaires



Risque d'instabilité
numérique

Choix optimal ?

⇒ Intégration sélective

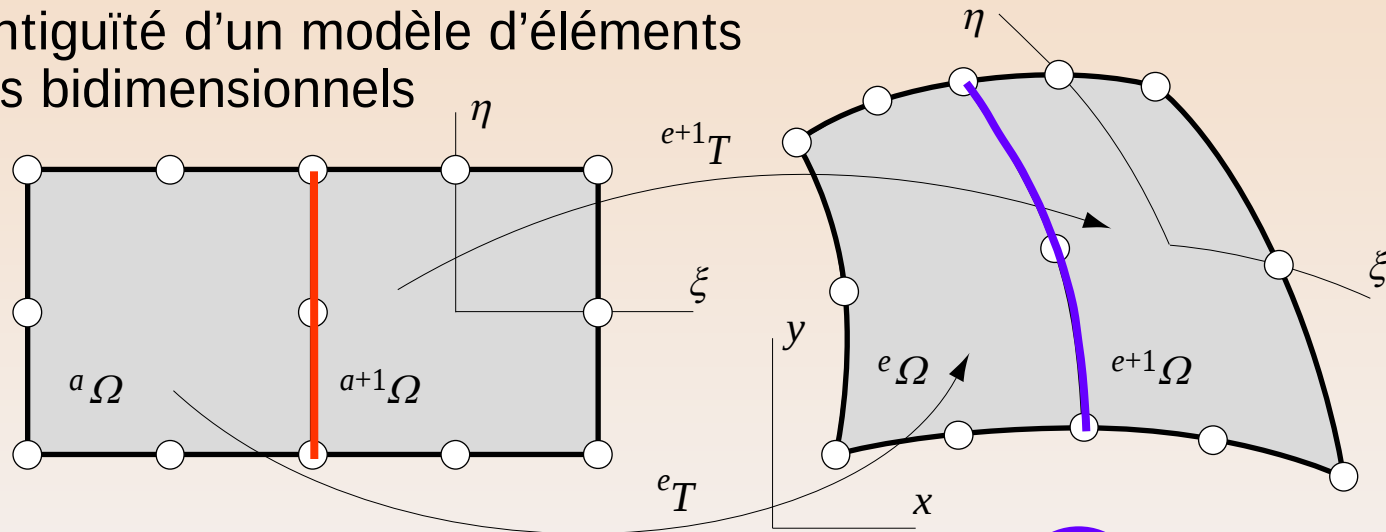


Voir cours spécialisés de
mécanique numérique



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Contiguïté d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels



$${}^e u^h(x, y) = {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^{e+1} u^h(x, y) = {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{q}$$

Continuité $\Rightarrow$ Contiguïté

$${}^e T : \begin{aligned} x &= {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{x} \\ y &= {}^a \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^e \mathbf{y} \end{aligned}$$

$${}^{e+1} T : \begin{aligned} x &= {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{x} \\ y &= {}^{a+1} \mathbf{H}(\xi, \eta) {}^{e+1} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critères classiques de convergence

- Critère de continuité
- Critère de différentiabilité



Critères non perturbés
par le changement de
variables



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critères classiques de convergence

- Critère de continuité
- Critère de différentiabilité
- Critère de complétude



Critères non perturbés
par le changement de
variables

$$\begin{aligned}
 x &= \textcircled{g} \mathbf{H}(\xi, \eta) \textcircled{e} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{g_p} \textcircled{g} h_i(\xi, \eta) \textcircled{e} x_i \\
 y &= \textcircled{g} \mathbf{H}(\xi, \eta) \textcircled{e} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{g_p} \textcircled{g} h_i(\xi, \eta) \textcircled{e} y_i \\
 \textcircled{e} u^h(x, y) &= \sum_{i=1}^{\textcircled{e} p} \textcircled{e} h_i(x, y) \textcircled{e} q_i = \sum_{i=1}^{\textcircled{e} p} \textcircled{a} h_i(\xi, \eta) \textcircled{e} q_i
 \end{aligned}$$



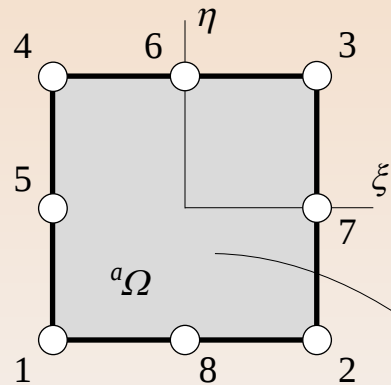
Élément $^g \Omega$
caractérisant
la géométrie

Élément $^a \Omega$
définissant la
solution



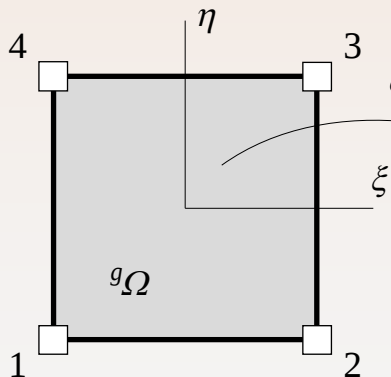
Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

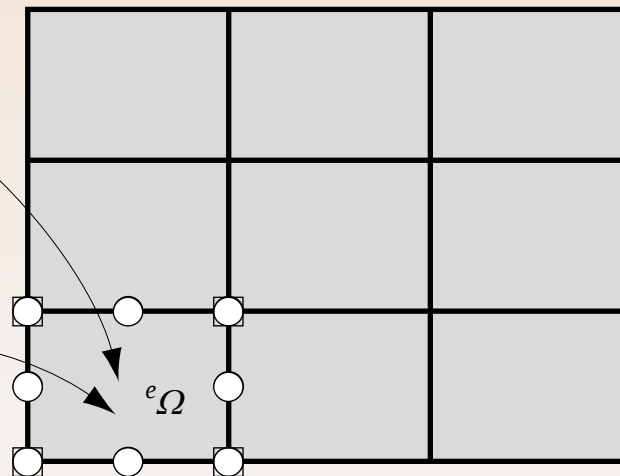


Élément biquadratique
définissant la solution

Réseau
biquadratique



Élément bilinéaire
caractérisant la géométrie



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

$$^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$

 Définition de la complétude

$$\Rightarrow {}^e u^h({}^e x_i, {}^e y_i) \equiv {}^e q_i = \alpha + \beta {}^e x_i + \gamma {}^e y_i$$

($i = 1, 2, \dots, {}^e p$)

$$\Rightarrow {}^e u^h(x, y) = \alpha \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) + \beta \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i + \gamma \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i$$

 Identification terme à terme $\equiv \alpha + \beta x + \gamma y$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

$$^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$

 Définition de la complétude

$$\Rightarrow {}^e u^h({}^e x_i, {}^e y_i) \equiv {}^e q_i = \alpha + \beta {}^e x_i + \gamma {}^e y_i$$

($i = 1, 2, \dots, {}^e p$)

$$\Rightarrow {}^e u^h(x, y) = \alpha \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) + \beta \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i + \gamma \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i$$

 Identification terme à terme $\equiv \alpha 1 + \beta x + \gamma y$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

$$^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$

 Définition de la complétude

$$\Rightarrow {}^e u^h({}^e x_i, {}^e y_i) \equiv {}^e q_i = \alpha + \beta {}^e x_i + \gamma {}^e y_i \quad (i = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

$$\Rightarrow {}^e u^h(x, y) = \alpha \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) + \beta \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i + \gamma \sum_{i=1}^{e_p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i$$

 Identification terme à terme

$$\equiv \alpha + \beta x + \gamma y$$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)

$$^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i = \alpha + \beta x + \gamma y$$

 Définition de la complétude

$$\Rightarrow {}^e u^h({}^e x_i, {}^e y_i) \equiv {}^e q_i = \alpha + \beta {}^e x_i + \gamma {}^e y_i$$

($i = 1, 2, \dots, {}^e p$)

$$\Rightarrow {}^e u^h(x, y) = \alpha \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) + \beta \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i$$

 Identification terme à terme

$$\equiv \alpha + \beta x + \gamma y$$

$+ \gamma \sum_{i=1}^{^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i$

Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Conditions nécessaires de complétude

$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) = 1 \quad \triangle ! \quad \text{Critère de continuité restreinte}$$

$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e x_i = x \equiv \sum_{i=1}^{ep} {}^g h_i(\xi, \eta) {}^e x_i$$

$$\sum_{i=1}^{ep} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e y_i = y \equiv \sum_{i=1}^{ep} {}^g h_i(\xi, \eta) {}^e x_i \quad \triangle ! \quad \text{Transformation de coordonnées}$$



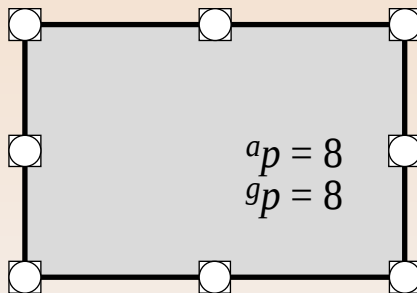
Conditions vérifiées si ${}^g \Omega = {}^a \Omega$

Complétude à vérifier (*patch test*) si ${}^g \Omega \neq {}^a \Omega$



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

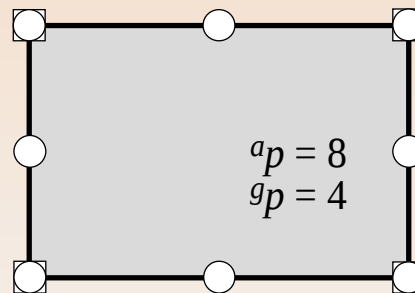
- Notion d'éléments finis isoparamétrique, sous-paramétrique et superparamétrique



○ point de spécification de la fonction cherchée

Élément
isoparamétrique

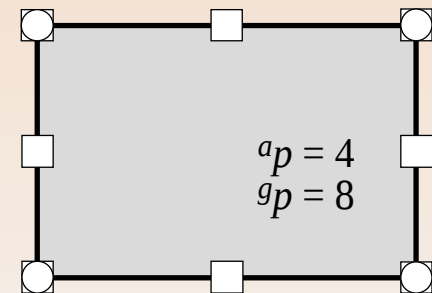
Géométrie de même
ordre que la solution



□ point de spécification des coordonnées

Élément sous-
paramétrique

Géométrie d'un
ordre inférieur à
celui de la solution



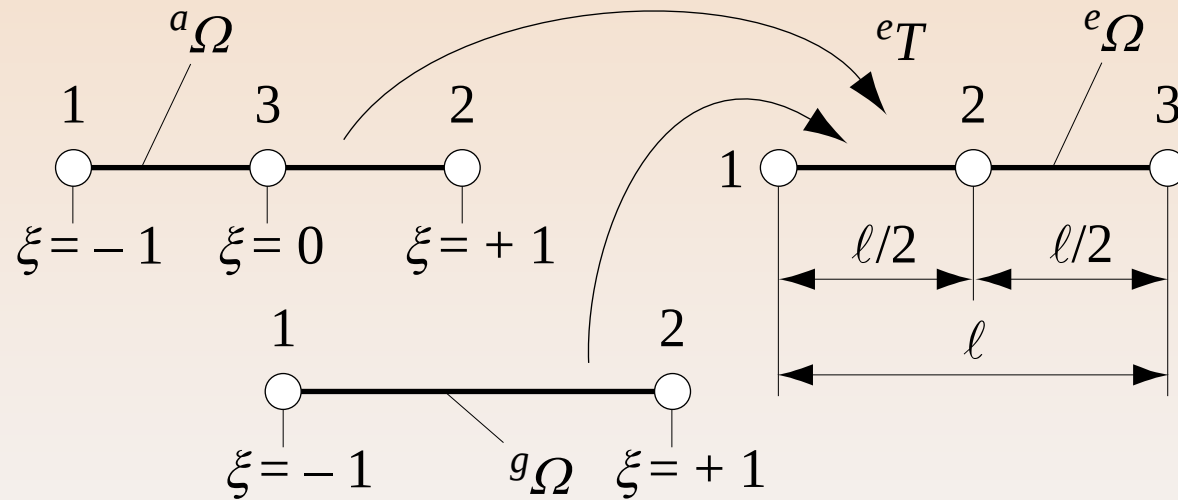
Élément super-
paramétrique

Géométrie d'un
ordre supérieur à
celui de la solution



Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Exemple d'un élément fini sous-paramétrique bien connu



$${}^eT : x = \sum_{i=1}^3 {}^a h_i(\xi) {}^e x_i$$

$$= \ell(1 - \xi^2)/2 + \ell \xi(\xi + 1)/2 = \ell(1 + \xi)/2$$



Transformation
linéaire



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation H^1 de l'écart entre la restriction ${}^e u$ et son interpolation nodale ${}^e u_I$

$$\| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega}^2 \leq \| {}^e T^{-1} \|_1^2 \max_{{}^e \Omega}({}^e j) \| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega}^2$$

- Norme H^{k+1} de la restriction ${}^e u$ transformée par les coordonnées naturelles

$$\| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega}^2 \leq \| {}^e T \|_{k+1}^2 \frac{1}{\min_{{}^e \Omega}({}^e j)} \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega}^2$$



Influence de la transformation
de coordonnées



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation asymptotique locale de l'erreur pour un élément fini père

$$\| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega} \leq {}^a C_1 {}^e h^k \| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega} \quad ({}^e h \rightarrow 0)$$

${}^e h$ diamètre de l'élément fini

k degré de l'interpolation

${}^a C_1$ facteur de convergence



Re transcription de l'estimation asymptotique de l'erreur pour un élément fini régulier ($e \rightarrow a$)



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Caractérisation de l'estimation H^1 de l'écart entre la restriction $^e u$ et son interpolation nodale $^e u_I$

$$\begin{aligned}
 \| ^e u - ^e u_I \|_{1, ^e \Omega} &\leq \| ^e T^{-1} \|_1 [\max_{^e \Omega} (^e j)]^{1/2} \| ^a u - ^a u_I \|_{1, ^a \Omega} \\
 &\leq \| ^e T^{-1} \|_1 [\max_{^e \Omega} (^e j)]^{1/2} ^a C_1 ^e h^k \| ^a u \|_{k+1, ^a \Omega} \\
 &\leq \underbrace{\| ^e T^{-1} \|_1 [\max_{^e \Omega} (^e j)]^{1/2} ^a C_1 ^e h^k}_{\text{Identification}} \underbrace{\| ^e T \|_{k+1}}_{\text{terme à terme}} \cdot \underbrace{[\min_{^e \Omega} (^e j)]^{-1/2} \| ^e u \|_{k+1, ^e \Omega}}_{\text{terme à terme}}
 \end{aligned}$$



Identification
terme à terme

- Forme standard de l'estimation H^1 de l'écart entre $^e u$ et $^e u_I$

$$\| ^e u - ^e u_I \|_{1, ^e \Omega} \leq \underbrace{^e C_1}_{\text{circled}} ^e h^k \| ^e u \|_{k+1, ^e \Omega} \quad (^e h \rightarrow 0)$$



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Lien entre les facteurs de convergence

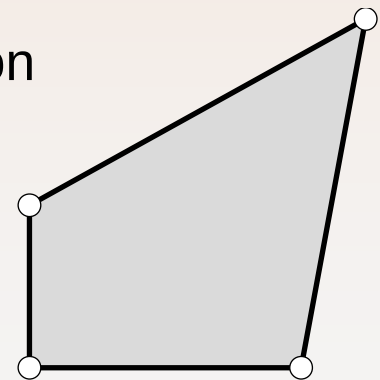
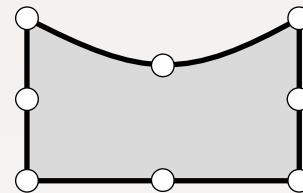
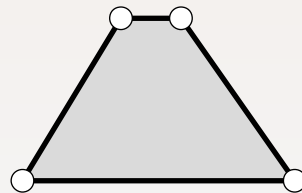
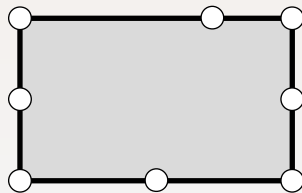
$$^eC_1 \leq ^aC_1 \left(\frac{\max(^ej)}{\min(^ej)} \right)^{1/2}_{e\Omega} \| ^eT \|_{k+1} \| ^eT^{-1} \|_1$$



Dégradation de la précision si $\left(\frac{\max(^ej)}{\min(^ej)} \right)_{e\Omega}$ croît

⇒ Forme de l'élément aussi régulière que possible

- Exemples d'éléments entraînant une dégradation de la précision



Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation H^1 de l'erreur globale e^h

$$\|e^h\|_{1,\Omega} = \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C_1 h^k \quad (h \rightarrow 0)$$

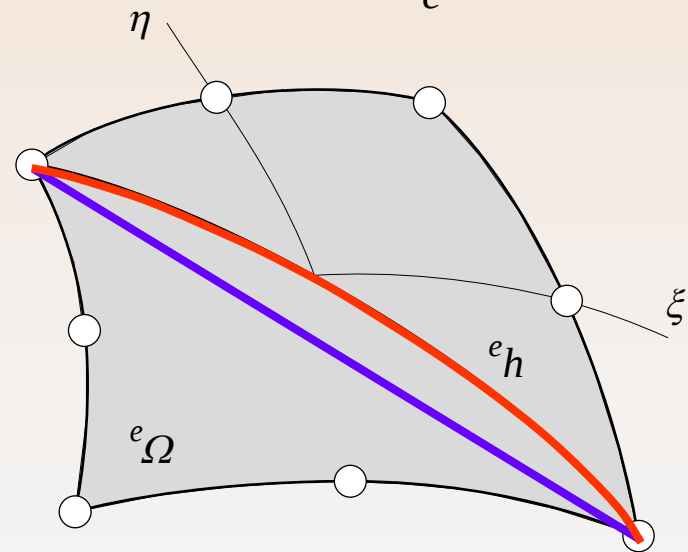
h longueur caractéristique du réseau ($h = \max_e e^h$)

k degré de l'interpolation

C_1 facteur de convergence



Longueur e^h mesurée
selon le système local
de coordonnées



Résolution du problème-modèle par un logiciel d'éléments finis

- Application du logiciel Matlab[®] au transfert-chaleur par conduction dans un milieu bidimensionnel (domaine géométrique complexe)
- Application d'un logiciel d'éléments finis commercial (Abaqus[®]) au calcul du comportement mécanique d'une structure (domaine tridimensionnel et variable d'état vectorielle)

