

Précision locale optimale dans la méthode des éléments finis

Au travers de l'exemple du paragraphe 2.3.4, nous avons vu que la solution approchée u^h est étonnamment exacte aux nœuds du maillage d'éléments finis pour la formulation faible donnée

$$u^h(x_i) = u(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.72)$$

Afin de démontrer ce résultat exceptionnel, prouvons tout d'abord que l'écart $u - u^h$ entre les solutions exacte et approchée du problème donné satisfait, sur l'ensemble du domaine de définition $[0, \ell]$, la condition d'orthogonalité suivante

$$\int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (d\delta u^h/dx) dx = 0 \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.73)$$

Comme l'espace fonctionnel $\mathcal{V}^h$ est un sous-espace de $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$), il est possible de remplacer le déplacement virtuel exact δu par sa valeur approchée δu^h dans la formulation faible (2.12)

$$\int_0^\ell EA (du/dx) (d\delta u^h/dx) dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.74)$$

En soustrayant de cette équation la forme faible approchée (2.22), on obtient, après division par le facteur EA , l'égalité ci-dessous

$$\int_0^\ell (du/dx - du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx = 0 \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.75)$$

qui correspond à la condition cherchée (2.73).

Montrons ensuite que la fonction g de Green (fig. 2.16) vérifie la relation

$$u(a) - u^h(a) = \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (dg/dx) dx \quad (2.76)$$

dans laquelle la quantité scalaire a ($0 < a < \ell$) dénote la position de l'impulsion de Dirac $\delta_a(x) = \delta(x - a)$ associée à la fonction de Green g par la forme forte bien connue

$$d^2g/dx^2 + \delta_a = 0 \quad \text{dans }]0, \ell[\quad (a)$$

$$g(\ell) = 0 \quad (b) \quad (2.77)$$

$$dg/dx \Big|_{x=0} = 0 \quad (c)$$

Dès lors que la formulation faible correspondant à la forme forte (2.77)

$$\int_0^\ell (dg/dx) (d\delta u/dx) dx = \int_0^\ell \delta_a \delta u dx \quad (2.78)$$

doit être satisfaite quel que soit $\delta u \in \mathcal{V}$, on peut adopter comme fonction test δu la différence $u - u^h$, qui appartient au même espace fonctionnel puisque la classe de fonctions $\mathcal{U}^h$ est identique à l'ensemble $\mathcal{V}^h$ inclus dans l'espace $\mathcal{V}$, ce qui permet d'écrire

$$\int_0^\ell (dg/dx) [d(u - u^h)/dx] dx = \int_0^\ell \delta_a (u - u^h) dx \quad (2.79)$$

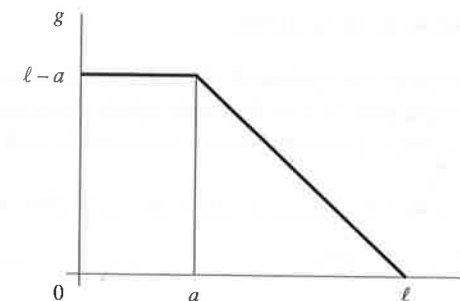


Fig. 2.16 Fonction de Green relative à l'impulsion de Dirac δ_a .

En vertu de la propriété de l'impulsion de Dirac δ_a , cette expression devient, les solutions exacte et approchée étant admises suffisamment régulières,

$$\int_0^\ell (dg/dx) [d(u - u^h)/dx] dx = u(a) - u^h(a) \quad (2.80)$$

ce qui démontre la relation (2.76).

Avec les deux lemmes (2.73) et (2.76) du théorème (2.72), il est maintenant possible de prouver que la solution approchée par la méthode des éléments finis est exacte aux nœuds pour le problème aux limites considéré. En effet, si le point d'application $x = a$ de l'impulsion de Dirac δ_a correspond à la position d'un nœud x_i ($i = 1, 2, \dots, p$), la fonction de Green g , qui est linéaire par morceaux, appartient au sous-espace $\mathcal{V}^h$, de sorte que la relation (2.76) devient, compte tenu de l'expression (2.73) écrite pour $\delta u^h = g$,

$$u(x_i) - u^h(x_i) = \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (dg/dx) dx = 0 \quad (2.81)$$

Notons qu'il serait possible de démontrer que la classe de problèmes traités dans ce chapitre admet une solution approchée par éléments finis qui est non seulement exacte aux points nodaux du réseau, mais qui est en plus telle qu'il existe en chaque élément au moins un point où sa dérivée première est exacte et que cette dernière est précise au second ordre au centre de l'élément fini [60].

Ces propriétés remarquables partagées par l'approximation u^h dérivée d'un modèle d'éléments finis de type Galerkin ne sont malheureusement pas représentatives de n'importe quel problème aux limites elliptique et s'expliquent ici par le fait que l'opérateur différentiel relatif à la forme forte ne contient que la dérivée seconde d^2u/dx^2 du déplacement, à l'exclusion de tout autre ordre de dérivation inférieur (ordre zéro ou un) et que les fonctions de forme choisies satisfont l'équation différentielle homogène $d^2u/dx^2 = 0$ [61, 93]. Bien qu'elle ne puisse être transposée à d'autres problèmes, cette situation de précision locale optimale de la solution approchée, connue sous le nom de phénomène de *super-convergence* [88], suggère que les méthodes des résidus pondérés, dont découle la méthode des éléments finis, assurent les conditions cadre pour lesquelles les caractéristiques de précision optimale dans un certain sens sont souvent garanties [60].

Meilleure approximation de la solution

Avant de déterminer la qualité globale d'une solution obtenue par la méthode des éléments finis, montrons que pour le problème aux limites considéré le procédé de Galerkin, dont est issue la méthode des éléments finis, conduit à la meilleure approximation u^h dans le sous-espace $\mathcal{V}^h$.

Dans ce but, considérons le déplacement virtuel approché relatif suivant

$$w^h = u^h - \delta u^h \quad (w^h \in \mathcal{V}^h) \quad (2.82)$$

défini comme la différence entre le déplacement réel approché u^h et l'approximation du déplacement virtuel absolu δu^h . On peut alors écrire successivement

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx &= \int_0^\ell [d(u - u^h + u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell [d(u^h - \delta u^h)/dx]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] [d(u^h - \delta u^h)/dx] dx \\ &= \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx + \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^\ell [d(u - u^h)/dx] (dw^h/dx) dx \end{aligned} \quad (2.83)$$

Comme la dernière intégrale est nulle en vertu de la relation (2.73) dans laquelle la quantité δu^h est remplacée par la grandeur $w^h \in \mathcal{V}^h$, l'expression (2.83) peut être explicitée sous la forme

$$\int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx = \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx - \int_0^\ell (dw^h/dx)^2 dx \quad (2.84)$$

Dès lors que le second terme du membre droit de cette égalité doit être positif ou nul, il s'ensuit

$$\int_0^\ell [d(u - u^h)/dx]^2 dx \leq \int_0^\ell [d(u - \delta u^h)/dx]^2 dx \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.85)$$

Cette inégalité exprime ainsi que la méthode de Galerkin est optimale dans un certain sens, pourvu que les fonctions u^h et δu^h soient choisies dans le même sous-espace de H^1 .

Estimations asymptotiques globales d'erreur

Bien qu'il soit appréciable que l'approximation u^h obtenue par la méthode des éléments finis satisfait certaines propriétés locales remarquables en présence de problèmes elliptiques particuliers, il est plus intéressant d'établir une mesure globale de la qualité de la solution approchée d'un problème aux limites unidimensionnel général.

A cette fin, définissons en premier lieu l'**erreur** $e^h(x)$ de l'approximation cherchée comme la différence entre la solution exacte $u(x)$ et la solution approchée $u^h(x)$

$$e^h(x) = u(x) - u^h(x) \quad (2.86)$$

Quoique la solution exacte soit rarement connue, il est possible de construire une estimation de l'erreur (2.86) et de déterminer si cette dernière décroît lorsque le nombre d'éléments du réseau augmente. Une telle information est d'une grande utilité, puisqu'elle permet de juger la qualité des fonctions de forme choisies et l'accroissement de la précision des résultats lors d'une diminution de la **longueur caractéristique**

$$h = \max_e \ell \quad (e = 1, 2, \dots, m) \quad (2.87)$$

du maillage, considérée comme un *paramètre du réseau*.

Comme l'erreur $e^h(x)$ constitue une mesure peu pratique de l'estimation de la précision des résultats, il est préférable de recourir à la notion scalaire de norme. Parmi les principales normes utilisées pour l'analyse d'erreur de la méthode des éléments finis, on peut citer:

- la **norme euclidienne** ou norme H^0 , notée $\|e^h\|_0$;
- la **semi-norme de l'énergie de déformation** ou norme H_E^1 , notée $\|e^h\|_E$;
- la **norme énergétique** (énergie totale) ou norme H^1 , notée $\|e^h\|_1$;
- la **norme maximale** ou norme C^0 , notée $|e^h|_0$.

Pour un problème aux limites unidimensionnel, ces normes ont respectivement pour expression

$$\|e^h\|_0 = \left[\int_0^\ell (e^h)^2 dx \right]^{1/2} \quad (a)$$

$$\|e^h\|_E = \left[\int_0^\ell (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2} \quad (b)$$

$$\|e^h\|_1 = \left[\int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx \right]^{1/2} \quad (c) \quad (2.88)$$

$$|e^h|_0 = \max_{0 \leq x \leq \ell} |e^h| \quad (d)$$

Les **estimations asymptotiques de l'erreur**, c'est-à-dire celles qui sont obtenues par discrétisation du réseau en éléments finis de longueur caractéristique h de plus en plus faible, sont typiquement de la forme

$$\|e^h\|_k \leq C_k h^p \quad (h/\ell \ll 1) \quad (2.89)$$

où l'exposant p , appelé **taux de convergence**, désigne un nombre entier qui dépend du degré des fonctions de forme utilisées pour l'approximation, tandis que la grandeur C_k , dénommée **facteur de convergence** selon la norme H^k choisie, est une constante liée aux données du problème et au taux p .

Si l'exposant p est positif, l'erreur $\|e^h\|_k$ tend vers zéro lorsque le paramètre h du réseau décroît et on dit alors que l'approximation *converge* vers la solution exacte, relativement à la norme choisie.

Dans le cas du problème aux limites considéré, dont la solution est modélisée au moyen de fonctions de forme linéaires par tranches (éléments finis à deux nœuds), les

estimations *a priori* de l'erreur s'écrivent

$$\begin{aligned} \|e^h\|_0 &\leq C_0 h^2 & (a) \\ \|e^h\|_E &\leq C_E h & (b) \\ \|e^h\|_1 &\leq C_1 h & (c) \\ |e^h|_0 &\leq C'_0 h^2 & (d) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Ces résultats montrent que les déplacements convergent *quadratiquement*, alors que les déformations et, par conséquent, les contraintes ne tendent malheureusement que *linéairement* vers les valeurs exactes, ce qui signifie que pour un maillage fixé, les déplacements approchés trouvés sont plus précis que les contraintes afférentes.

Norme énergétique de l'erreur d'un modèle d'éléments finis

L'estimation *a priori* (2.90c) de la norme énergétique (2.88c), qui constitue la mesure la plus courante de la précision d'une approximation obtenue par la méthode des éléments finis, peut être établie à partir du théorème (2.85). En effet, si l'on parvient à développer une solution approchée dont on puisse connaître l'erreur correspondante, celle-ci est au mieux égale à l'estimation d'erreur de l'approximation u^h , puisque cette dernière est la meilleure solution approchée possible dans le sous-espace $\mathcal{U}^h$.

Une fonction dont la précision peut facilement être évaluée est l'*interpolation linéaire* u_I de la solution exacte u entre les nœuds du réseau d'éléments finis (fig. 2.17)

$$u_I(x_i) = u(x_i) = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.91)$$

Comme le résidu $\rho(x) = u(x) - u_I(x)$ s'annule aux frontières de chaque élément fini ${}^e\Omega$ de longueur ${}^e\ell$, il est possible d'explicitier la fonction $\rho(x)$ sous la forme de la série de

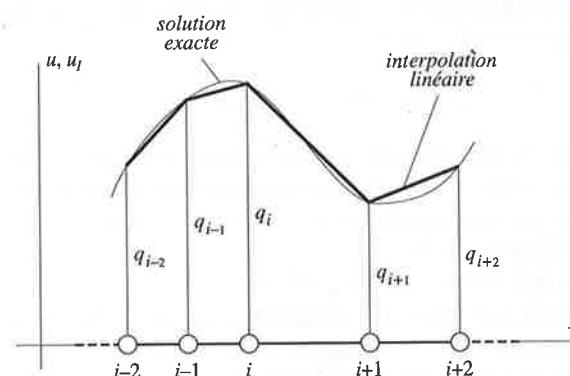


Fig. 2.17 Interpolation nodale linéaire u_I .

Fourier suivante

$$\rho(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{{}^e\ell} \quad (0 \leq x \leq {}^e\ell) \quad (2.92)$$

où les scalaires a_m ($m = 1, 2, \dots$) désignent classiquement les coefficients de la série. Conformément à l'expression (2.92), on établit aisément les intégrales suivantes

$$\int_0^{{}^e\ell} (d\rho/dx)^2 dx = \frac{{}^e\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{{}^e\ell} \right)^2 a_m^2 \quad (a) \quad (2.93)$$

$$\int_0^{{}^e\ell} (d^2\rho/dx^2)^2 dx = \frac{{}^e\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{{}^e\ell} \right)^4 a_m^2 \quad (b) \quad (2.93)$$

de sorte que, compte tenu de la condition

$$\left(\frac{m\pi}{{}^e\ell} \right)^2 a_m^2 \leq \frac{{}^e\ell^2}{\pi^2} \left(\frac{m\pi}{{}^e\ell} \right)^4 a_m^2 \quad (m \geq 1) \quad (2.94)$$

la sommation sur l'indice m entraîne l'*inégalité de Poincaré-Friedrich* ci-après

$$\int_0^{{}^e\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{{}^e\ell^2}{\pi^2} \int_0^{{}^e\ell} (d^2\rho/dx^2)^2 dx \quad (2.95)$$

Etant donné que la fonction $u_I(x)$ est linéaire dans l'intervalle considéré, cette inégalité s'écrit aussi

$$\int_0^{{}^e\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{{}^e\ell^2}{\pi^2} \int_0^{{}^e\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.96)$$

ou, d'après la définition du paramètre h du maillage,

$$\int_0^{{}^e\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{{}^e\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.97)$$

Cette relation étant valable pour chacun des éléments finis du réseau, l'assemblage des différentes contributions aux intégrales conduit à l'expression suivante

$$\int_0^{\ell} (d\rho/dx)^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.98)$$

pourvu que la dérivée seconde de la fonction u possède une énergie finie selon la norme H^0

$$\int_0^{\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx < \infty \quad (2.99)$$

De manière analogue, on montre l'inégalité

$$\int_0^{\ell} \rho^2 dx \leq \frac{h^4}{\pi^4} \int_0^{\ell} (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.100)$$

Il en découle que le carré de la norme H^1 du résidu $\rho(x)$ vérifie la condition

$$\int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{h^2}{\pi^2}\right) \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.101)$$

qui, pour une longueur caractéristique h du réseau très faible ($h/\ell \ll 1$), prend la forme

$$\int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \quad (2.102)$$

Comme la fonction $u^h(x)$ est la meilleure approximation possible de la solution $u(x)$ dans le sous-espace $\mathcal{U}^h$, la comparaison de l'erreur $e^h(x) = u(x) - u^h(x)$ avec le résidu $\rho(x) = u(x) - u_r(x)$ permet d'énoncer

$$\begin{aligned} \int_0^\ell [(e^h)^2 + (de^h/dx)^2] dx &\leq \int_0^\ell [\rho^2 + (d\rho/dx)^2] dx \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell (d^2u/dx^2)^2 dx \end{aligned} \quad (2.103)$$

ou, en écriture de norme,

$$\|e^h\|_1^2 \leq \|\rho\|_1^2 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|d^2u/dx^2\|_0^2 \quad (2.104)$$

Puisque la norme H^0 de la dérivée seconde de la solution exacte u est admise bornée d'après la relation (2.99), on trouve finalement

$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h \quad (h/\ell \ll 1) \quad (2.105)$$

ce qui démontre l'estimation définie à l'égalité (2.90c).

Commentaires

- En toute rigueur, l'inégalité (2.85) ne permet que de montrer que les méthodes de Galerkin et des éléments finis sont optimales au sens de la semi-norme énergétique H_E^1 . Toutefois, pour un problème bien posé – c'est-à-dire continu et coercif [26] –, cette semi-norme est équivalente à la norme H^1 , ce qui valide la première inégalité apparaissant dans la relation (2.103).

- L'erreur $u - u^h$ sur le déplacement étant d'après la relation (2.73) orthogonale au sous-espace $\mathcal{V}^h$ au sens du produit scalaire dans l'espace fonctionnel H^1 , la solution u^h obtenue par la méthode des éléments finis est la projection, au sens de ce produit scalaire, du déplacement exact u sur le sous-espace $\mathcal{V}^h$. En d'autres termes, l'approximation u^h est l'élément de $\mathcal{V}^h$ le plus proche de la fonction cherchée u au sens de la semi-norme H_E^1

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - w\|_E \quad \forall w \in \mathcal{V}^h \quad (2.106)$$

cette forme, démontrée facilement à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, étant en fait identique à la relation (2.85) illustrant que la solution u^h est la meilleure approximation de la fonction u dans le sous-espace $\mathcal{V}^h$ au sens de la norme précitée.

- La convergence de toute méthode numérique est mesurée par les deux propriétés fondamentales que constituent la *consistance* et la *stabilité* [26, 48]. La première dépend du choix des fonctions de base relatives aux éléments finis, tandis que la seconde est tributaire de la préservation, lors de la discrétisation, de la monotonie de l'opérateur différentiel associé aux efforts intérieurs.

- La définition (2.88c) de la norme H^1 de l'erreur englobe simultanément la fonction e^h et sa dérivée de^h/dx sans adaptation dimensionnelle, ce qui n'est certes pas très heureux aux yeux d'un ingénieur. Cette forme est toutefois acceptée ici, car elle est usuellement adoptée par la communauté des numériciens.

- La semi-norme de l'énergie de déformation (2.88b) ou norme H_E^1 de l'erreur est quelquefois définie de la manière suivante

$$\|e^h\|_E = \left[\int_0^\ell EA (de^h/dx)^2 dx \right]^{1/2} \quad (2.107)$$

ce qui confère à son carré la dimension vraie d'une énergie (J ou Nm).

2.3.6 Exemple : normes de l'erreur d'un réseau d'éléments finis

Afin de concrétiser les notions d'estimations d'erreur *a priori* exposées au paragraphe 2.3.5, recherchons la norme euclidienne H^0 et la semi-norme énergétique H_E^1 de l'erreur e^h entachant la solution du problème de la barre en traction discrétisée en quatre éléments finis à deux points nodaux (§ 2.3.4).

Comme la solution approchée par la méthode des éléments finis est exacte sur la seconde moitié de la structure (fig. 2.14), il suffit de déterminer l'erreur e^h sur le premier tronçon, où la solution exacte u et sa dérivée première ont pour expression

$$u = \frac{\hat{q}\ell x}{6EA} \left(2 - 3\frac{x}{\ell} + 2\frac{x^3}{\ell^3}\right) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\hat{q}\ell}{3EA} \left(1 - 3\frac{x}{\ell} + 4\frac{x^3}{\ell^3}\right) \quad (2.108)$$

D'après les valeurs nodales (2.68a) et (2.68b) et conformément à l'allure des fonctions de base, la solution approchée u^h et sa dérivée première s'écrivent sur les deux premiers éléments finis

$$\begin{aligned} u^h &= \frac{41\hat{q}\ell}{192EA} x & \frac{du^h}{dx} &= \frac{41\hat{q}\ell}{192EA} & 0 \leq x \leq \ell/4 & \quad (a) \\ u^h &= \frac{\hat{q}\ell^2}{384EA} \left(17 + 14\frac{x}{\ell}\right) & \frac{du^h}{dx} &= \frac{7\hat{q}\ell}{192EA} & \ell/4 \leq x \leq \ell/2 & \quad (b) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Il s'ensuit que l'erreur $e^h = u - u^h$ et sa dérivée prennent les formes respectives suivantes sur le premier intervalle

$$\begin{aligned} e^h &= \frac{\hat{q}\ell x}{6EA} \left(\frac{23}{32} - 3\frac{x}{\ell} + 2\frac{x^3}{\ell^3}\right) \\ \frac{de^h}{dx} &= \frac{\hat{q}\ell}{3EA} \left(\frac{23}{64} - 3\frac{x}{\ell} + 4\frac{x^3}{\ell^3}\right) \quad (0 \leq x \leq \ell/4) \end{aligned} \quad (2.110)$$

tandis que sur le deuxième, elles valent

$$e^h = \frac{\hat{q}\ell^2}{6EA} \left(-\frac{17}{64} + \frac{57x}{32\ell} - 3\frac{x^2}{\ell^2} + 2\frac{x^4}{\ell^4} \right) \quad (\ell/4 \leq x \leq \ell/2) \quad (2.111)$$

$$\frac{de^h}{dx} = \frac{\hat{q}\ell}{3EA} \left(\frac{57}{64} - 3\frac{x}{\ell} + 4\frac{x^3}{\ell^3} \right)$$

En intégrant, d'après les définitions (2.88a) et (2.88b), les carrés des quantités précédentes sur les domaines $[0, \ell/4]$ et $[\ell/4, \ell/2]$ correspondant aux éléments finis $^1\Omega$ et $^2\Omega$ (fig. 2.13), on obtient numériquement

$$\|e^h\|_0 = 0.00291 \frac{\hat{q}\ell^{5/2}}{EA} \quad (a)$$

$$\|e^h\|_E = 0.03692 \frac{\hat{q}\ell^{3/2}}{EA} \quad (b)$$

Ces valeurs sont reportées à la figure 2.18, où sont en outre incorporés les résultats trouvés pour ces mêmes normes avec des discrétisations en deux et huit éléments finis. A la lecture de l'évolution des différentes estimations d'erreur avec la longueur caractéristique du réseau, on constatera que les mesures asymptotiques (2.90) sont ici valables même pour un très faible nombre d'éléments finis. Notons par ailleurs que les normes de l'erreur énergétique (2.90c) ne sont pas intégrées à la figure en raison de leur inconsistance dimensionnelle.

2.4 FORME VARIATIONNELLE D'UN PROBLÈME D'ÉLASTOSTATIQUE

2.4.1 Principe variationnel global

Lorsque l'opérateur caractérisant l'équation différentielle du problème donné est *auto-adjoint* ou *symétrique*, on peut également trouver une solution au problème en postulant un **principe variationnel global**, exprimant l'équilibre de l'énergie de tout le domaine étudié sous la forme d'une **fonctionnelle** ou fonction de fonctions, la solution correcte étant alors celle qui minimise la fonctionnelle considérée. Cette troisième formulation d'un problème elliptique après les formes forte (§ 2.1.1) et faible (§ 2.1.2) permet aussi de construire un modèle d'éléments finis par une approche relativement analogue à la formulation faible discrète.

Dès lors que les approches faible et variationnelle sont mathématiquement équivalentes – pourvu que la fonctionnelle puisse être établie –, nous ne nous étendrons pas sur cette nouvelle formulation, afin de ne pas surcharger inutilement la présentation, et nous nous bornerons dans les lignes qui suivent à donner une description générale de l'approche. Des informations plus complètes sur l'application des méthodes variationnelles dans le domaine de la mécanique des solides et des structures peuvent être obtenues dans la littérature spécialisée [95].

Pour le problème de la barre en traction analysé tout au long de ce chapitre, choisissons comme fonctionnelle l'**énergie potentielle totale** du système étudié, composée

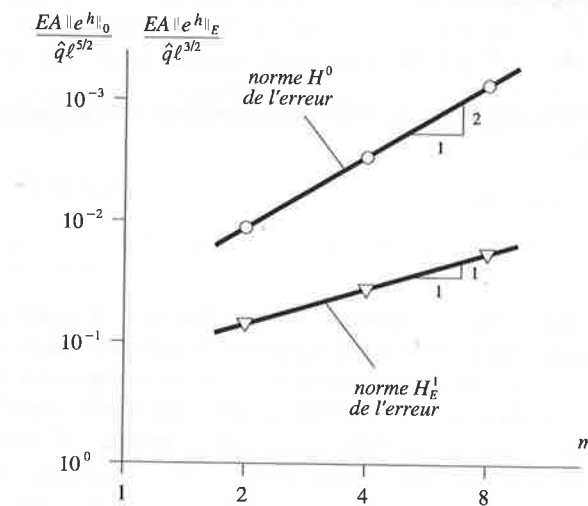


Fig. 2.18 Représentation logarithmique des normes d'erreur $\|e^h\|_0$ et $\|e^h\|_E$ en fonction du nombre m d'éléments finis modélisant la barre en traction.

de l'**énergie de déformation interne** U et du **travail** V de la charge répartie q et de la force ponctuelle P à l'extrémité de la barre,

$$J(w) = U(w) + V(w) \quad V = - \int_0^\ell q w \, dx - P w(\ell)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (dw/dx)^2 \, dx - \left[\int_0^\ell q w \, dx + P w(\ell) \right] \quad (2.113)$$

et montrons qu'elle conduit à la solution du problème, qui consiste donc à rechercher le déplacement $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in \mathcal{U} \quad (2.114)$$

Lors d'une variation arbitraire $\delta w \in \mathcal{V}$ de la fonction w , la variation première de la fonctionnelle (2.113) a pour expression

$$\delta J(w) = \int_0^\ell EA (dw/dx) (d\delta w/dx) \, dx - \int_0^\ell q \delta w \, dx - P \delta w(\ell) \quad (2.115)$$

En intégrant par parties le premier terme du membre droit de cette égalité, on peut écrire, sachant que la variation δw s'annule en $x = 0$,

$$\delta J(w) = - \int_0^\ell [EA (d^2w/dx^2) + q] \delta w \, dx + [EA (dw/dx)]_{x=\ell} - P \delta w(\ell) \quad (2.116)$$

La condition de stationnarité

$$\delta J(w = u) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{U} \quad (2.117)$$

implique que l'extremum de la fonctionnelle $J(w)$ est atteint quand les deux conditions ci-après sont satisfaites

$$\begin{aligned} EA (d^2u/dx^2) + q &= 0 & (a) \\ EA (du/dx) \Big|_{x=\ell} - P &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (2.118)$$

La première égalité, appelée **équation d'Euler-Lagrange** associée à la fonctionnelle, est en fait l'équation différentielle (2.3) régissant le problème, tandis que la seconde n'est rien d'autre que la condition naturelle (2.4b). Comme la fonction w appartient à la classe de fonctions $\mathcal{U}$, elle respecte en outre la condition aux limites essentielle (2.4a) au point de stationnarité lorsque les fonctions w et u sont les mêmes. Les formulations forte et variationnelle sont donc équivalentes d'un point de vue mathématique, pour autant toutefois que les conditions de régularité énoncées précédemment soient satisfaites.

L'analyse de la variation seconde de la fonctionnelle permet de déterminer la nature de l'extremum trouvé. Pour notre cas particulier, on peut voir que la solution $u \in \mathcal{U}$ minimise la fonctionnelle, puisque l'on a

$$\delta^2 J(w = u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (d\delta u/dx)^2 dx > 0 \quad (2.119)$$

ce terme étant bien strictement positif, dès lors qu'il représente l'énergie de déformation virtuelle du système.

Commentaires

- Dans la littérature, la forme faible est quelquefois appelée variationnelle, mais nous réserverons cette acception exclusivement à la formulation décrite dans ce paragraphe.
- L'expression (2.113) n'est pas la seule forme quadratique qui se trouve minimisée lorsque la fonction $u(x)$ satisfait l'équation différentielle (2.3) ou (2.118a). Il est possible de définir d'autres fonctionnelles qui conduisent à un résultat analogue, mais la forme choisie ici pour la fonctionnelle présente l'interprétation physique la plus simple.
- Le problème de minimisation (2.117) correspond en fait au principe fondamental du minimum de l'énergie potentielle en mécanique.
- Le fait que l'existence d'un principe variationnel soit liée à la symétrie ou l'auto-adjonction du problème considéré émane du théorème de Lax-Milgram [16].

2.4.2 Formulation variationnelle approchée

Comme pour la forme faible, on peut trouver une solution approchée du problème variationnel en recherchant une fonction u^h – qui minimise la fonctionnelle J – dans le sous-espace de dimension finie $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$. La **méthode de Ritz-Galerkin** [35, 82],

connue en dynamique des structures sous le nom de méthode de Rayleigh-Ritz [81, 82], construit ainsi une approximation u^h du déplacement u sous la forme d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de forme définies *globalement*, la solution étant, parmi toutes les combinaisons possibles, celle qui minimise la fonctionnelle considérée.

Si l'on choisit pour la fonction arbitraire w une approximation w^h de type

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) \quad (2.120)$$

où les grandeurs $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dénotent des fonctions de forme appropriées, la fonctionnelle (2.113) devient

$$\begin{aligned} J(w^h) &= \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (dw^h/dx)^2 dx - \int_0^\ell q w^h dx - P w^h(\ell) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \left[\int_0^\ell EA (dh_i/dx) (dh_j/dx) dx \right] \alpha_j \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\int_0^\ell h_i q dx + h_i(\ell) P \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i k_{ij} \alpha_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.121)$$

où les termes k_{ij} et r_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$), identiques aux expressions (2.30), représentent respectivement les composantes de la matrice de rigidité $\mathbf{K}$ et du vecteur des forces $\mathbf{r}$ pour les fonctions de forme h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) choisies, la variable $\mathbf{a}$ dénotant le vecteur collectant les coefficients α_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

La minimisation de la fonctionnelle J par rapport aux paramètres α_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\partial J(w^h = u^h) / \partial \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.122)$$

conduit finalement au système d'équations linéaires suivant, identique à la relation (2.29),

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.123)$$

Comme, au point minimal, la fonction w^h est l'approximation cherchée u^h , la résolution du système (2.123) par rapport aux inconnues α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) permet de définir la solution approchée du problème sous la forme

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) \quad (2.124)$$

Les méthodes de Galerkin et de Ritz-Galerkin conduisent par conséquent, à nombre de paramètres α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) égal, à la même approximation de la solution u .

Commentaires

- La coïncidence entre les solutions approchées obtenues par les méthodes de Galerkin et de Ritz-Galerkin résulte du fait que l'opérateur différentiel caractérisant le problème donné est auto-adjoint. Si cette dernière condition n'est pas remplie, une fonctionnelle de la forme (2.113) ne peut être définie, de sorte que le procédé de Galerkin permet de résoudre une classe plus large de problèmes.

• Quand la méthode de Ritz-Galerkin est applicable, la formulation variationnelle peut ouvrir la voie à la construction d'un modèle d'éléments finis, selon une démarche identique à celle décrite à la section 2.3. La solution approchée u^h est alors obtenue par assemblage de fonctions de forme à *support compact*, ce qui entraîne les mêmes résultats que ceux trouvés précédemment. La matrice de rigidité $\mathbf{K}$ découlant de la méthode des éléments finis considérée comme extension du procédé de Ritz-Galerkin est toutefois toujours symétrique, en raison de la condition d'existence de la fonctionnelle.

2.4.3 Interprétation physique de l'approche variationnelle

Pour clore cette brève étude de l'approche variationnelle des problèmes elliptiques unidimensionnels, il est intéressant de clarifier l'interprétation physique de la fonctionnelle, ce qui permet notamment d'approfondir la notion de norme énergétique de l'erreur définie au paragraphe 2.3.5.

Considérons à nouveau la fonctionnelle (2.113) qui, lorsqu'elle est minimisée par la solution u cherchée, s'écrit

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA (du/dx)^2 dx - \int_0^\ell q u dx - P u(\ell) \quad (2.125)$$

Comme au point de stationnarité de la fonctionnelle, la formulation faible (2.12) prend la forme suivante – puisque le déplacement virtuel δu y est identique au déplacement réel u –

$$\int_0^\ell EA (du/dx)^2 dx = \int_0^\ell q u dx + P u(\ell) \quad (2.126)$$

la relation (2.125) devient

$$J(u) = -\frac{1}{2} \int_0^\ell EA (du/dx)^2 dx = -U(u) \quad (2.127)$$

Il en résulte qu'au point minimal l'énergie potentielle totale du système est égale, au signe près, à son énergie de déformation.

Dès lors que la solution exacte u minimise la fonctionnelle sur une classe de fonctions $\mathcal{U}$ plus large que l'approximation $u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$, on établit selon la relation (2.114) l'inégalité ci-après

$$J(u) \leq J(u^h) \quad \forall u^h \in \mathcal{U}^h \quad (2.128)$$

de sorte qu'en vertu de l'expression (2.127), l'énergie de déformation du système est sous-estimée par la solution approchée

$$U(u^h) \leq U(u) \quad \forall u^h \in \mathcal{U}^h \quad (2.129)$$

Cette propriété ne peut toutefois être généralisée à tous les problèmes aux limites, mais il est possible d'affirmer que la solution obtenue par un modèle d'éléments finis construit à partir de la méthode de Ritz-Galerkin, telle que décrite dans cette section, conduit toujours à une valeur approchée par excès de l'énergie potentielle totale $J(u)$, le minimum absolu correspondant à la solution exacte du problème. Le tableau 2.19 présente, en fonction du nombre d'éléments finis, la valeur de l'énergie de déformation – estimée elle par défaut –

obtenue pour une discrétisation en deux, quatre et huit éléments finis de la barre encastrée en traction étudiée aux paragraphes 2.3.4 et 2.3.6.

Tableau 2.19 Energie de déformation U en fonction du nombre m d'éléments finis pour le problème de la barre encastrée en traction.

Nombre d'éléments m	Energie de déformation $EAU/q^2\ell^3$	Erreur %
2	0.003906	- 40.3
4	0.005866	- 10.4
8	0.006375	- 2.6
∞	0.006548	-

Exercice 2.1

Par la méthode de Galerkin, déterminer une solution approchée de l'équation de la conduction de la chaleur en régime stationnaire pour un domaine unidimensionnel de longueur ℓ

$$\frac{d}{dx} \left(-\kappa(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) = q \quad 0 < x < \ell \quad (2.130)$$

compte tenu des conditions essentielles de bord

$$T(0) = T(\ell) = 0 \quad (2.131)$$

où la variable T est la température et où la grandeur κ désigne le coefficient de conductibilité thermique que l'on choisit constant. Le flux de chaleur q est admis constant pour $0 < x < \ell/2$ et nul pour $\ell/2 < x < \ell$. Prendre un et deux paramètres pour l'approximation de Galerkin et comparer les résultats avec la solution exacte.

Exercice 2.2

Déterminer l'écrasement d'une colonne de hauteur h , de section A et de module d'élasticité E , soumise à son poids propre (poids spécifique γ), pour une approximation polynomiale de type Galerkin à deux termes. Vérifier que le déplacement trouvé est égal à la solution exacte du problème.

Exercice 2.3

Reprendre le problème de la barre en traction traité au paragraphe 2.3.4 en choisissant un réseau formé de deux éléments finis linéaires. Discuter les résultats trouvés et les comparer avec ceux obtenus précédemment.