

SYSTÈMES CONTINUS DU DEUXIÈME ORDRE

Les systèmes vibratoires continus sont formés de masses réparties et déformables et possèdent, contrairement aux systèmes discrets examinés précédemment, un nombre infini de degrés de liberté et donc de fréquences propres. Les éléments élastiques et dissipatifs sont également continus et sont liés directement, en général, aux propriétés des matériaux dont les masses sont constituées.

Seuls les systèmes continus de configuration très simple, par exemple un barreau prismatique ou une plaque circulaire d'épaisseur constante, peuvent être étudiés par des méthodes analytiques. Les fréquences propres de tels systèmes appartiennent alors à une série ordonnée dont il sera souvent possible d'établir la loi de formation.

Le comportement vibratoire des systèmes de la pratique devra presque toujours être abordé, après discrétisation, par des méthodes numériques, en particulier celle des éléments finis. L'étude analytique de quelques systèmes continus simples présente malgré tout l'avantage de permettre une bonne compréhension de la nature physique des solutions, par exemple leur aspect ondulatoire. Cette nature sera pour l'essentiel maintenue, même si elle se trouve souvent occultée par la complexité des systèmes de la pratique.

15.1 ÉQUATION DE D'ALEMBERT

Dans ce chapitre, nous examinerons le comportement des systèmes vibratoires continus les plus simples que l'on puisse envisager. Ils correspondent à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dite équation de d'Alembert. Cette équation établit la proportionnalité entre les deuxièmes dérivées d'une fonction inconnue $y(x, t)$, respectivement par rapport au temps t et par rapport à une variable géométrique x . Nous en verrons trois exemples ci-après.

Quand les variables géométriques sont plus nombreuses (par exemple: deux pour une membrane, trois pour un massif) mais que seules interviennent les dérivées secondes directes (donc

à l'exclusion des dérivées croisées telles que $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$) la nature physique des solutions reste inchangée. Par contre, il devient de plus en plus difficile d'établir effectivement ces solutions.

15.1.1 Vibrations latérales des cordes

Une corde est un système de la mécanique ne pouvant transmettre qu'une force de traction; elle ne présente donc pas de résistance à la flexion. En l'absence de forces latérales, la ligne moyenne d'une corde est un segment de droite. On admet généralement que la section normale d'une corde est circulaire, mais la section peut être, en principe, de forme quelconque. Il est par contre nécessaire que toute dimension linéaire de cette section – le diamètre dans le cas d'une corde – soit beaucoup plus petite que la longueur de la corde.

Nous allons étudier les déplacements latéraux d'une corde, en adoptant les hypothèses suivantes (figure 15.1):

- La masse de la corde par unité de longueur μ_1 est constante et se trouve concentrée sur la ligne moyenne $y(x, t)$. Ceci revient à dire que les dimensions latérales de la section de la corde sont négligeables sur le plan dynamique.
- Les déplacements latéraux sont suffisamment petits pour que la tension T (force de traction) reste, au premier ordre, constante pour toutes valeurs du temps t et de l'abscisse x .
- Les déplacements se produisent dans un plan (Oxy sur la figure). Cela signifie que la corde ne tourne pas autour de sa position d'équilibre statique

Considérons un élément MM' de la corde, de masse $dm = \mu_1 dx$, écarté de la distance $y(x, t)$ par rapport à sa position d'équilibre. Aux extrémités, les pentes de la corde sont respectivement $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $\alpha + d\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$.

Ecrivons la loi de Newton en projetant les forces dans la direction verticale:

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(\alpha + d\alpha) - T \alpha$$

$$\mu_1 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu_1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

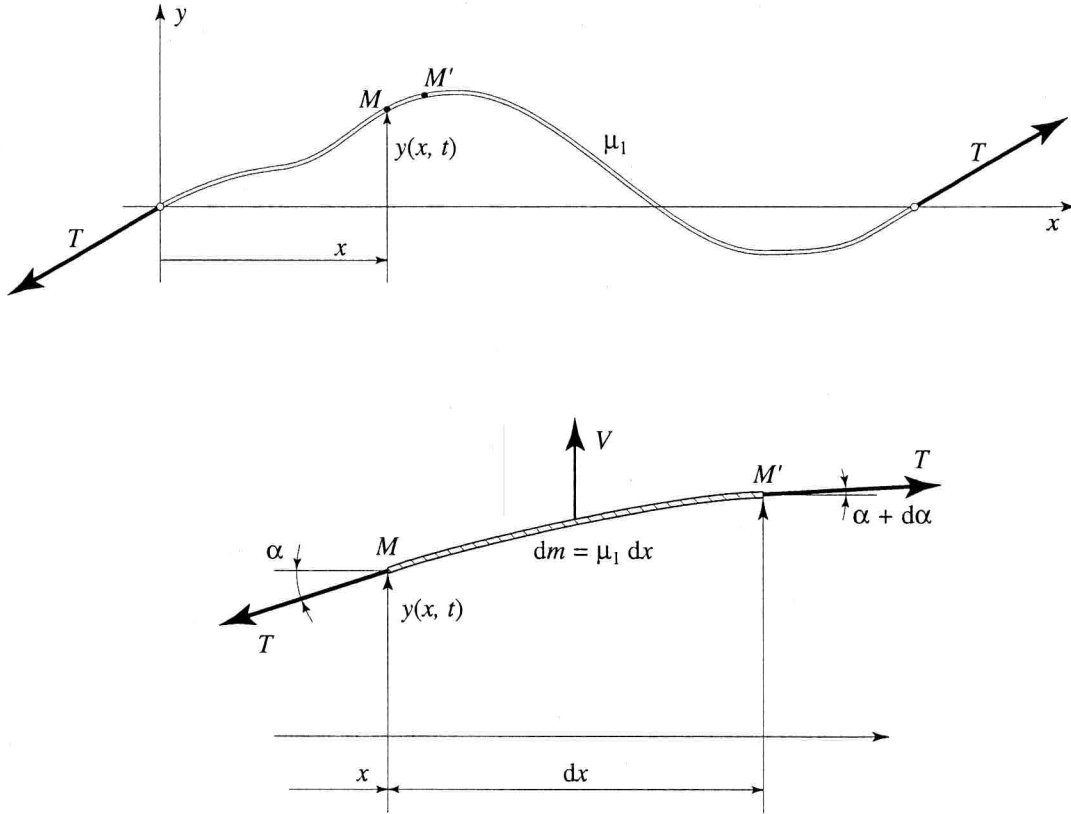


Fig. 15.1 Vibrations latérales d'une corde tendue

Soit finalement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{T}{\mu_1} \quad (15.1)$$

La constante a est une vitesse; en effet:

$$[a^2] = \left[\frac{T}{\mu_1} \right] = \frac{\text{N}}{\text{kg/m}} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{kg/m}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nous verrons que $y(x, t)$ correspond à la superposition d'une onde progressive se déplaçant à vitesse a et d'une onde régressive se déplaçant dans le sens opposé à la vitesse $-a$. La pente α et la vitesse latérale v doivent présenter le même aspect ondulatoire. Pour le démontrer, écrivons d'abord

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (15.2)$$

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (15.3)$$

La relation bien connue concernant les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

devient dans le cas particulier

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (15.4)$$

Revenons à l'équation (15.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}$$

Elle peut se mettre sous la forme équivalente

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (15.5)$$

Dérivons cette dernière relation par rapport au temps en tenant compte de (15.4)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ainsi, comme le déplacement, la vitesse latérale satisfait l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (15.6)$$

En dérivant (15.5) par rapport à x on montre qu'il en est de même pour α

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (15.7)$$

15.1.2 Vibrations longitudinales des barres prismatiques

On considère un barreau prismatique de longueur ℓ , de section A , de module d'élasticité E et de masse spécifique ρ . Si les dimensions linéaires de A sont beaucoup plus petites que ℓ , on peut négliger l'effet de Poisson et admettre qu'une section normale de la barre se déplace parallèlement à elle-même sous l'effet d'une force longitudinale (figure 15.2).

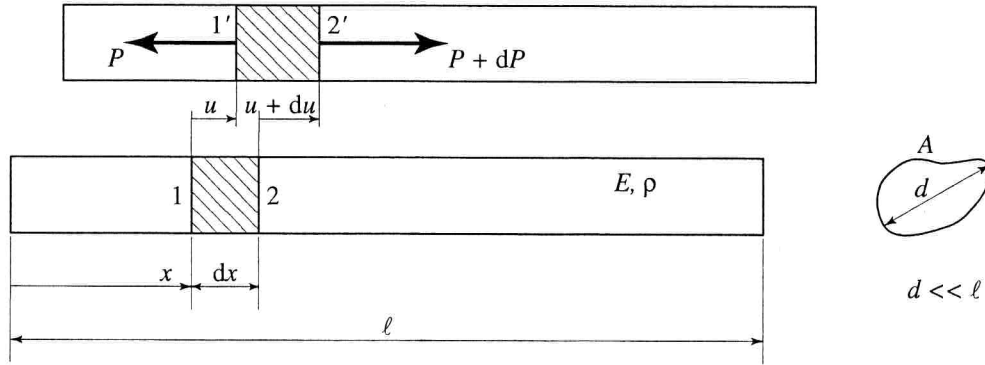


Fig. 15.2 Vibrations longitudinales d'un barreau prismatique

Supposons que lors d'une vibration longitudinale les faces 1 et 2 d'un élément d'épaisseur dx se déplacent respectivement de u et $u + du$ pour venir en $1'$ et $2'$. Ces faces subissent alors des forces élastiques P et $P + dP$.

Sur la face $1'$, la force a pour valeur

$$P = \varepsilon E A$$

ε étant l'allongement spécifique

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15.8)$$

Donc

$$P = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

Sur l'autre face, la force devient

$$P + dP = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right)$$

La masse de l'élément étant $dm = \rho A dx$, la loi de Newton s'écrit

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P + dP - P = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On retrouve ainsi l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec } a^2 = \frac{E}{\rho} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (15.9)$$

La vitesse de déplacement d'une section de la barre est

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15.10)$$

En résumé, lors des vibrations longitudinales d'une barre, le déplacement $u(x, t)$, la vitesse $v(x, t)$ et l'allongement spécifique $\varepsilon(x, t)$ satisfont l'équation de d'Alembert.

15.1.3 Vibrations de torsion des arbres circulaires

Les vibrations de torsion d'un arbre circulaire (figure 15.3) peuvent être définies par la rotation $\phi(x, t)$, liée au moment de torsion $M_t(x, t)$ par la relation bien connue

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{M_t}{G I_p} \quad (15.11)$$

dans laquelle G et I_p sont respectivement le module de glissement et le moment d'inertie polaire de la section A de l'arbre. Rappelons que :

$$I_p = \iint_A r^2 dA$$

Par rapport à l'axe de l'arbre, le moment d'inertie à la rotation d'une tranche d'épaisseur dx a pour valeur

$$dJ = \iint_A r^2 (\rho dx dA)$$

ρ étant la masse spécifique. On a donc

$$dJ = \rho dx I_p$$

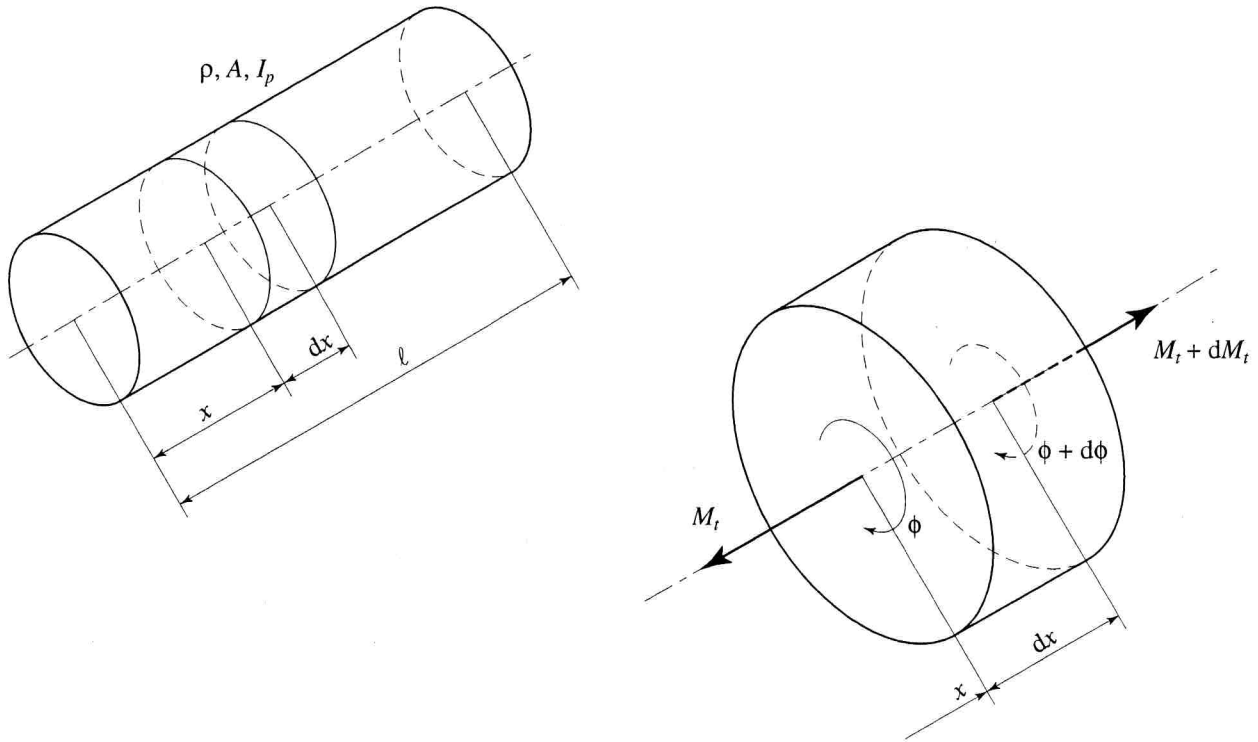


Fig. 15.3 Vibrations de torsion d'un cylindre de section circulaire

L'accroissement du moment de torsion sur la distance dx peut s'écrire, compte tenu de (15.11)

$$dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial x} dx = G I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx$$

La loi de Newton devient dans le cas particulier

$$dJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = dM_t$$

soit

$$\rho dx I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = G I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx$$

ce qui correspond une nouvelle fois à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{G}{\rho} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (15.12)$$

En comparant les valeurs de a intervenant dans les relations (15.9) et (15.12), on voit que la vitesse de propagation des ondes de torsion est plus faible que celle des ondes longitudinales (pour l'acier, par exemple, le rapport de ces valeurs est d'environ 0,62 puisque $E/G \approx 2,6$).

Par analogie avec les deux exemples précédent, rappelons que la vitesse angulaire

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

et le moment de torsion

$$M_t(x, t) = G I_p \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

satisfont l'équation (15.12).

15.2 NATURE ONDULATOIRE DES SOLUTIONS

Dans l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

effectuons le changement de variable

$$\begin{cases} \lambda = x - a t \\ \mu = x + a t \end{cases} \quad (15.13)$$

Dès lors

$$y(x, t) = y[\lambda(x, t), \mu(x, t)]$$

On calcule les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} = a \left(-\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \right)$$

puis celles du deuxième ordre

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial \mu}{\partial t} \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2} \right)\end{aligned}$$

En tenant compte des deux relations précédentes, l'équation de d'Alembert devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} = 0 \quad (15.14)$$

Cette équation a pour solution générale

$$y = f(\lambda) + g(\mu)$$

soit, en revenant aux variables x et t :

$$y = f(x - at) + g(x + at) \quad (15.15)$$

Pour interpréter ce résultat, revenons à l'exemple des déplacements latéraux d'une corde tendue, supposée de longueur infinie, en admettant d'abord que la fonction $g(x + at)$ est nulle. Au temps $t = \tau$, la déformée de la corde est $y = f(x - a\tau)$. Elle est identique à celle du temps $t = 0$ que l'on aurait translatée d'une distance $a\tau$ (figure 15.4). Cette déformée a donc la nature d'une onde progressive se déplaçant à vitesse constante a vers la droite. Réciproquement, quand $f(x - at)$ est nulle, la déformée $y = g(x + at)$ est une onde rétrograde se déplaçant vers la gauche à vitesse $-a$.

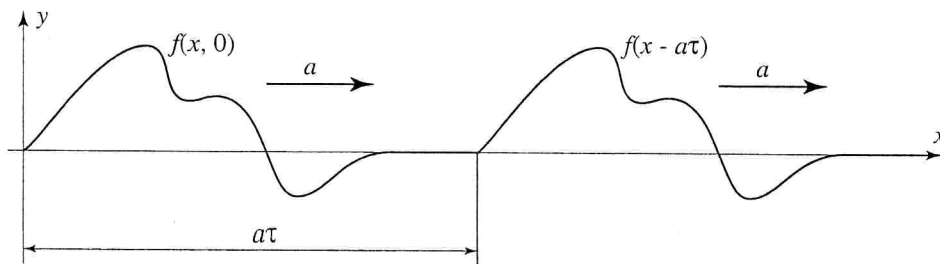


Fig. 15.4 Propagation d'une perturbation

15.2.1 Solution correspondant à des conditions initiales connues

Quand la déformation initiale $y_0(x)$ et la vitesse initiale sont connues, il est possible de déterminer la solution $y(x, t)$. En effet, d'après (15.15)

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= y_0(x) = [f(x - at) + g(x + at)]_{t=0} \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned} \quad (15.16)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} &= v_0(x) = [-a f'(x - at) + a g'(x + at)]_{t=0} \\ &= a[-f'(x) + g'(x)] \end{aligned} \quad (15.17)$$

Si $y_0(x)$ et $v_0(x)$ sont définies pour $x \geq x_0$, la relation (15.17) donne, en intégrant par rapport à x

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v_0(\xi) d\xi \quad (15.18)$$

Dans cette relation, ξ est une variable auxiliaire. En utilisant (15.16) et (15.18) on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[y_0(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v_0(\xi) d\xi \right] \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left[y_0(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v_0(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

Comme $y(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$, il vient finalement

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [y_0(x - at) + y_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi) d\xi \quad (15.19)$$

L'utilisation de cette dernière relation est particulièrement commode quand la vitesse initiale est nulle.

Considérons par exemple une corde de longueur infinie, soumise à une déformation initiale

$$y_0(x) = \delta e^{-x^2}$$

Il vient ainsi

$$y(x, t) = \frac{\delta}{2} \left[e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2} \right]$$

Comme le montre la figure 15.5, l'onde progressive et l'onde rétrograde se propagent en sens contraire de part et d'autre de l'origine. La corde étant supposée de longueur infinie, les deux ondes se propagent sans arrêt dans la même direction.

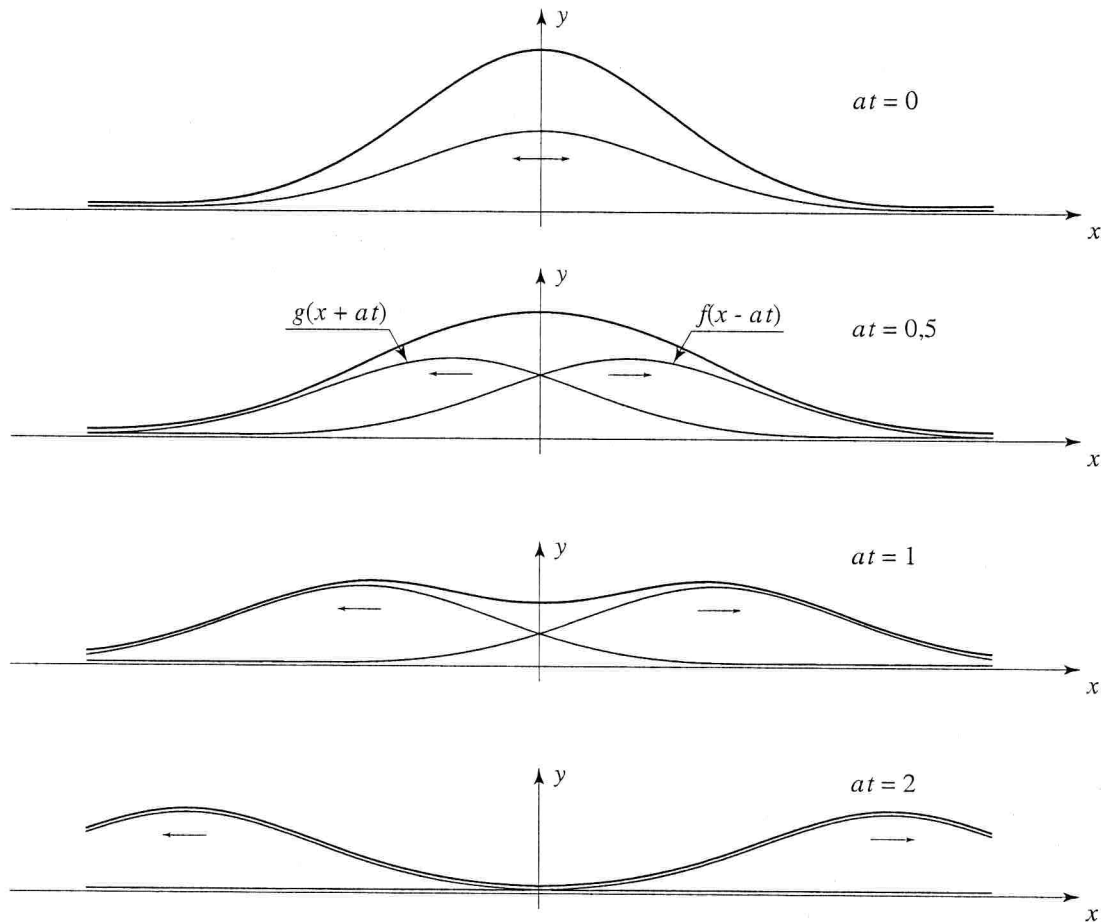


Fig. 15.5 Propagation d'une perturbation le long d'une corde de longueur infinie

15.2.2 Propagation des ondes aux extrémités

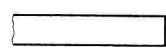
Lorsque le support dans lequel l'onde se propage possède une ou plusieurs limites finies, l'évolution de l'onde doit être définie au niveau de ces extrémités. Cette description est constituée d'équations, appelées conditions aux limites, qui font intervenir la fonction d'onde et éventuellement certaines de ses dérivées spatiales ou temporelles. Dans le cas de l'équation de d'Alembert, les conditions aux limites peuvent être réparties en trois catégories différentes :

- a) La condition ne fait intervenir que la fonction d'onde, sans ses dérivées ; il s'agit alors d'un déplacement imposé dont un exemple classique est l'encastrement idéal (figure 15.6), pour lequel le déplacement est nul.



Fig. 15.6 Encastrement idéal

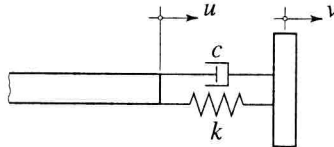
- b) La condition ne concerne que la première dérivée spatiale de la fonction du déplacement. Ce cas correspond à une force imposée, comme par exemple pour une extrémité libre où la force est nulle (figure 15.7).



$$\sigma(x_\ell, t) = E\varepsilon(x_\ell, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} = 0$$

Fig. 15.7 Extrémité libre

- c) La condition lie la fonction du déplacement avec une ou plusieurs de ses dérivées. Dans ce cas, il s'agit d'une condition mixte que l'on trouve typiquement lorsque la force dépend du déplacement, comme c'est le cas pour un encastrement réel représenté par une rigidité, ou de l'accélération lorsqu'une masse est présente.



$$F_{x_\ell}(t) = A\sigma(x_\ell, t) = AE \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_\ell} = -k(u(x_\ell, t) - v) - c \left(\frac{\partial u(x_\ell, t)}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Fig. 15.8 Exemple de condition mixte

Les conditions aux limites ne changent pas la nature de la solution ondulatoire, la solution générale $y(x, t)$ correspond donc toujours à la somme d'une fonction d'onde progressive $f(x - at)$ et d'une fonction d'onde rétrograde $g(x + at)$. Ainsi, pour respecter une condition à la limite x_ℓ , la fonction du déplacement $y(x, t)$ doit satisfaire une équation du type $h\{y(x, t)\}|_{x=x_\ell} = q(t)$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$h\{f(x - at) + g(x + at)\}|_{x=x_\ell} = q(t)$$

Selon cette formulation, pour satisfaire une condition aux limites lorsqu'une onde progressive arrive, il faut lui superposer une onde rétrograde et vice-versa. De manière plus simple on peut dire qu'une frontière réfléchit les ondes. L'onde réfléchie sera d'autant plus différente de l'onde incidente que la condition à la limite sera complexe. Si la condition impose simplement un déplacement ou une force nul, l'onde réfléchie présente la même allure que l'onde incidente.

Pour déterminer les fonctions d'onde f et g sur les intervalles utiles, les conditions initiales et les conditions aux limites sont nécessaires. En effet, les frontières restreignent le domaine de définition des fonctions des conditions initiales, alors que l'évolution de l'onde doit être déterminée pour un temps variant de zéro à l'infini ($t \geq 0$). Seules la ou les conditions aux limites permettent d'étendre la définition des fonctions d'onde de telle manière que le déplacement soit défini pour tout temps t positif.

Prenons l'exemple de la corde semi-infinie fixée à l'origine, en supposant que les conditions initiales sont :

$$y(x, t)|_{t=0} = Y_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)|_{t=0} = V_0(x) = 0 \quad \text{pour } x \geq 0$$

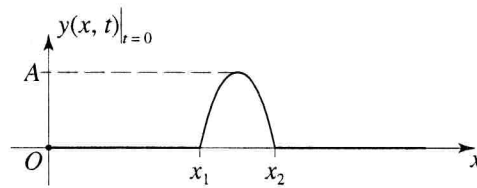


Fig. 15.9 Déformée initiale de la corde semi-infinie

Avec les changements de variables $\lambda = x - at$ et $\mu = x + at$, il est alors possible de définir les fonctions d'onde $f(\lambda)$ et $g(\mu)$ sur l'intervalle $[0 ; \infty[$ à partir des conditions initiales :

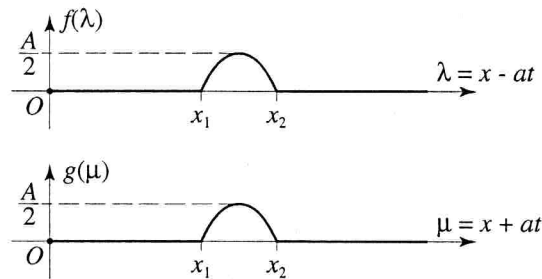


Fig. 15.10 Définition des fonctions d'onde d'après les conditions initiales

La condition aux limites en $x = 0$ est donnée par l'expression $y(0, t) = 0$, en introduisant les fonctions d'onde, on peut écrire cette condition sous la forme :

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0 &\Rightarrow f(\lambda) + g(\mu) = 0 \\ &\Rightarrow f(\lambda) = -g(\mu) \end{aligned}$$

Comme cette condition est posée pour $x = 0$, les deux variable λ et μ valent :

$$\lambda = 0 - at \quad \text{et} \quad \mu = 0 + at = -\lambda$$

finalement, la condition aux limites correspond à l'équation suivante :

$$f(\lambda) = -g(-\lambda)$$

Cette équation rend possible la définition de la fonction $f(\lambda)$ sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$. La solution complète du comportement ondulatoire de la corde est alors obtenu.

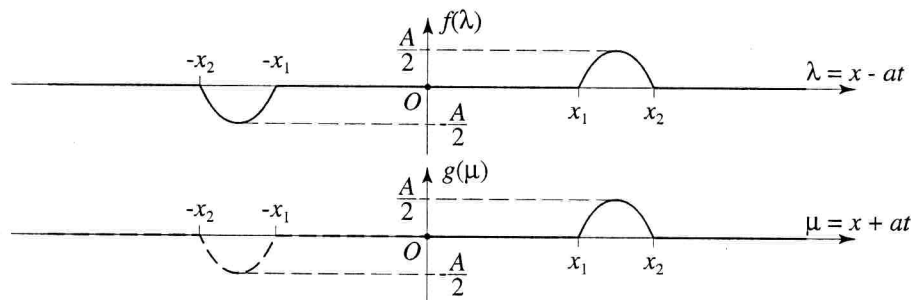


Fig. 15.11 Définition des fonctions d'onde d'après les conditions initiales et celles aux limites

La condition aux limites permet également de déterminer la fonction $g(\mu)$ pour des valeurs de μ inférieures à zéro. Cependant, cette information n'est pas intéressante car elle concernerait une évolution de la corde avant les conditions initiales.

Lorsque la propagation des ondes a lieu dans un corps de dimensions finies, les conditions initiales permettent de ne déterminer les fonctions d'ondes progressive f et rétrograde g que sur un intervalle limité, la variable spatiale x ne pouvant prendre que des valeurs correspondant à l'intérieur du corps. Au moyen des conditions aux limites, il est possible d'étendre la définition des fonctions au-delà de l'intervalle initial en faisant varier le temps. Cette opération doit être réalisée par étape.

Pour illustrer la démarche nécessaire à la définition des fonctions d'ondes, considérons le cas d'une poutre encastree présenté par la figure 15.12

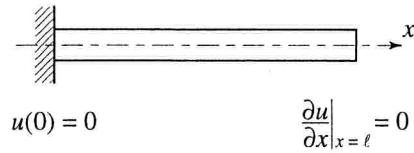


Fig. 15.12 Barre encastrée à son extrémité gauche

Les conditions initiales du système sont données en partie par la fonction du déplacement u indiquée dans le premier graphe de la figure 15.13. Pour simplifier les opérations, la vitesse initiale sera supposée telle que la fonction d'onde progressive s'annule sur l'intervalle $[0 ; \ell]$. Cette hypothèse ne réduit pas la généralité de la démarche, mais permet de n'étudier l'évolution que d'un front au lieu de deux dans le cas général.

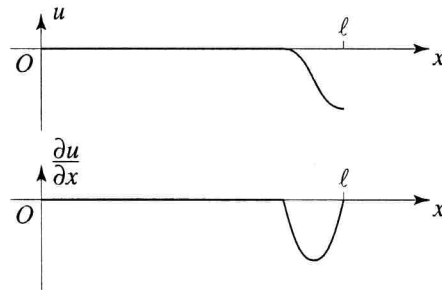


Fig. 15.13 Déplacement initial et sa première dérivée spatiale

Alors les fonctions d'onde $f(\lambda)$ et $g(\mu)$ sont définies d'après les conditions initiales sur l'intervalle selon les graphiques de la figure 15.14.

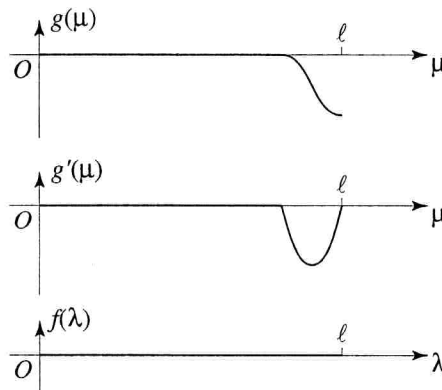


Fig. 15.14 fonctions d'onde et leurs dérivées définies d'après les conditions initiales

La condition aux limites en $x = 0$ donne la relation :

$$\begin{aligned} u(x, t) = 0 &\Rightarrow f(x - at) + g(x + at) = 0 \\ &\Rightarrow f(\lambda) = -g(\mu) \end{aligned}$$

Comme dans ce cas $x = 0$, on a : $\lambda = 0 - at = -at$ et $\mu = 0 + at = at$.

Donc, pour cette condition aux limites $\lambda = -\mu$, l'expression de la condition aux limites devient alors :

$$f(\lambda) = -g(-\lambda) \quad \text{ou} \quad f(-\mu) = -g(\mu)$$

La deuxième égalité permet d'étendre la définition de la fonction f sur l'intervalle $[-\ell ; 0]$, comme le montre la figure suivante :

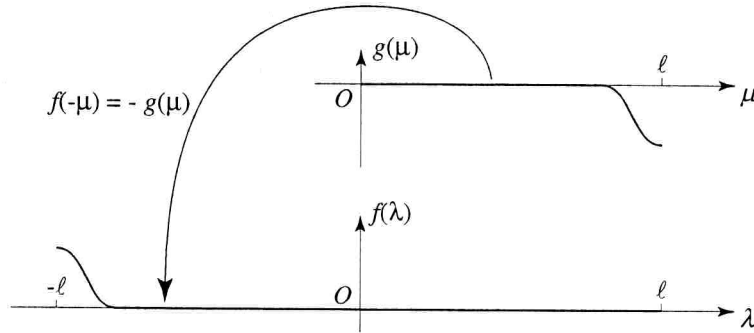


Fig. 15.15 Extension de la définition de la fonction f au moyen de la condition aux limites en $x = 0$.

La condition aux limites en $x = \ell$ est décrite par l'expression :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\ell} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0$$

En introduisant les variables λ et μ , on obtient :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right|_{x=\ell} + \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\lambda) = -g'(\mu)$$

Comme la condition aux limites est définies à la position $x = \ell$, les deux variables λ et μ valent :

$$\lambda = \ell - at \quad \text{et} \quad \mu = \ell + at \quad \Rightarrow \quad at = \ell - \lambda = \mu - \ell$$

d'où : $\mu = 2\ell - \lambda$

Ainsi, la condition aux limites devient :

$$f'(\lambda) = -g'(2\ell - \lambda)$$

Cette équation peut être utilisée pour définir la dérivée $g'(\mu)$ entre ℓ ($= 2\ell - \ell$) et 3ℓ ($= 2\ell + \ell$). Elle permet également d'obtenir les valeurs de la fonction $f(\lambda)$ entre ℓ et 2ℓ , mais ceci n'est pas intéressant car elles correspondent à des temps négatifs.

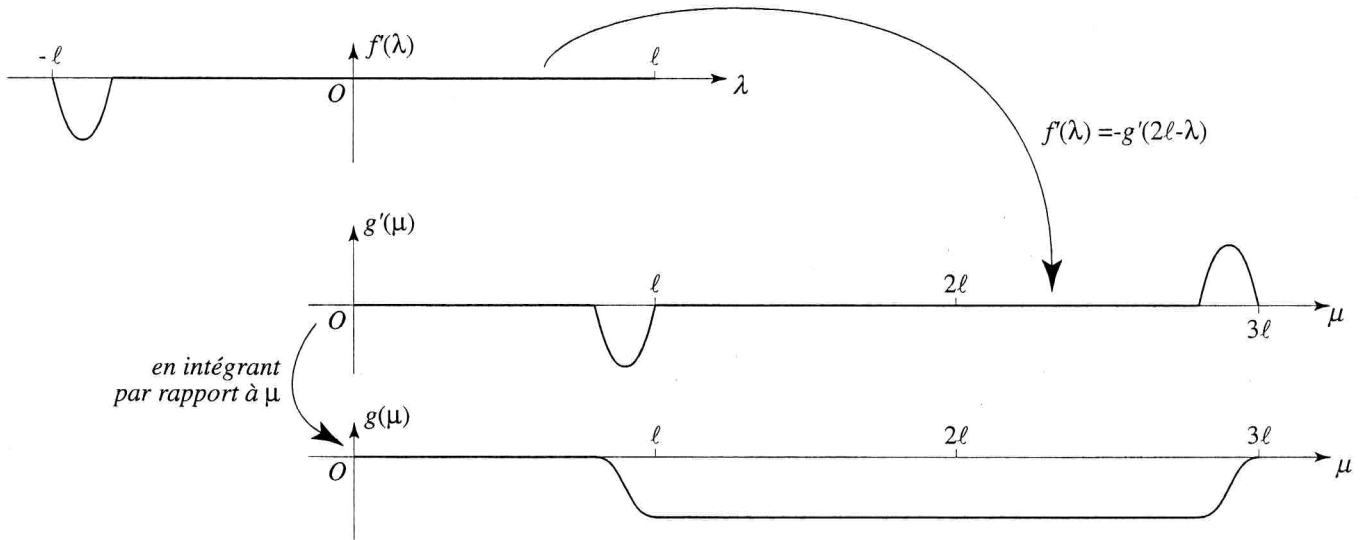


Fig. 15.16 Extension de la définition de la fonction g au moyen de la condition aux limites en $x = \ell$.

En reprenant la condition aux limites en $x = 0$, la définition de la fonction f peut être étendue à l'intervalle compris entre $-\ell$ et -3ℓ .

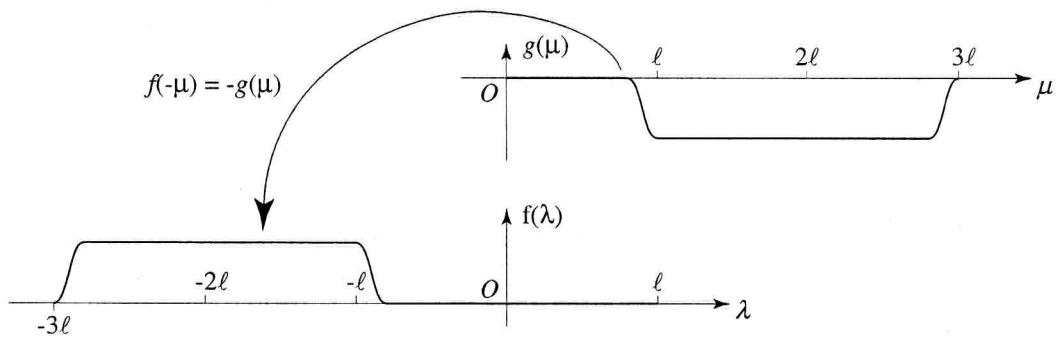


Fig. 15.17 Extension de la définition de la fonction g au moyen de la condition aux limites en $x = \ell$.

En utilisant à nouveau la condition aux limites en $x = \ell$, la fonction g peut être définie sur l'intervalle $[3\ell ; 5\ell]$.

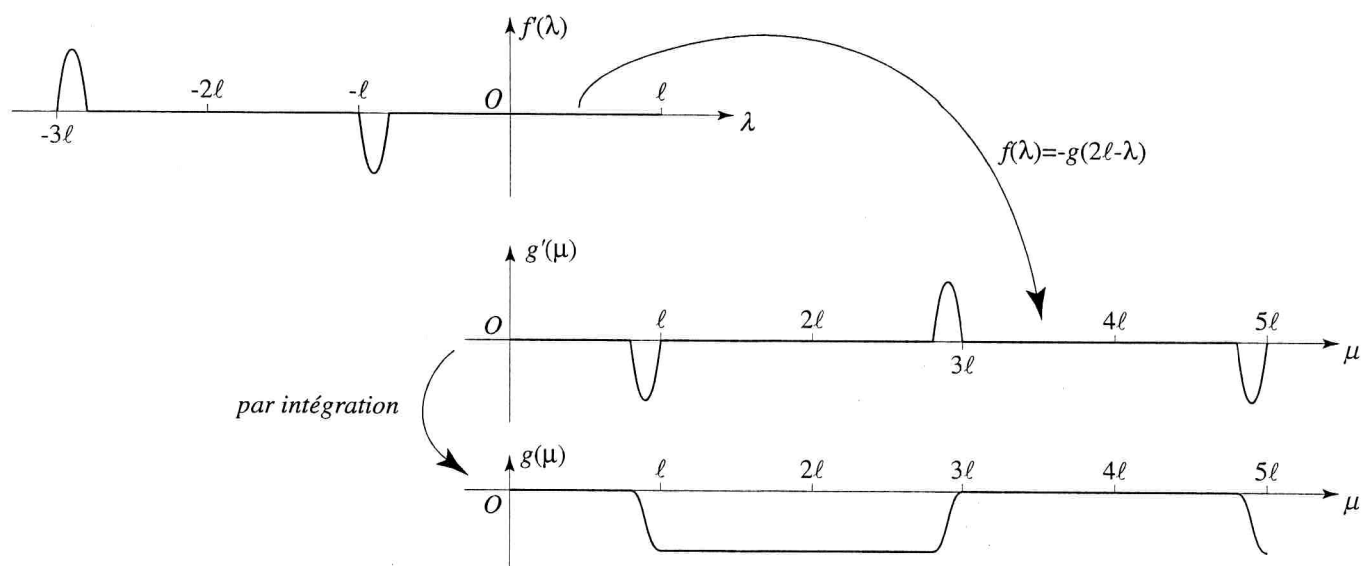


Fig. 15.18 Extension de la définition de la fonction g au moyen de la condition aux limites en $x = \ell$.

Dans ce cas également, il serait théoriquement possible de déterminer la fonction $f(\lambda)$ pour $\lambda \in [\ell; +\infty[$ et la fonction $g(\mu)$ pour $\mu < 0$. Cependant, cette opération n'aurait pas de sens car elle correspondrait à déterminer une évolution possible avant les conditions initiales.

Pour terminer cette présentation des conditions aux limites, il est nécessaire d'exprimer deux remarques :

Premièrement, les conditions aux limites sont généralement des fonctions du temps. Ainsi, à partir des conditions initiales et des conditions aux limites, il est possible de modéliser tous les régimes vibratoires d'un système du deuxième ordre. Toutefois, seuls des cas simples peuvent être résolus analytiquement.

Deuxièmement, si le support dans lequel l'onde se propage est discontinu (à cause de singularité ou d'inhomogénéité), il est nécessaire de définir des sous-domaines continus et homogènes dans lesquels une solution ondulatoire peut être obtenue, puis de décrire la propagation de l'onde d'un sous-domaine dans l'autre au moyen de conditions aux limites.

15.3 SÉPARATION DES VARIABLES

Revenons à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (15.1)$$

et montrons qu'il existe des solutions à "variables séparées" de la forme

$$y(x, t) = V(x) \cdot U(t) \quad (15.20)$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dx^2} U = V'' U \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V \frac{d^2 U}{dt^2} = V \ddot{U}$$

La substitution dans (15.1) donne

$$\frac{\ddot{U}}{U} = a^2 \frac{V''}{V} \quad (15.21)$$

Le premier membre de cette relation est une fonction de la variable indépendante t alors que le second membre ne dépend que de la variable indépendante x . Ceci n'est possible que si les deux membres sont égaux à une constante que nous désignerons $-\omega_n^2$. Pour une raison physique qui apparaît clairement en intégrant, cette constante est nécessairement négative, faute de quoi les amplitudes du mouvement s'accroîtraient indéfiniment, ce qui est impossible car le système ne reçoit pas d'énergie de l'extérieur : il conserve l'énergie déterminée par les conditions initiales. D'autre part, l'indice n est un nombre entier positif qui fixe l'ordre des solutions particulières comme nous le verrons en traitant quelques exemples.

On peut maintenant intégrer (15.21). Par rapport au temps on a d'abord

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{U} + \omega_n^2 U = 0$$

D'où la solution

$$U_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (15.22)$$

On intègre ensuite par rapport à x

$$a^2 \frac{V''}{V} = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad V'' + \frac{\omega_n^2}{a^2} V = 0$$

En adoptant l'écriture

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad (15.23)$$

il vient

$$V_n(x) = C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x \quad (15.24)$$

Le produit de $U_n(t)$ et $V_n(t)$ donne, d'après (15.20), une solution particulière de l'équation (15.21).

$$y_n(x, t) = (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.25)$$

La solution générale est obtenue par sommation des solutions particulières

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.26)$$

avec $\alpha_n = \frac{\omega_n}{a}$

Ce résultat demande quelques commentaires :

- La séparation des variables convient bien à la recherche des solutions stationnaires correspondant à des conditions aux limites déterminées.
- La relation (15.26) ci-dessus correspond à toutes les solutions possibles de (15.21), mais pas à toutes celles de l'équation de d'Alembert (15.1) dont la vraie solution générale reste (15.15).
- Les solutions du type (15.26) étant un sous-ensemble de (15.15), elles possèdent également une nature ondulatoire. Il n'est pas facile, le plus souvent, de savoir exactement de quelles ondes il s'agit.

- Les constantes d'intégration apparaissant dans la relation (15.26) sont en surnombre. En effet, trois constantes suffisent pour chaque solution particulière car on peut écrire

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n A_n) \left(\cos \alpha_n x + \frac{D_n}{C_n} \sin \alpha_n x \right) \left(\cos \omega_n t + \frac{B_n}{A_n} \sin \omega_n t \right)$$

puis, au moyen d'une transformation déjà souvent utilisée

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\alpha_n x - \psi_n) \cdot \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (15.27)$$

Sous cette forme, il ne reste à déterminer qu'une amplitude Y_n et deux déphasages ψ_n , ϕ_n . En pratique, la forme (15.26) est plus commode pour les calculs intermédiaires alors que (15.27) apparaît comme plus élégante pour exprimer le résultat final.

Lors de la résolution par séparation des variables de l'équation de d'Alembert, trois constantes d'intégration indépendantes apparaissent, ainsi que deux pulsations, l'une temporelle ω_n et l'autre spatiale α_n . Pour déterminer ces cinq termes, on dispose de cinq équations : les deux conditions initiales, les deux conditions aux limites et enfin la relation entre les deux pulsations $\omega_n = a \alpha_n$ (15.23), obtenue à partir de l'équation différentielle (15.21).

Les conditions initiales sont peu utilisées en pratique. Elles permettent de déterminer l'amplitude générale et la phase du mouvement en régime libre et ces données ne sont intéressantes que dans quelques cas particuliers. Il faut encore ajouter que les conditions initiales sont difficiles à connaître de manière précise. En revanche, les conditions aux limites jouent un rôle capital, en particulier, la partie indépendante du temps sert à définir le système. C'est-à-dire qu'elle permet de fixer les caractéristiques principales de son comportement statique et dynamique. La partie variant au cours du temps représente l'excitation à l'origine du régime forcé.

Les conditions aux limites imposées à la solution dynamique obtenue par la séparation des variables doivent être homogènes car la forme de cette solution, de type (15.25) ou (15.27), s'annule périodiquement. La partie non homogène des conditions aux limites est satisfaite par une déformée statique que l'on superpose à la solution vibratoire. Ainsi, l'application des conditions aux limites à la fonction spatiales mène à un système homogène qui soit possède une solution triviale correspondant à un système immobile, soit possède une matrice singulière. La condition pour que la matrice du système soit singulière est que son déterminant soit nul. Cette équation, appelée équation caractéristique ou équation de fréquence permet de déterminer les pulsations temporelles pour lesquelles le système admet des solutions non triviales. Comme la matrice du système est singulière, les solutions sont obtenues à une constante près, qui, comme cela a été signalé plus haut, sera déterminée par les conditions initiales.

15.3.1 Corde vibrante

Comme premier exemple, cherchons le régime libre d'une corde vibrante de longueur ℓ (figure 15.19). A ses extrémités, le déplacement est toujours nul. Il vient donc, en utilisant (15.26) :

$$y(0, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad C_n \cos(0) + D_n \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n = 0$$

$$y(\ell, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D_n \sin \alpha_n \ell = 0$$

La solution $D_n = 0$ est une solution triviale correspondant au système immobile ; elle n'est pas intéressante. La solution cherchée est donc donnée par l'équation trigonométrique :

$$\sin \alpha_n \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \ell = n\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

D'autre part, d'après (15.23)

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \alpha_n a \quad \text{avec } a = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

Pour la solution particulière d'ordre 1, appelée "vibration fondamentale", ou simplement "fondamentale", on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{\ell} \\ \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \end{cases} \quad (15.28)$$

Les autres solutions particulières sont appelées "harmoniques". Finalement, la solution générale peut s'écrire, avec $D_n = 1$, ce qui ne change rien à la généralité du résultat:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \alpha_1 x (A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t) \quad (15.29)$$

ou encore

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin n \alpha_1 x \cdot \cos(n \omega_1 t - \phi_n) \quad (15.30)$$

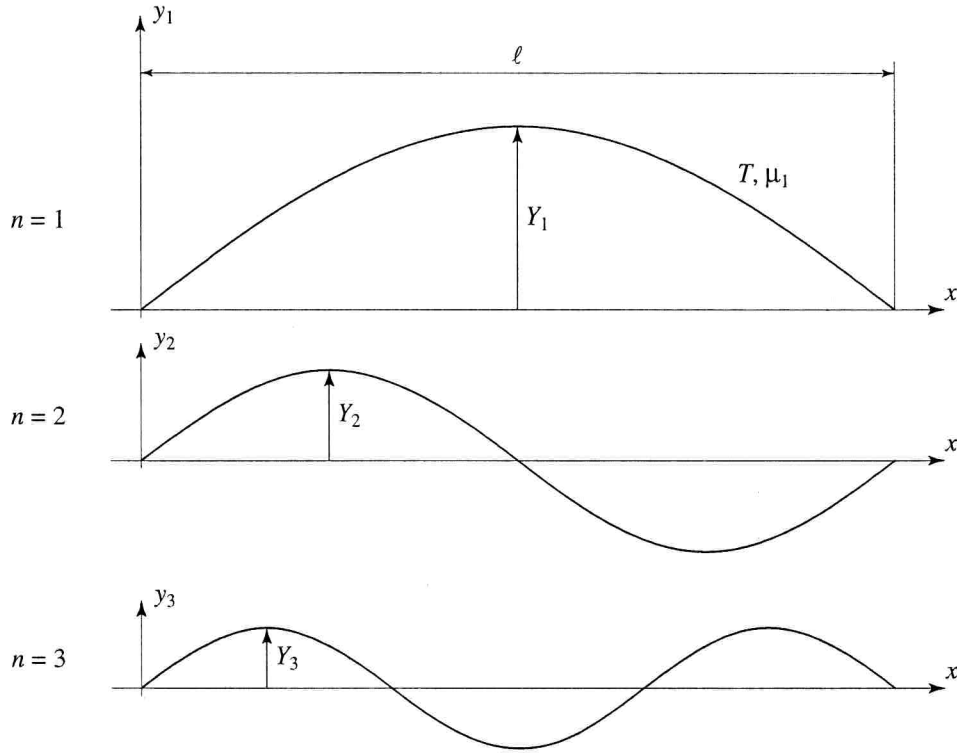


Fig. 15.19 Formes propres $y_n(x)$ des vibrations d'une corde tendue $\left(a^2 = \frac{T}{\mu_1}\right)$

$n = 1$	Fondamentale	$\alpha_1 \ell = \pi$	$\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}$	$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$
$n = 2$	2 ^{ème} harmonique	$\alpha_2 \ell = 2\pi$	$\alpha_2 = 2\alpha_1$	$\omega_2 = 2\omega_1$
$n = 3$	3 ^{ème} harmonique	$\alpha_3 \ell = 3\pi$	$\alpha_3 = 3\alpha_1$	$\omega_3 = 3\omega_1$

Les deux relations précédentes correspondent à toutes les vibrations stationnaires possibles de la corde. Les constantes A_n et B_n , ou Y_n et ϕ_n , sont à déterminer à partir de la déformée initiale $y_0(x)$ et de la vitesse initiale $v_0(x)$. (la méthode sera exposée dans l'exemple suivant, concernant les vibrations d'un barreau).

Par analogie avec les systèmes discrets, on peut désigner sous le nom de "modes propres" les solutions particulières $y_n(x, t)$ et de "formes propres" les configurations statiques correspondantes, obtenues quand $\cos(n \omega_1 t - \phi_n) = 1$. Ainsi, la solution générale est la superposition d'une infinité de modes propres dont la fréquence est proportionnelle à l'ordre (par exemple, la fréquence du 5^{ème} mode est 5 fois plus grande que celle de la fondamentale). Il s'agit là d'une caractéristique essentielle des systèmes continus conservatifs du deuxième ordre.

15.3.2 Barre avec extrémités libres

Nous avons appelé $u(x, t)$ le déplacement longitudinal d'une section d'une barre soumise à des vibrations longitudinales, vibrations régies par l'équation de d'Alembert (15.9). Par analogie avec l'exemple précédent, on peut écrire directement la solution générale :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \alpha_n x + D_n \sin \alpha_n x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (15.31)$$

Aux extrémités supposées libres (figure 15.20 a), la contrainte et donc l'allongement relatif sont nuls. On a successivement :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (-C_n \sin \alpha_n x + D_n \cos \alpha_n x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

$$\varepsilon(0, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D_n = 0$$

$$\varepsilon(\ell, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \ell = n \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \frac{n \pi}{\ell}$$

Ensuite, par (15.23)

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{a} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = a \alpha_n \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Pour la fondamentale, on a

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{\ell} \\ \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \quad (15.32)$$

Finalement, avec $C_n = 1$, le régime libre d'une barre avec extrémités libres prend l'une ou l'autre des formes équivalentes suivantes

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \alpha_1 x \cdot (A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t) \quad (15.33)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos n \alpha_1 x \cdot \cos(n \omega_1 t - \phi_n) \quad (15.34)$$

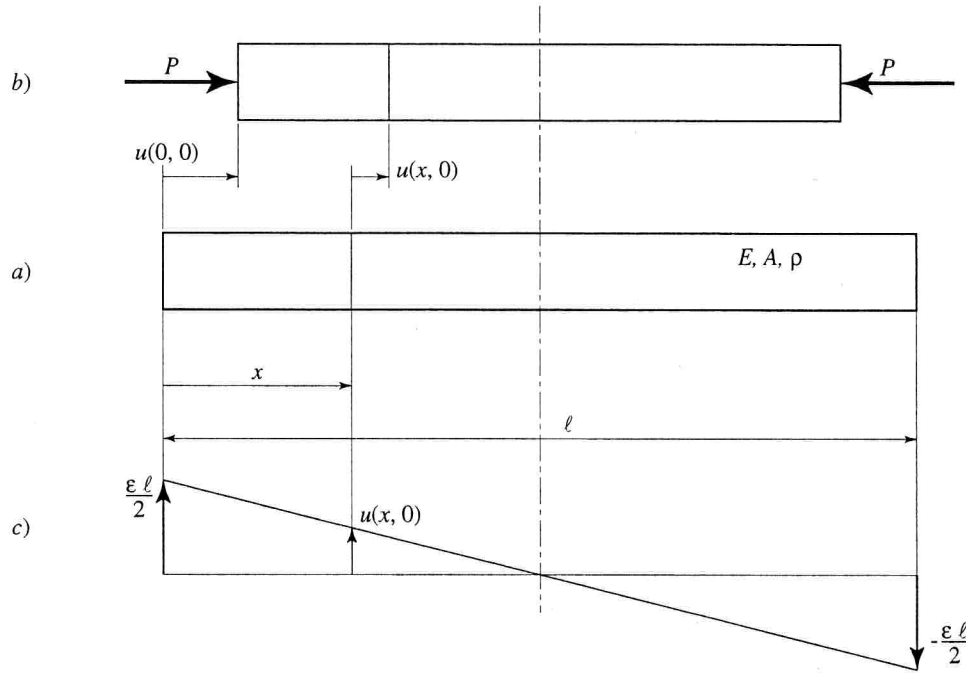


Fig. 15.20 a) Barre avec extrémités libres
 b) Compression initiale
 c) Déplacements initiaux

La figure 15.21 représente les trois premières formes propres correspondant à la relation (15.34). On peut la comparer avec la figure 15.19, concernant le régime libre d'une corde tendue : le rôle des sinus et cosinus se trouve inversé. Si l'on avait représenté la contrainte $\sigma = E \varepsilon$ dans la barre au lieu du déplacement, les deux figures seraient identiques.

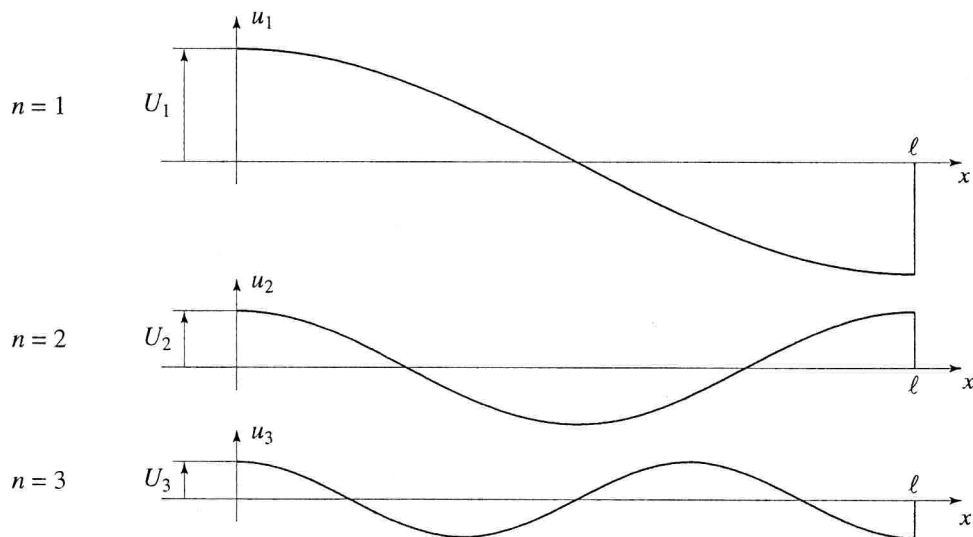


Fig. 15.21 Formes propres $u_n(x)$ des vibrations d'une barre avec extrémités libres $\left(a^2 = \frac{E}{\rho}\right)$

Nous allons maintenant calculer les constantes d'intégration A_n et B_n de la relation (15.33) en fonction du déplacement initial $u_0(x)$ et de la vitesse initiale $v_0(x)$. On a d'abord

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x, 0) = v_0(x)$$

Introduites dans (15.33) et sa dérivée par rapport au temps, ces conditions donnent

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \alpha_1 x \qquad \left(\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell} \right) \qquad (15.35)$$

$$v_0(x) = \omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos n \alpha_1 x \qquad \left(\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right) \qquad (15.36)$$

Pour calculer les coefficients A_n , multiplions les deux membres de la première relation par $\cos m \alpha_1 x$ puis intégrons de 0 à ℓ

$$\int_0^{\ell} u_0(x) \cos m \alpha_1 x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\ell} \cos n \alpha_1 x \cdot \cos m \alpha_1 x \, dx$$

On sait que l'intégrale du second membre est nulle si $m \neq n$ alors qu'elle est égale à $\ell/2$ si $m = n$ ¹. Il vient par conséquent

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \cos n \alpha_1 x \, dx \qquad (15.37)$$

On trouve de même

$$B_n = \frac{2}{n \pi a} \int_0^{\ell} v_0(x) \cos n \alpha_1 x \, dx \qquad (15.38)$$

¹En effet, le calcul de la primitive donne :

$$\int^x \cos nu \cdot \cos mu \, du = \frac{1}{2} \left\{ \int^x \cos[(n-m)u] \, du + \int^x \cos[(n+m)u] \, du \right\}$$

Le résultat est alors :

$$\int^x \cos nu \cdot \cos mu \, du = \frac{\sin[(n-m)x]}{2(n-m)} + \frac{\sin[(n+m)x]}{2(n+m)} \qquad \text{si } m \neq n \text{ et } m \neq -n$$

$$\int^x \cos nu \cdot \cos mu \, du = \frac{x}{2} + \frac{\sin[(n+m)x]}{2(n+m)} \qquad \text{si } m = n \text{ ou } m = -n$$

A titre d'exemple, considérons une barre comprimée à ses deux extrémités pour laquelle la force de compression est supprimée brusquement pour $t = 0$ (figure 15.20 b). Le raccourcissement relatif initial étant

$$\varepsilon = \frac{P}{EA}$$

le déplacement initial a pour valeur en fonction de x (figure 15.20 c) :

$$u_0(x) = \varepsilon \left(\frac{\ell}{2} - x \right)$$

En raison de la symétrie (symétrie qu'il ne serait pas facile de réaliser expérimentalement en ce qui concerne la suppression parfaitement simultanée des deux forces P), la section médiane ne se déplace pas et les vitesses initiales de toutes les sections sont nulles.

$$v(x, 0) = v_0(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = 0 \quad \text{d'après (15.38)}$$

Dans le cas particulier, la relation (15.37) devient

$$A_n = \frac{2\varepsilon}{\ell} \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \cos n \alpha_1 x \, dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_n = \frac{4\varepsilon\ell}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ A_n = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

La solution générale (15.33) est maintenant entièrement connue :

$$u(x, t) = \frac{4\varepsilon\ell}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n \alpha_1 x \cdot \cos n \omega_1 t \quad (15.39)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Comme on devait s'y attendre, $u(x, t)$ est symétrique par rapport à la section médiane de la barre.

15.3.3 Barre encastrée à une extrémité

L'équation des ondes en régime libre d'une barre encastrée à une extrémité (figure 15.22), peut être déduite de l'équation précédente concernant une barre avec deux extrémités libres.

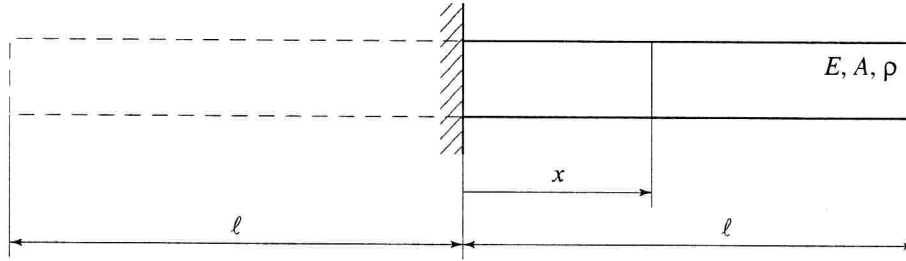


Fig. 15.22 Barre encastrée à une extrémité

Il suffit pour cela de ne conserver dans (15.33) ou (15.34) que les termes symétriques par rapport au milieu de la barre, soit les termes impairs $n = 1, 3, 5, \dots$, de remplacer ℓ par 2ℓ et de déplacer l'origine des x , ce qui remplace les termes en cosinus par des termes en sinus. On a donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{2\ell} \\ \omega_1 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \quad (15.40)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin n \alpha_1 x \cdot (A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t) \quad (15.41)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} U_n \sin n \alpha_1 x \cdot \cos(n \omega_1 t - \phi_n) \quad (15.42)$$

15.4 COORDONNÉES NORMALES

Dans le double but de préciser l'analogie entre les systèmes continus et les systèmes discrets et de faciliter l'étude des régimes forcés, introduisons la notion de "coordonnées normales". Nous ne chercherons pas à établir une théorie générale, mais nous nous limiterons au cas particulier des vibrations d'une barre avec une extrémité encastree (figure 15.22).

Revenons à la relation (15.41) en l'écrivant comme suit

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin n \alpha_1 x \cdot q_n(t) \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2\ell} \quad (15.43)$$

Ceci revient à supposer que les fonctions du temps $q_n(t)$ ne sont pas encore connues.

L'énergie potentielle du système est de nature élastique. Elle peut être calculée en intégrant la densité d'énergie $\sigma^2/2E$ dans le volume de la barre

$$V = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \sigma^2 A \, dx$$

Comme

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \alpha_1 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n \cos n \alpha_1 x \cdot q_n$$

il vient

$$V = \frac{1}{2} E A \alpha_1^2 \int_0^{\ell} \left\{ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n q_n \cos n \alpha_1 x \right\}^2 dx$$

ou encore, en remplaçant le carré de la somme par une double somme et en ne gardant que les fonctions de x sous le signe intégrale

$$V = \frac{1}{2} E A \alpha_1^2 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} n m q_n q_m \int_0^{\ell} \cos n \alpha_1 x \cdot \cos m \alpha_1 x \, dx$$

On sait que l'intégrale est nulle si $m \neq n$ et qu'elle vaut $\ell/2$ si $m = n$. Il reste donc, en remplaçant α_1 par sa valeur

$$V = \frac{\pi^2 EA}{16\ell} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 q_n^2 \quad (15.44)$$

Il faut ensuite calculer l'énergie cinétique

$$T = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{\rho A}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

mais, d'après (15.43)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin n \alpha_1 x \cdot \dot{q}_n \quad , d'où$$

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^{\ell} \left\{ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \dot{q}_n \sin n \alpha_1 x \right\}^2 dx$$

L'intégrale a la même nature que pour V , on a donc

$$T = \frac{\rho A \ell}{4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \dot{q}_n^2 \quad (15.45)$$

Les équations de Lagrange d'un système conservatif

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donnent, dans le cas particulier

$$\begin{aligned} \frac{\rho A \ell}{2} \ddot{q}_n + \frac{\pi^2 EA}{8\ell} n^2 q_n &= 0 \quad , \text{ soit} \\ \ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n &= 0 \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (15.46)$$

avec

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 E}{4 \ell^2 \rho} \Rightarrow \omega_n = n \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On avait défini la pulsation fondamentale (relation 15.37)

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = n \omega_1$$

Après intégration, on retrouve les fonctions du temps intervenant dans la solution générale (15.41)

$$q_n(t) = A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t$$

Il est important de constater que dans l'équation différentielle (15.46) ci-dessus, les coordonnées $q_n(t)$ apparaissent séparément, comme c'était le cas dans les systèmes discrets linéaires (Chapitre 11).

15.5 VIBRATIONS FORCÉES

Toujours en nous limitant au cas d'une barre encastrée à une extrémité, nous allons montrer comment peut être abordé le calcul des vibrations forcées provoquées par une force extérieure $P(t)$ appliquée à l'extrémité libre (figure 15.23).

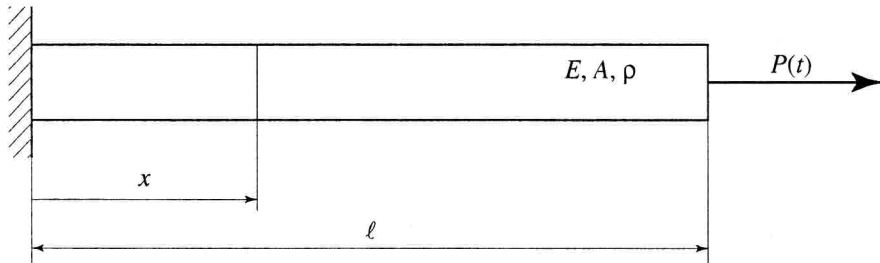


Fig. 15.23 Action d'une force extérieure $P(t)$ sur une barre encastrée à une extrémité

En désignant par $F_n(t)$ la force généralisée relative à la coordonnée $q_n(t)$, les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = F_n$$

On obtient, en utilisant (15.44) et (15.45)

$$\frac{\rho A \ell}{2} \ddot{q}_n + \frac{\pi^2 E A}{8 \ell} n^2 q_n = F_n$$

soit encore, en faisant apparaître la pulsation fondamentale ω_1

$$\ddot{q}_n + (n \omega_1)^2 q_n = \frac{2}{\rho A \ell} F_n \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15.47)$$

On est ainsi ramené au calcul du régime forcé d'oscillateurs élémentaires, non amortis, et de pulsation propre $\omega_0 = n \omega_1$. Les résultats établis au chapitre 6 (livre de mécanique vibratoire) sont ainsi utilisables. Par analogie avec la relation (6.13) et en utilisant la variable auxiliaire τ au lieu de u , pour éviter toute confusion avec le déplacement $u(x, t)$, le régime forcé peut s'écrire

$$q_n = [A_n \cos n \omega_1 t + B_n \sin n \omega_1 t] + \frac{2}{\rho A \ell n \omega_1} \int_0^t F_n(\tau) \sin n \omega_1 (t - \tau) d\tau \quad (15.48)$$

La fonction entre crochets est le régime libre, déterminé, comme on l'a vu précédemment, par le déplacement initial $u_0(x)$ et la vitesse initiale $v_0(x)$.

La force $F_n(t)$ est obtenue comme suit : on donne à la coordonnée $q_n(t)$ un accroissement δq_n qui entraîne lui-même un accroissement δu du déplacement. Ce dernier peut être calculé au moyen de la relation (15.43)

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} q_n(t) \sin n \alpha_1 x \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2\ell}$$

On obtient donc

$$\delta u = \delta q_n \sin n \alpha_1 x \quad (15.49)$$

On calcule ensuite le travail $\delta \tau$ des forces extérieures provoqué par δq_n . Il est égal à celui fourni par la force F_n

$$\delta \tau = F_n \delta q_n \quad (15.50)$$

Revenons maintenant à l'exemple de la figure 15.23 : une force extérieure $P(t)$ est appliquée à l'extrémité libre. A cette extrémité $x = \ell$ et la relation (15.49) devient

$$\delta u(\ell) = \delta q_n \sin n \alpha_1 \ell = \delta q_n \sin \frac{n\pi}{2}$$

Le travail entraîné par ce déplacement est ainsi

$$\delta\tau = P \delta u(\ell) = P \delta q_n \sin \frac{n\pi}{2}$$

d'où, d'après (15.50)

$$F_n = \frac{\delta\tau}{\delta q_n} = P \sin \frac{n\pi}{2}$$

En laissant de côté l'influence des conditions initiales, la relation (15.48) devient

$$q_n = \frac{2}{\rho A \ell n \omega_1} \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^t P(t) \sin n \omega_1 (t - \tau) d\tau \quad (15.51)$$

Le déplacement $u(x, t)$ peut être obtenu par la sommation de la relation (15.43). En se limitant au déplacement $u(\ell, t)$ de l'extrémité libre, il vient

$$u(\ell, t) = \frac{2}{\rho A \ell \omega_1} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \int_0^t P(t) \sin n \omega_1 (t - \tau) d\tau$$

L'indice n ne peut prendre que des valeurs impaires ($n = 1, 3, 5, \dots$), d'où

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 1$$

En remplaçant ω_1 par sa valeur

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{2\ell} a$$

on obtient finalement

$$u(\ell, t) = \frac{4}{\pi \rho A a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t P(t) \sin n \omega_1 (t - \tau) d\tau \quad (15.52)$$

VIBRATIONS DE FLEXION DES POUTRES DROITES

Les systèmes mécaniques soumis à la flexion ont un comportement vibratoire régi par des équations aux dérivées partielles qui sont du deuxième ordre relativement au temps, comme précédemment, mais du quatrième ordre relativement aux variables géométriques. Il en résulte de grandes difficultés sur le plan mathématique. Seuls des cas particuliers correspondant à des conditions aux limites très simples ont reçu jusqu'à maintenant – et la situation n'évolue guère – des solutions analytiques satisfaisantes. Comme nous l'avons déjà dit, les méthodes numériques actuellement disponibles, en particulier celle des éléments finis, permettent de résoudre, après discrétisation, la plupart des problèmes de la pratique. En effet, presque toujours, les plus basses fréquences jouent un rôle déterminant.

Dans les chapitres 16 et 17, nous nous limiterons à l'exposé de quelques aspects élémentaires de la théorie relative aux poutres droites. Ils devraient suffire à une compréhension satisfaisante des vibrations de flexion.

16.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SYSTÈME CONSERVATIF

Considérons une poutre droite, vibrant latéralement dans un plan xy (figure 16.1). On suppose que la direction y coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie de la section, faute de quoi les vibrations ne pourraient être coplanaires.

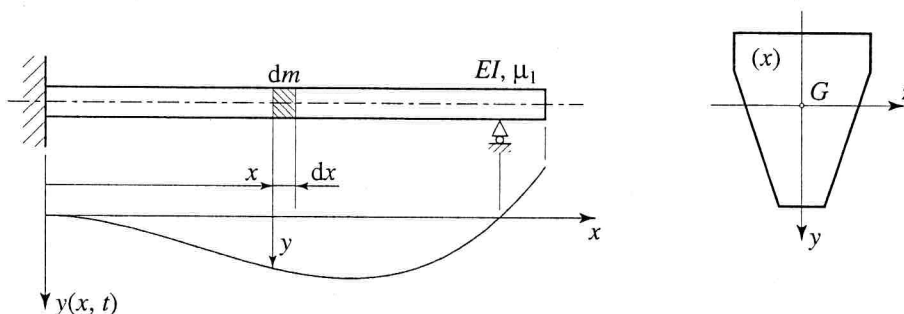


Fig. 16.1 Vibrations latérales et coplanaires d'une poutre droite.

Isolons un élément infinitésimal de la poutre de longueur dx . Celui-ci est alors représenté par la figure :

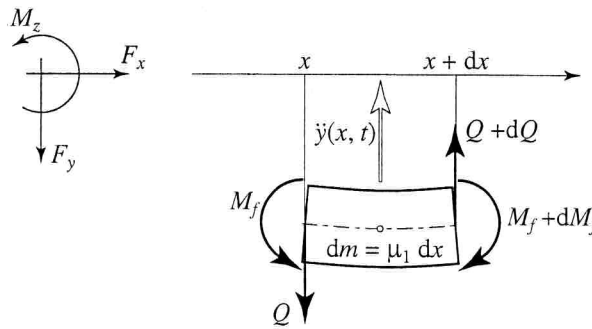


Fig. 16.2 Élément infinitésimal de poutre soumis aux différents efforts.

Pour simplifier, l'inertie en rotation des sections de la poutre est supposée négligeable. Ainsi, seul le déplacement vertical (selon l'axe y) est considéré. L'équation de Newton pour l'élément infinitésimal de poutre de longueur dx s'écrit alors :

$$\sum F_y = dm \ddot{y} = -(Q + dQ) + Q = -dQ = -\frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

Si l'inertie en rotation de la tranche élémentaire est négligée, l'équilibre des moments par rapport au centre de la section x est exprimé par l'équation :

$$\begin{aligned} \sum M_z &= -(M_f + dM_f) + M_f + (Q + dQ)dx \cong 0 \\ \Rightarrow -\frac{\partial M_f}{\partial x} dx + Q dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx^2 &\cong 0 \end{aligned}$$

Après élimination du terme du second ordre et simplification par dx , la relation entre l'effort tranchant et le moment de flexion est obtenue :

$$Q = \frac{\partial M_f}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2}$$

L'équation de Newton de l'élément de poutre devient alors :

$$\begin{aligned} \mu_1 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} dx = -\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} dx \\ \Rightarrow \mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{16.1}$$

Par ailleurs, si l'effet de l'effort tranchant sur la déformée est supposé négligeable, la théorie de la résistance des matériaux donne l'équation différentielle suivante :

$$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_f}{EI}$$

Dans cette expression, E et I sont respectivement le module d'élasticité et le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe transversal horizontal de la section de la poutre.

Après dérivations, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

En substituant la dérivée seconde du moment dans l'expression (16.1) par la valeur obtenue ci-dessus, on obtient l'équation différentielle régissant les vibrations latérales d'une poutre de section constante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\mu_1} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (16.2)$$

Cette équation n'a plus la forme de celle de d'Alembert. En effet, la dérivée de la fonction du déplacement $y(x, t)$ par rapport à la variable spatiale x n'est plus du deuxième ordre, mais du quatrième. La solution n'est donc plus de nature ondulatoire et devient beaucoup plus difficile à obtenir. En pratique, les seules solutions cherchées sont celles obtenues par séparations des variables.

16.2 SÉPARATION DES VARIABLES

Comme lors du chapitre précédent, on cherche des solutions de l'équation différentielle (16.2) qui sont le produit d'une fonction de x et d'une fonction du temps

$$y(x, t) = V(x) \cdot U(t) \quad (16.3)$$

Les dérivées partielles deviennent dans ce cas

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{d^4 V}{dx^4} U = V^{IV} U \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 U}{dt^2} V = \ddot{U} V$$

Par introduction dans (16.2) on trouve, comme au chapitre précédent, qu'une fonction du temps est identique à une fonction de x . Ceci implique que ces fonctions sont égales à une constante qui est, pour des raisons physiques, négative. Cette constante peut prendre des valeurs différentes, repérées par un indice n .

$$\frac{\ddot{U}}{U} = -\frac{EI}{\mu_1} \frac{V^{IV}}{V} = -\omega_n^2 \quad (16.4)$$

On intègre d'abord par rapport au temps

$$\ddot{U} + \omega_n^2 U = 0$$

d'où

$$U_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (16.5)$$

L'équation différentielle relative à x s'écrit

$$V^{IV} - \omega_n^2 \frac{\mu_1}{EI} V = 0$$

On définit la constante, essentiellement positive

$$\alpha_n^4 = \omega_n^2 \frac{\mu_1}{EI} \quad (16.6)$$

et l'équation devient

$$V^{IV} - \alpha_n^4 V = 0$$

En cherchant des solutions exponentielles $V = e^{rx}$, on obtient l'équation caractéristique

$$r^4 - \alpha_n^4 = 0$$

Elle a pour racines α_n , $-\alpha_n$, $j\alpha_n$, $-j\alpha_n$, d'où par combinaison linéaire

$$V_n = C_{n1} e^{\alpha_n x} + C_{n2} e^{-\alpha_n x} + C_{n3} \cos \alpha_n x + C_{n4} \sin \alpha_n x \quad (16.7)$$

Le produit de (16.5) par (16.7) donne la solution particulière d'ordre n

$$y_n(x, t) = U_n(t) \cdot V_n(x)$$

On obtient finalement la solution générale de (16.2) par sommation sur l'indice n

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) (C_{n1} e^{\alpha_n x} + C_{n2} e^{-\alpha_n x} + C_{n3} \cos \alpha_n x + C_{n4} \sin \alpha_n x) \quad (16.8)$$

Cette relation comprend 6 constantes d'intégration, alors que 5 suffisent. On peut donc adopter, h_{n1} et h_{n2} étant deux grandeurs sans dimensions, l'écriture simplifiée suivante :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(\omega_n t - \phi_n) [\cos(\alpha_n x - \psi_n) + h_{n1} e^{\alpha_n x} + h_{n2} e^{-\alpha_n x}] \quad (16.9)$$

Les constantes $C_{n1}, \dots, C_{n4}$ de la relation (16.8) sont à déterminer par les conditions aux limites dont la figure 16.3 représente 4 exemples usuels, à savoir

a) Appui simple

$$\begin{aligned} \text{Le déplacement est empêché : } & y = 0 \\ \text{Le moment de flexion est nul : } & M = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \end{aligned}$$

b) Extrémité libre

$$\begin{aligned} \text{Le moment de flexion est nul : } & M = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \\ \text{L'effort tranchant est nul : } & T = 0 \quad \Rightarrow \quad y''' = 0 \end{aligned}$$

c) Encastrement parfait

$$\begin{aligned} \text{Le déplacement est empêché : } & y = 0 \\ \text{la rotation est bloquée : } & y' = 0 \end{aligned}$$

d) Encastrement partiel élastique

$$\begin{aligned} \text{Le déplacement est empêché : } & y = 0 \\ \text{Il apparaît un moment de rappel} \\ \text{proportionnel à la rotation : } & M = -k y' \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{k}{EI} y' \end{aligned}$$

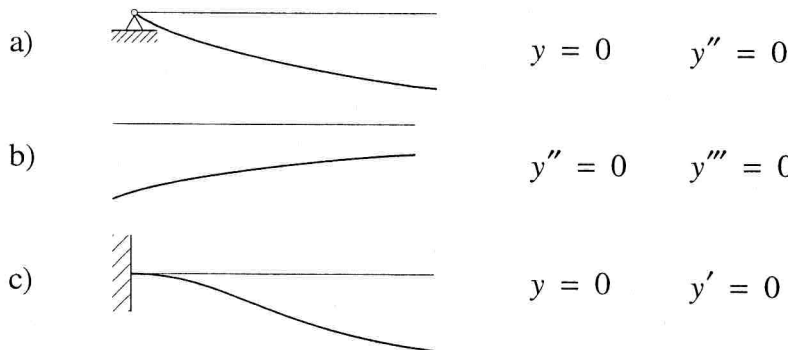




Fig. 16.3 Conditions aux limites usuelles pour les vibrations coplanaires d'une poutre

16.2.1 Poutre sur deux appuis

A titre d'exemple, nous allons établir le régime libre d'une poutre sur deux appuis simples. Revenons à l'équation (16.8) en l'écrivant comme suit

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \cdot \cos(\omega_n t - \phi_n)$$

Aux deux extrémités, les conditions aux limites sont celles du type a) de la figure précédente, soit

$$x = 0 \quad \begin{cases} y(0, t) \equiv 0 & \Rightarrow V_n(0) = 0 \\ y''(0, t) \equiv 0 & \Rightarrow V_n''(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = \ell \quad \begin{cases} y(\ell, t) \equiv 0 & \Rightarrow V_n(\ell) = 0 \\ y''(\ell, t) \equiv 0 & \Rightarrow V_n''(\ell) = 0 \end{cases}$$

En supprimant momentanément l'indice n pour simplifier l'écriture, $V(x)$ et sa deuxième dérivée deviennent

$$V = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

$$V'' = \alpha^2 [C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} - C_3 \cos \alpha x - C_4 \sin \alpha x]$$

D'où les conditions

$$x = 0 \quad \begin{cases} V = 0 & \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 + C_3 & (1) \\ V'' = 0 & \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 - C_3 & (2) \end{cases}$$

$$x = \ell \quad \begin{cases} V = 0 & \Rightarrow 0 = C_1 e^{\alpha \ell} + C_2 e^{-\alpha \ell} + C_3 \cos \alpha \ell + C_4 \sin \alpha \ell & (3) \\ V'' = 0 & \Rightarrow 0 = C_1 e^{\alpha \ell} + C_2 e^{-\alpha \ell} - C_3 \cos \alpha \ell - C_4 \sin \alpha \ell & (4) \end{cases}$$

En effectuant la différence des équations (1) et (2), on trouve immédiatement

$$C_3 = 0 \quad \text{et} \quad C_1 = -C_2$$

Les équations (3) et (4) deviennent ainsi

$$(3)' \quad 0 = C_1(e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}) + C_4 \sin \alpha\ell$$

$$(4)' \quad 0 = C_1(e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}) - C_4 \sin \alpha\ell$$

La somme puis la différence des relations ci-dessus donnent

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_4 \sin \alpha\ell = 0$$

Il faut maintenant réintroduire l'indice n dans le dernier résultat

$$C_{n4} \sin \alpha_n \ell = 0$$

La solution $C_{n4} = 0$ entraîne $y(x, t) \equiv 0$: il s'agit de l'équilibre statique, sans intérêt. Il reste

$$\sin \alpha_n \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \ell = n\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = n \frac{\pi}{\ell}$$

Pour la vibration fondamentale et ses harmoniques, on a donc, en tenant compte de (16.6)

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{\ell} \\ \omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_n = n\alpha_1 \\ \omega_n = n^2\omega_1 \end{cases} \quad (16.10)$$

Finalement, le régime libre d'une poutre sur deux appuis simples peut s'écrire

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin n\alpha_1 x \cdot \cos(n^2\omega_1 t - \phi_n) \quad (16.11)$$

Si l'on compare ce résultat avec la relation (15.30) concernant les vibrations latérales d'une corde tendue, on peut formuler les deux remarques suivantes :

- Les pulsations des harmoniques d'une poutre augmentent avec n^2 , alors que celles des harmoniques d'une corde augmentent avec n .

- Les formes propres, par contre, sont identiques (voir figure 15.19).

16.2.2 Déformée dynamique comprenant plusieurs tronçons

Quand la poutre présente des liaisons intermédiaires ou des changements de section, la fonction $V(x)$ est à définir pour chacun des tronçons. Un exemple est représenté par la figure 16.4 : il s'agit d'une poutre avec un appui intermédiaire en B et un changement de section en C .

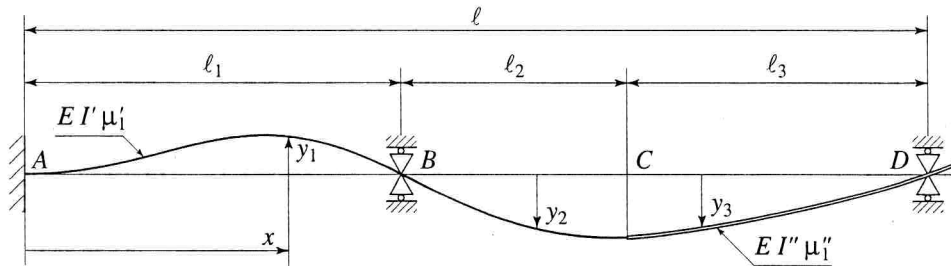


Fig. 16.4 Déformée dynamique comprenant 3 tronçons

La forme propre de la fondamentale, seule prise en considération ici, comprend trois tronçons. Elle est définie par 3 fonctions de x de la forme (16.7). En écrivant, pour simplifier, $V(x) = y(x, t)_{\max} = y(x)$, on a donc

$$y_i(x) = C_{1i} e^{\alpha x} + C_{2i} e^{-\alpha x} + C_{3i} \cos \alpha x + C_{4i} \sin \alpha x \quad i = 1, 2, 3$$

Les 12 constantes d'intégration C_{ki} ($k = 1, 2, 3, 4$ et $i = 1, 2, 3$) sont à calculer par les 12 équations suivantes, obtenues par les conditions aux limites

Point A $x = 0$	$\begin{cases} (1) & y_1 = 0 \\ (2) & y_1' = 0 \end{cases}$	déplacement nul pente nulle
Point B $x = \ell_1$	$\begin{cases} (3) & y_1 = 0 \\ (4) & y_2 = 0 \\ (5) & y_1' = y_2' \\ (6) & y_1'' = y_2'' \end{cases}$	déplacement nul déplacement nul pentes égales moments de flexion égaux
Point C $x = \ell_1 + \ell_2$	$\begin{cases} (7) & y_2 = y_3 \\ (8) & y_2' = y_3' \\ (9) & y_2'' = y_3'' \\ (10) & y_2''' = y_3''' \end{cases}$	déplacements égaux pentes égales moments de flexion égaux efforts tranchants égaux
Point D $x = \ell$	$\begin{cases} (11) & y_3 = 0 \\ (12) & y_3'' = 0 \end{cases}$	déplacement nul moment de flexion nul

Pratiquement, le calcul des C_{ki} ne peut être effectué que numériquement. Si les conditions du problème se compliquent (par exemple : nombreux changements de section, appuis élastiques etc.), il est de toute façon préférable de choisir une autre façon de procéder : méthodes de Rayleigh ou de Stodola, éléments finis, différences finies, etc.

16.2.3 Orthogonalité des modes propres d'une poutre droite.

Les déformées obtenues lors de la recherche des fréquences propres sont équivalentes aux formes propres obtenues lors de la résolution d'un problème discret. Il est ainsi possible d'adapter la notion d'orthogonalité des modes aux systèmes continus. Pour des raisons de simplification de la démarche, la justification présentée ci-après sera restreinte aux cas des poutres droites avec des conditions aux limites simples, telles qu'encastresments, appuis simples ou extrémités libres.

Pour le mode r , l'équation différentielle des poutres donne la relation suivante, en admettant une solution par séparation des variables :

$$V_r^{IV}(x) = \alpha_r^4 V_r(x) \quad (16.12)$$

Afin de démontrer l'orthogonalité des modes, il est nécessaire de définir un produit scalaire pour des fonctions continues et plus pour des vecteurs classiques. Ce produit est représenté par une intégrale sur la longueur de la poutre, et est donné par l'expression :

$$\langle V_m(x); V_r(x) \rangle = \int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx$$

En prenant l'équation (16.12) et en l'intégrant après multiplication par la fonction du mode m , on obtient l'équation :

$$\int_0^{\ell} V_m(x) V_r^{IV} dx = \alpha_r^4 \int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx \quad (16.13)$$

Après intégration par partie, le terme de gauche devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} V_m(x) V_r^{IV} dx &= \left[V_m(x) V_r''(x) \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} V_m'(x) V_r'''(x) dx \\ &= \left[V_m(x) V_r''(x) \right]_0^{\ell} - \left[V_m'(x) V_r''(x) \right]_0^{\ell} + \int_0^{\ell} V_m''(x) V_r''(x) dx \end{aligned}$$

Les deux premières quantités du terme de droite s'annulent dans le cas où les conditions aux limites sont simples comme précisé plus haut. Alors la relation (16.13) devient :

$$\int_0^{\ell} V_m''(x) V_r''(x) dx = \alpha_r^4 \int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx \quad (16.14)$$

En pratiquement de la même manière avec le mode m , on obtient l'équation :

$$\int_0^{\ell} V_m''(x) V_r''(x) dx = \alpha_m^4 \int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx \quad (16.15)$$

Par soustraction des deux relations (16.14) et (16.15), on obtient l'expression suivante :

$$0 = (\alpha_r^4 - \alpha_m^4) \int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx$$

Comme les fréquences propres sont supposées différentes ($\alpha_r \neq \alpha_m$), cette équation est équivalente à :

$$\int_0^{\ell} V_m(x) V_r(x) dx = 0$$

Les modes propres r et m sont donc orthogonaux. Dans le cas général, l'orthogonalité des modes est toujours vérifiée, mais la principale difficulté réside dans l'expression correcte de cette orthogonalité.

MÉTHODES DE CALCUL APPROCHÉES

17.1 LA MÉTHODE DE RAYLEIGH

Afin d'éviter l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (16.2), on détermine la pulsation ω d'un mode de vibration déterminé – il s'agit le plus souvent de la fondamentale seulement –, en procédant comme suit :

- 1) On admet que le mode est de la forme

$$y(x, t) = y(x) \cos \omega t$$

- 2) On choisit a priori une déformée $y(x)$ satisfaisant les conditions aux limites

- 3) On écrit l'égalité des énergies cinétique et potentielle maxima que prend la poutre au cours d'une période

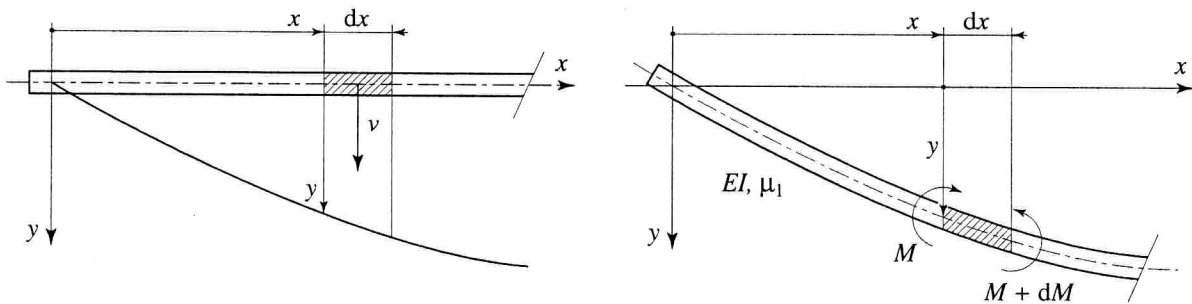


Fig. 17.1 a) La déformation est nulle, la vitesse est maximum
b) La déformation est maximum, la vitesse est nulle

En position neutre, la vitesse et donc l'énergie cinétique de la poutre sont maxima ; par contre, la déformation et l'énergie potentielle correspondantes sont nulles (figure 17.1). Dans cette position, un élément de masse $dm = \mu_1 dx$ possède l'énergie cinétique

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \mu_1 dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\max}^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y(x) \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\max} = \omega y(x)$$

$$dT = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_1 y^2(x) dx$$

Ainsi, une poutre de section constante et de longueur ℓ possède l'énergie cinétique maximum

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_1 \int_0^{\ell} y^2(x) dx \quad (17.1)$$

En position de déformation maximum, la vitesse est nulle et l'énergie potentielle due à la flexion, seule prise en considération ici, peut être calculée par la relation bien connue

$$V = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2(x)}{2EI} dx$$

Le moment de flexion est proportionnel à la dérivée seconde de la déformée choisie

$$M(x) = -EI y''(x)$$

Si la section est constante, l'énergie potentielle maximum d'une poutre de longueur ℓ a donc pour valeur

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^{\ell} y''^2(x) dx \quad (17.2)$$

Il suffit d'égaliser les énergies cinétique et potentielle au moyen des relations (17.1) et (17.2) pour déterminer la pulsation cherchée ω .

17.1.1 Poutre sur deux appuis simples

Examinons d'abord la validité de la méthode en cherchant la pulsation de la fondamentale d'une poutre sur deux appuis simples, dont la déformée exacte est connue : il s'agit d'une sinusoïde d'équation

$$y(x) = \delta \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{\pi^2 \delta}{\ell^2} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

On calcule l'énergie cinétique d'après (17.1)

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_1 \delta^2 \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{4} \omega^2 \mu_1 \delta^2 \ell$$

puis l'énergie potentielle d'après (17.2)

$$V = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4 \delta^2}{\ell^4} \int_0^\ell \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{\pi^4}{4} \frac{EI \delta^2}{\ell^3}$$

$$T = V \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}$$

Ainsi, quand la déformée exacte est connue, la méthode redonne la pulsation exacte (relation (16.10)).

17.1.2 Poutre en console (figure 17.2)

Choisissons comme déformée une cosinusoïde

$$y(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell} \right) \quad \Rightarrow \quad y''(x) = \frac{\pi^2 \delta}{4\ell^2} \cos \frac{\pi x}{2\ell}$$

Cette courbe respecte les conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ mais n'est pas la déformée exacte car il est impossible de l'identifier à la fondamentale de (16.8), quelles que soient les constantes C_{1i} ($i = 1, 2, 3, 4$).

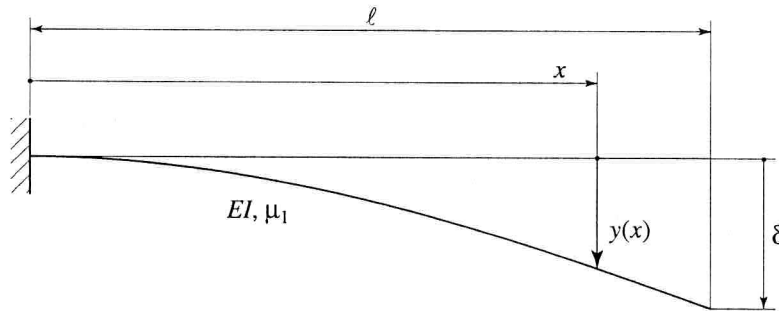


Fig. 17.2 Déformée d'une poutre en console

Au moyen de (17.1) et (17.2) on trouve facilement

$$T = \frac{3\pi - 8}{4\pi} \omega^2 \mu_1 \delta^2 \ell \quad V = \frac{\pi^4}{64} \frac{EI \delta^2}{\ell^3}$$

$$T = V \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{4\sqrt{3\pi - 8} \ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}} = \frac{3,664}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu_1}}$$

Le calcul exact à partir de l'équation (16.8) donne

$$\omega_e = \frac{3,516}{\ell^2} \sqrt{EI \mu_1}$$

L'erreur relative due à la méthode de Rayleigh est ainsi

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_e}{\omega_e} = \frac{3,664 - 3,516}{3,516} \cong +4,2 \%$$

La valeur approchée dépasse la valeur exacte. Nous montrerons plus loin (section 17.3) qu'il en est toujours ainsi. Par conséquent, si l'on applique la méthode de Rayleigh avec plusieurs déformées approchées successives, le meilleur résultat est toujours le plus faible.

17.1.3 Poutre de section constante avec masses concentrées

Il est facile, avec la méthode de Rayleigh, de prendre en compte des masses concentrées sur une poutre. Ces masses contribuent, souvent de manière prépondérante, à l'énergie cinétique. Elles ne participent pas directement à l'énergie potentielle car elles sont, par définition, indéformables. Elles ont une influence indirecte en raison des modifications qu'elles apportent à la déformée dynamique

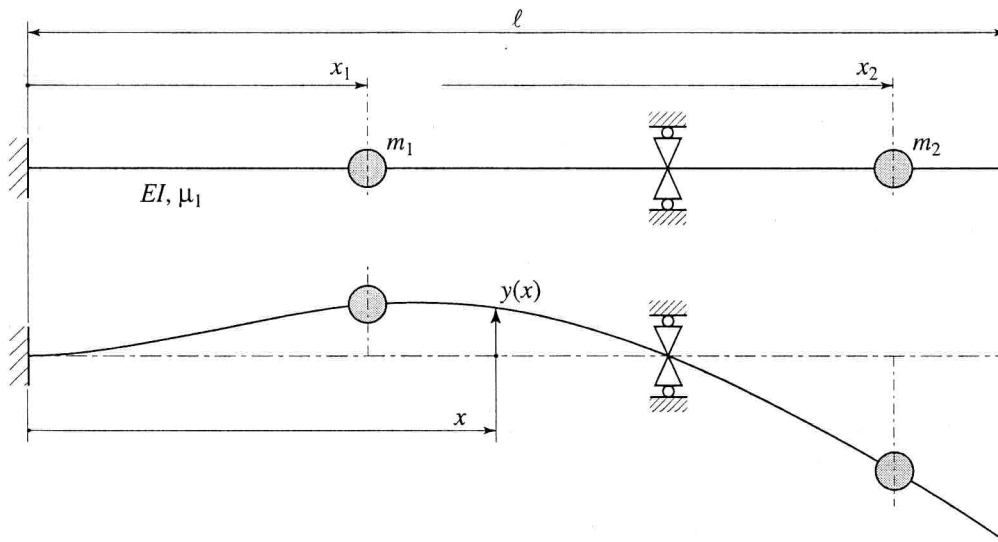


Fig. 17.3 Poutre avec masses concentrées

Pour l'exemple représenté par la figure 17.3, l'énergie potentielle peut être calculée par (17.2), alors que l'énergie cinétique a pour valeur

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_1 \int_0^\ell y^2(x) dx + \frac{1}{2} \omega^2 m_1 y^2(x_1) + \frac{1}{2} \omega^2 m_2 y^2(x_2) \quad (17.3)$$

17.1.4 Poutre de section variable

Si la section de la poutre varie, la masse linéaire et le moment d'inertie sont des fonctions de x . Les énergies cinétique et potentielle deviennent alors

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{\ell} \mu_1(x) y^2(x) dx \quad (17.4)$$

$$V = \frac{1}{2} E \int_0^{\ell} I(x) y''^2(x) dx \quad (17.5)$$

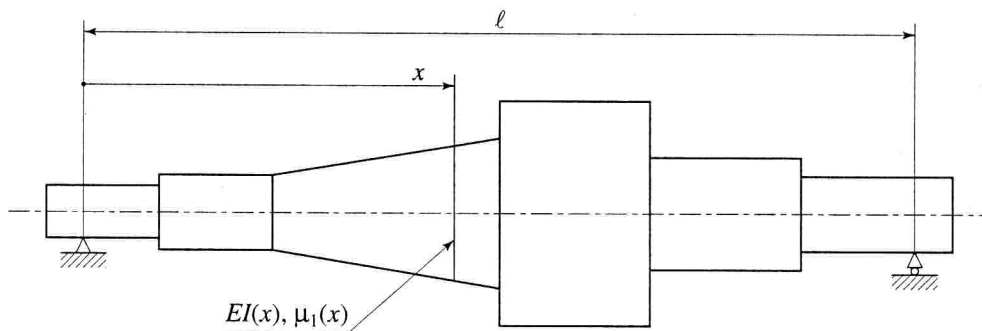


Fig. 17.4 Poutre à section variable

Le plus souvent, il s'agit de changements brusques de section (figure 17.4) et le système vibrant n'est plus, à proprement parler, une poutre mais un ensemble de poutres contiguës. Compte tenu du caractère approché de la méthode, une telle nuance n'a cependant guère d'importance ici.

On peut observer que si un tronçon de poutre possède une section sensiblement plus grande que les autres, le moment d'inertie devient relativement si grand que la contribution de ce tronçon à l'énergie potentielle est pratiquement nulle. Si, de plus, la longueur du tronçon est faible, dans le cas d'un disque par exemple, on s'approche de la notion de "masse concentrée" évoquée au paragraphe précédent. Cependant, une différence importante apparaît : une masse concentrée n'a pas d'inertie à la rotation alors que pour un disque l'énergie cinétique liée à la pente $y'(x)$ de la déformée peut devenir importante.

L'OSCILLATEUR NON LINÉAIRE

18.1 GÉNÉRALITÉS

Dans la première partie de ce cours, nous avons étudié le comportement de l'oscillateur mécanique linéaire, régi par l'équation différentielle

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) \quad (2.1)$$

ou

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0(t) \quad (2.5)$$

En admettant une force d'excitation harmonique, le second membre de l'équation (2.5) est de la forme $f_0(t) = g \cos \omega t$, la fréquence pouvant être quelconque. On sait que l'amplitude du déplacement en régime permanent atteint un maximum au voisinage de ω_0 . Comme le montre la figure 18.1, l'importance de ce maximum varie en fonction de la constante d'amortissement.

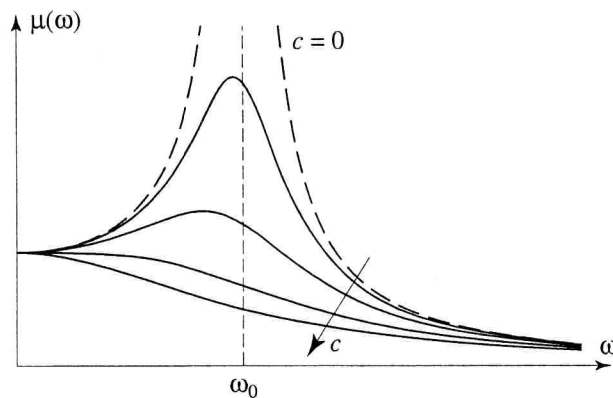


Fig. 18.1 Réponse en régime permanent harmonique en fonction de la fréquence d'un système linéaire amorti

Par la suite, ce comportement nous a servi de référence pour l'examen de systèmes linéaires plus complexes, comprenant un nombre fini ou infini de degrés de liberté et que l'on peut toujours considérer, dans leur base modale, comme un ensemble d'oscillateurs élémentaires.

Si la masse, la résistance et la rigidité de l'oscillateur sont variables, mais en fonction du temps seulement, l'équation différentielle reste linéaire

$$m(t) \ddot{x} + c(t) \dot{x} + k(t) x = f(t) \quad (18.1)$$

Le cas le plus intéressant est celui où les caractéristiques du système varient périodiquement. Il peut alors apparaître un phénomène appelé **vibrations paramétriques** et que nous aborderons au chapitre suivant.

Les non-linéarités du comportement vibratoire d'un système peuvent avoir différentes causes. Le plus fréquemment, les non-linéarités proviennent :

- (a) des caractéristiques de déformation d'une ou de plusieurs parties du système ;
 - (b) des liaisons, notamment de la déformation des points de fixation ;
 - (c) des forces internes non linéaires ;
 - (d) des grandes amplitudes des vibrations ;
 - (e) du flambage de systèmes élastiques lors des vibrations ;
- etc.

De manière générale, un oscillateur élémentaire est un système de la mécanique, avec un seul degré de liberté, régi par une équation différentielle

$$G(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots) = f(t) \quad (18.2)$$

dont la solution $x(t)$ présente un caractère oscillatoire, autour d'une valeur moyenne constante ou lentement variable. Physiquement, la notion d'oscillateur implique un "balancement", avec ou sans dissipation, entre les énergies cinétique et potentielle.

18.1.1 Rigidité fonction de x seulement, équation de Duffing

Dans de nombreux problèmes de la pratique, la non-linéarité provient du fait que la rigidité est fonction du déplacement x et, en tout cas au premier ordre, du déplacement seulement. Dans ce chapitre, les non-linéarités étudiées sont dues à la caractéristique du ressort. En admettant que la non-linéarité est identique en traction et en compression, l'équation de mouvement du système est donnée par une relation de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = g(t) \quad (18.3)$$

dans la quelle, λ , α et β sont des constantes. L'équation (18.3) est connue comme l'**équation de Duffing**, d'après le nom du mathématicien qui l'étudia. On peut démontrer que la réponse d'un tel système à une excitation périodique est également périodique. La figure 18.2 présente un exemple de réponse harmonique pour ce système lorsque la force d'excitation est constante. On peut alors remarquer qu'il existe un phénomène de résonance.

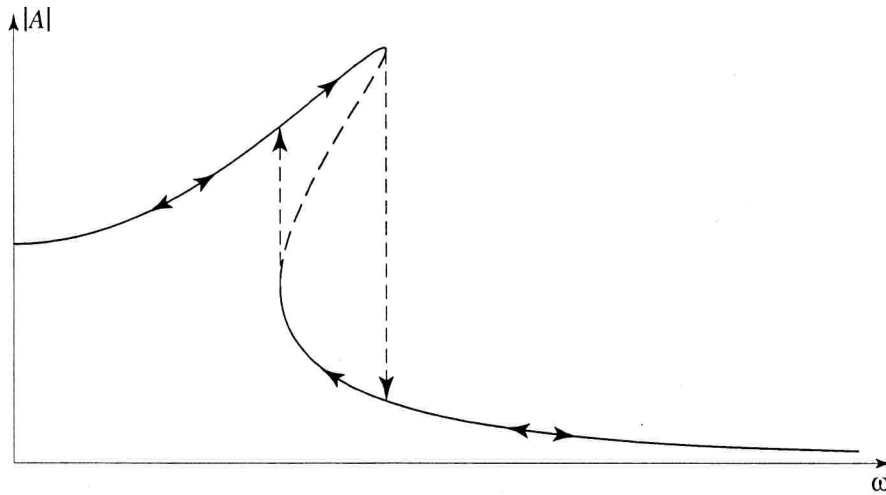


Fig. 18.2 Courbe de la réponse d'un système non linéaire à une excitation harmonique

Dans un cas de régime libre sans dissipation, l'équation du système devient

$$m \ddot{x} + k(x) \cdot x = 0 \quad (18.4)$$

Le comportement statique du ressort – au sens large de ce terme – est défini par la force de rappel $F(x)$, calculée ou mesurée en fonction de x (figure 18.3).

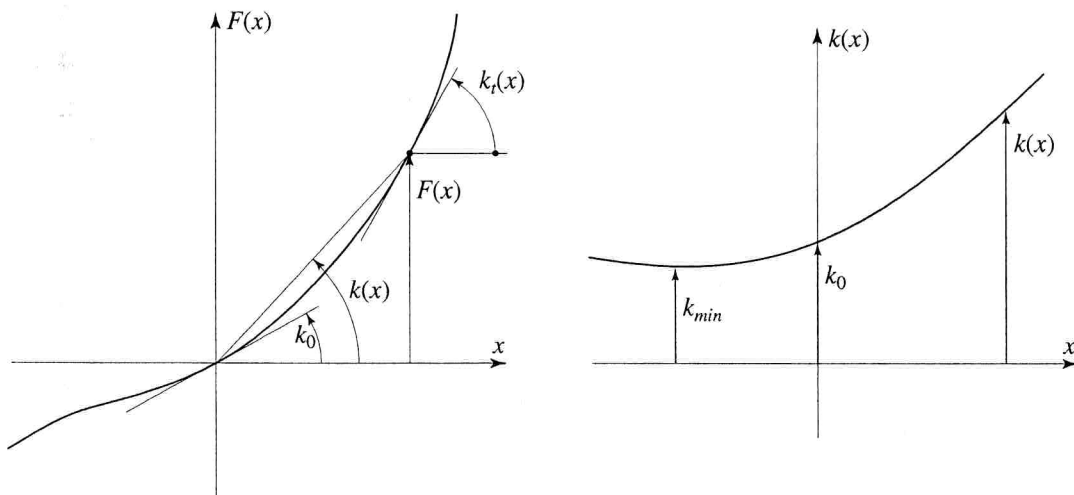


Fig. 18.3 Force de rappel et rigidité en fonction du déplacement

La grandeur $k(x)$ intervenant dans l'équation (18.4) devrait être appelée "rigidité sécante". Elle est égale au quotient de la force par le déplacement

$$k(x) = \frac{F(x)}{x} \quad (18.5)$$

et doit être distinguée de la "rigidité tangente", correspondant à la pente de la courbe

$$k_t(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (18.6)$$

Dans la suite de ce chapitre, il s'agira toujours de rigidité sécante quand nous utiliserons le terme de rigidité.

Une rigidité variable apparaît parfois comme un phénomène perturbateur, provoqué par des imperfections géométriques ou par un comportement non-linéaire du matériau utilisé. Souvent, par contre, la non-linéarité est voulue : on désire, par exemple, que la rigidité augmente avec le déplacement, afin de limiter l'amplitude des grandes oscillations, tout en conservant une souplesse suffisante du système vis-à-vis des petites oscillations. La figure 18.4 illustre une des nombreuses façons d'obtenir un tel résultat. Il s'agit d'un ressort passant progressivement, grâce à une certaine incurvation des spires, de la torsion simple à la torsion combinée de flexion. Finalement, on obtient de la compression quand toutes les spires se touchent, mais il est en général défavorable d'aller jusque là.

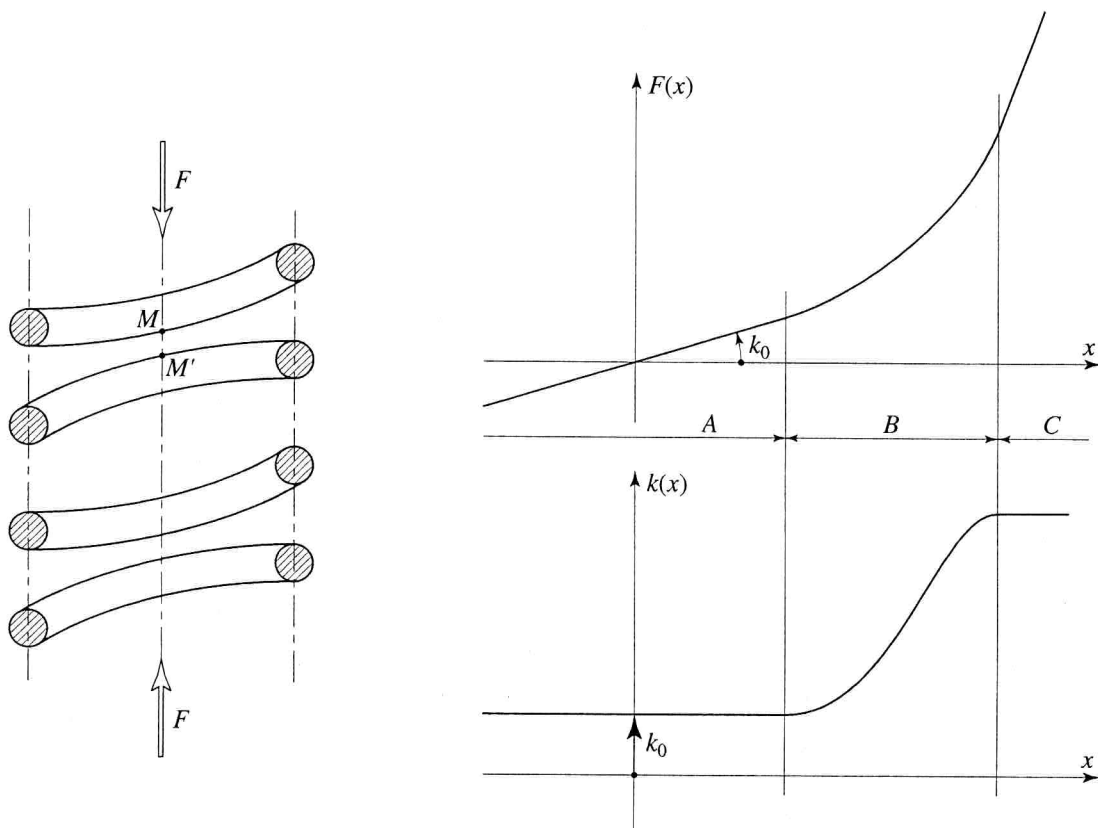


Fig. 18.4 Ressort non-linéaire

A : domaine de la torsion simple

B : domaine de la torsion combinée avec de la flexion (dès que les points *M* et *M'* se touchent)

C : domaine de la compression

18.3 LA MÉTHODE DE GALERKIN

Considérons une équation différentielle non linéaire

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$$

et cherchons une solution approchée de la forme

$$x(t) = C_0 f_0(t) + C_1 f_1(t) + \dots + C_n f_n(t) \quad (18.33)$$

dans laquelle $C_0, C_1, \dots, C_n$ sont des constantes et $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$ sont des fonctions du temps qu'on choisit a priori en se basant sur des considérations physiques ou sur l'analyse de solutions obtenues par voie numérique.

La fonction $x(t)$ n'étant qu'approximative, l'équation différentielle n'est pas rigoureusement satisfaite et le second membre, au lieu d'être nul, prend une valeur $\varepsilon(t)$.

La méthode de Galerkin consiste à calculer les constantes $C_0, C_1, \dots, C_n$ de façon que sur un intervalle déterminé du temps, l'intégrale de $\varepsilon^2(t)$ soit minimum (figure 18.7)

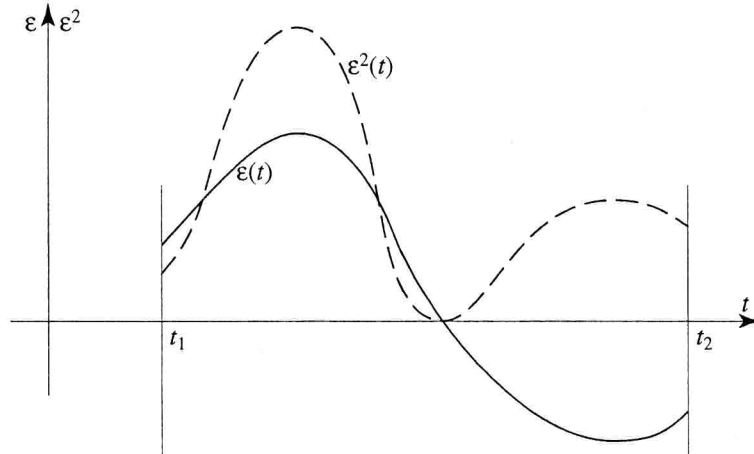


Fig. 18.7 Erreur et carré de l'erreur dans l'intervalle $t_1 t_2$

Soit donc l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt \quad (18.34)$$

La condition cherchée s'exprime par

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial I}{\partial C_0} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_0} dt \\ 0 = \frac{\partial I}{\partial C_1} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_1} dt \\ \vdots \\ 0 = \frac{\partial I}{\partial C_n} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_n} dt \end{cases} \quad (18.35)$$

Relativement aux paramètres $C_0, C_1, \dots, C_n$ la fonction I peut présenter, en principe, $n + 1$ extrema parmi lesquels il faudra choisir le plus petit minimum. On y parvient souvent par un raisonnement physique, faute de quoi les calculs peuvent devenir extrêmement pénibles.

A titre d'exemple, considérons un oscillateur dont la constante est proportionnelle à la valeur absolue du déplacement (figure 18.8)

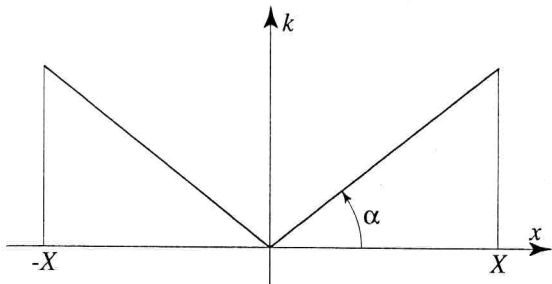


Fig. 18.8 Rigidité proportionnelle à $|x|$

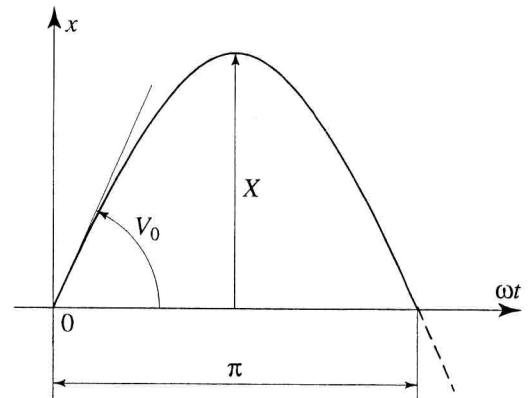


Fig. 18.9 Solution approchée de (18.37)

On a donc

$$k = \alpha |x| \quad (18.36)$$

et l'équation de l'oscillateur

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

devient

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x |x| = 0 \quad (18.37)$$

Admettons les conditions initiales suivantes (figure 18.9)

$$t = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = V_0$$

et cherchons une solution très simple

$$x = X \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \omega X = V_0$$

ne comprenant qu'un terme de l'équation (18.33).

Dans l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ soit $0 \leq \omega t \leq \pi$, x est positif et $x = |x|$. La fonction $\varepsilon(t)$ a donc pour valeur

$$\varepsilon(t) = \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x^2 = -\omega^2 X \sin \omega t + \frac{\alpha}{m} X^2 \sin^2 \omega t \quad (18.38)$$

Avec $C_0 = X$, la première condition (18.35) devient

$$0 = \int_0^\pi \left(-\omega^2 X \sin \omega t + \frac{\alpha}{m} X^2 \sin^2 \omega t \right) \left(-\omega^2 \sin \omega t + \frac{2\alpha}{m} X \sin^2 \omega t \right) \omega dt$$

soit encore

$$0 = \int_0^\pi \sin^2 \omega t \left(-\omega^2 + \frac{\alpha}{m} X \sin \omega t \right) \left(-\omega^2 + \frac{2\alpha}{m} X \sin \omega t \right) dt \quad (18.39)$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\omega^4 - \frac{8}{\pi} \frac{\alpha}{m} X \omega^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{m} X \right)^2 = 0$$

Cette équation en ω^2 donne

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{m} X \left(\frac{4}{\pi} \pm \sqrt{\frac{16}{\pi^2} - \frac{3}{2}} \right) \quad (18.40)$$

donc deux solutions

$$\omega^2 = 1,62 \frac{\alpha}{m} X \quad \text{et} \quad \omega^2 = 0,93 \frac{\alpha}{m} X$$

dont une seule doit être conservée. Dans le cas particulier un raisonnement physique très simple permet immédiatement d'affirmer que la plus faible valeur de ω^2 est la bonne. En effet, si la rigidité du ressort était constante et égale à sa valeur maximum $k_{max} = \alpha X$ (figure 18.10), la pulsation serait

$$\omega_0^2 = \frac{k_{max}}{m} = \frac{\alpha X}{m}$$

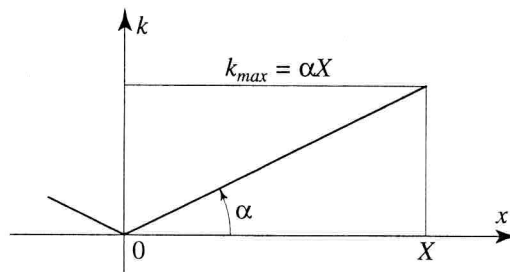


Fig. 18.10 Valeur maximum de la rigidité

La rigidité du ressort étant plus faible que k_{max} pour $x < X$, on a nécessairement $\omega^2 < \omega_0^2$ et par conséquent

$$\omega^2 = 0,93 \frac{\alpha}{m} X = 0,93 \omega_0^2$$

$$\begin{cases} \omega = 0,96 \omega_0 \\ T = 1,04 T_0 \end{cases} \quad (18.41)$$

En conclusion, la période n'est augmentée que de 4 % si la rigidité est proportionnelle au déplacement au lieu d'être égale à sa valeur maximum.

Remarque : si l'on prend plusieurs termes dans le développement de $x(t)$, la méthode de Galerkin donne une approximation très fine mais exige des calculs très longs.

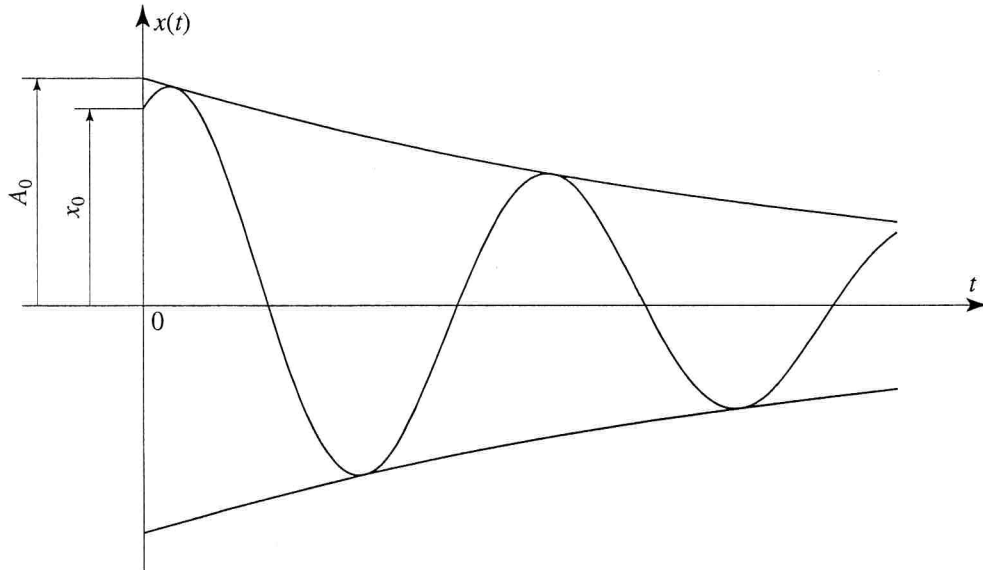


Fig. 18.11 Régime libre amorti d'un oscillateur non linéaire

18.5 RÉGIME FORCÉ NON AMORTI – NOTION D'INSTABILITÉ

Les quelques exemples d'oscillateurs non linéaires à un seul degré de liberté que nous venons d'étudier suffisent pour montrer qu'il n'est plus possible de trouver des lois générales de comportement en régime libre, contrairement à ce que nous avons pu faire pour les systèmes linéaires.

Ceci est encore plus vrai dans le cas des systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté dont l'étude par voie analytique devient extrêmement pénible. Il est alors indispensable de recourir au calcul analogique ou numérique, ce qui ne permet pas, évidemment, de trouver des lois générales.

En ce qui concerne le régime forcé de l'oscillateur élémentaire (1 seul degré de liberté), il est cependant possible d'obtenir une bonne description du phénomène au prix de quelques simplifications importantes.

Reprenons l'exemple de l'oscillateur non amorti à rigidité parabolique, correspondant à un cas particulier de l'équation de Duffing :

$$m \ddot{x} + k_0 (1 + \mu x^2) x = F \cos \omega t$$

Comme précédemment, divisons par la masse

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + h x^3 = g \cos \omega t \quad (18.57)$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{K_0}{m} \\ h = \frac{\mu K_0}{m} \\ g = \frac{F}{m} \end{cases} \quad (18.58)$$

On ne s'occupe que du régime permanent en admettant une solution

$$x(t) = X \cos \omega t$$

dans laquelle X est une constante.

Il vient, par introduction dans l'équation

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) X \cos \omega t + h X^3 \cos^3 \omega t = g \cos \omega t$$

ou encore, avec $\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t)$

$$\left\{ (-\omega^2 + \omega_0^2) X + \frac{3h}{4} X^3 \right\} \cos \omega t + \frac{h}{4} X^3 \cos 3\omega t = g \cos \omega t \quad (18.59)$$

Pour l'instant, négligeons $\frac{h X^3}{4}$ en comparaison de $\frac{3h X^3}{4}$ ce qui fait disparaître le terme en $3\omega t$. Il vient

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) X + \frac{3h}{4} X^3 = g \quad (18.60)$$

On peut résoudre cette équation en écrivant

$$\begin{cases} y_1 = (\omega^2 - \omega_0^2) X + g \\ y_2 = \frac{3h}{4} X^3 \end{cases}$$

et en cherchant les intersections de y_1 et y_2 (figure 18.12). La parabole cubique y_2 est invariable alors que la droite y_1 a une pente fonction de ω_0^2 et une hauteur à l'origine égale à g .

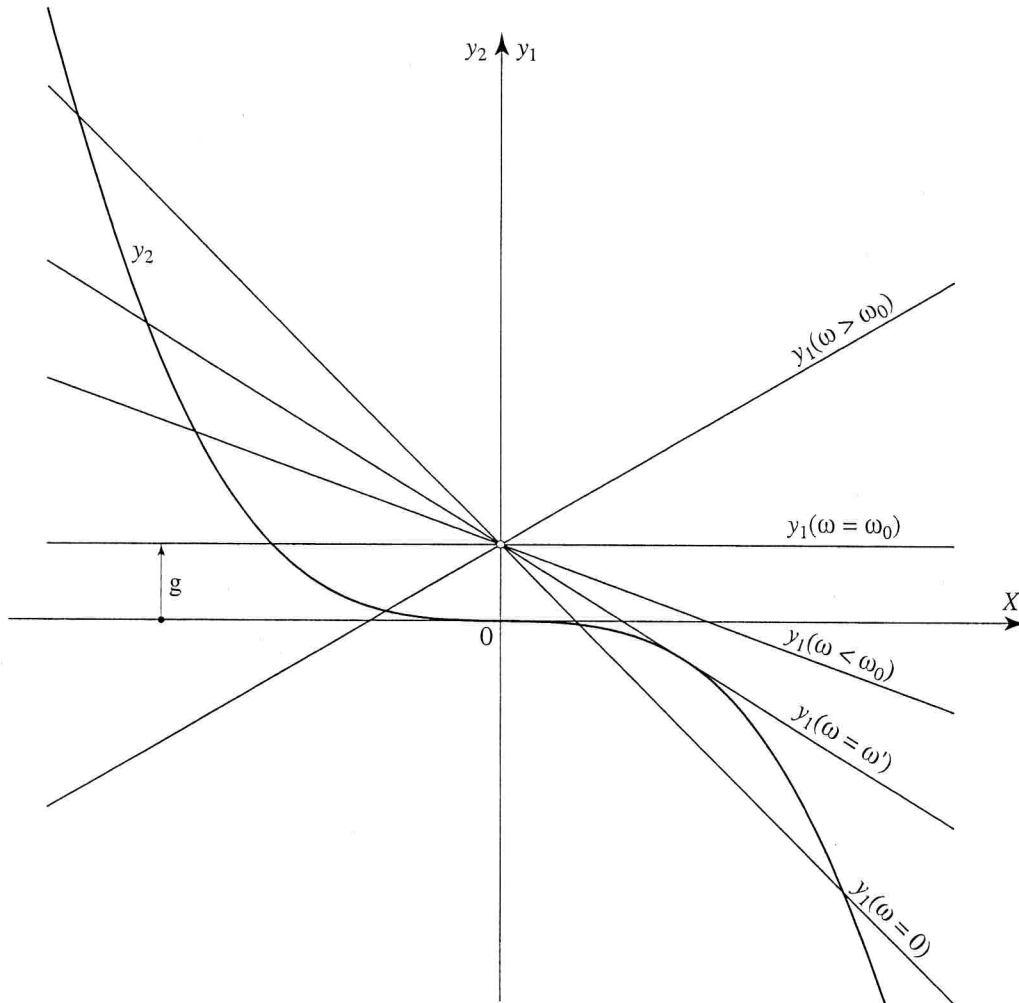


Fig. 18.12 Recherche des solutions de (18.60) dans le cas $h < 0$

Pour des valeurs déterminées de h et de g ($h < 0$ dans le cas de la figure 18.12) cherchons la valeur des solutions X en fonction de la pulsation forcée ω .

- Pour $\omega' \leq \omega \leq \infty$, il existe une seule solution $X < 0$, ce qui signifie que le déplacement en régime permanent est en opposition de phase avec la force extérieure
- Pour $\omega = \omega'$, on a une solution négative et une solution double positive
- Pour $0 \leq \omega \leq \omega'$, il existe une solution négative et deux solutions positives pour lesquelles le déplacement en régime permanent est en phase avec la force extérieure.

La figure 18.13 représente le module $|X|$ de l'amplitude du déplacement en fonction de ω . Le module du système linéaire ($h = 0$) est également représenté. Il est infini (résonance) pour $\omega = \omega_0$.

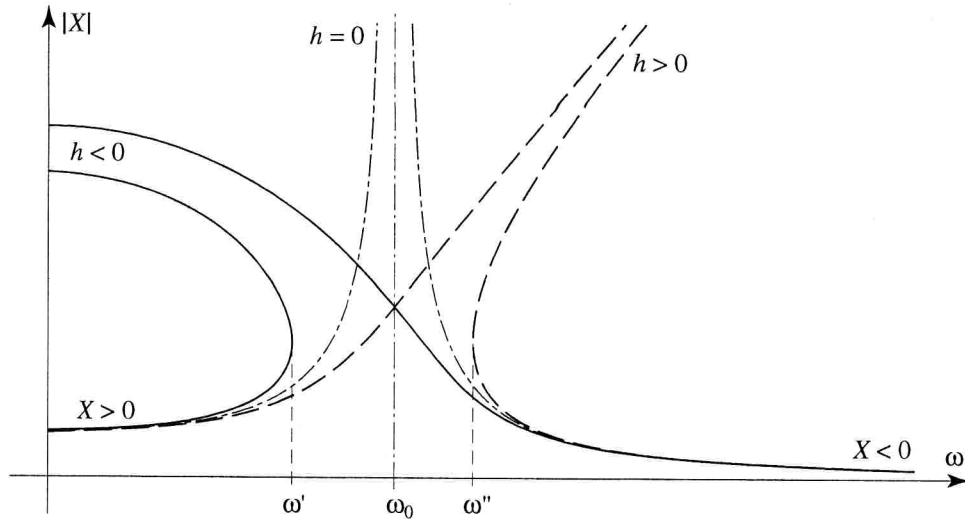


Fig. 18.13 Oscillateur non-amorti. Amplitude du régime permanent

Si l'on considère maintenant g comme paramètre (figure 18.14) les courbes $|X|$ sont placées de part et d'autre de la courbe limite $g = 0$ dont l'équation est donnée par la relation (18.60) :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) + \frac{3h}{4} X^2 = 0$$

soit

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3h}{4} X^2 \quad (18.61)$$

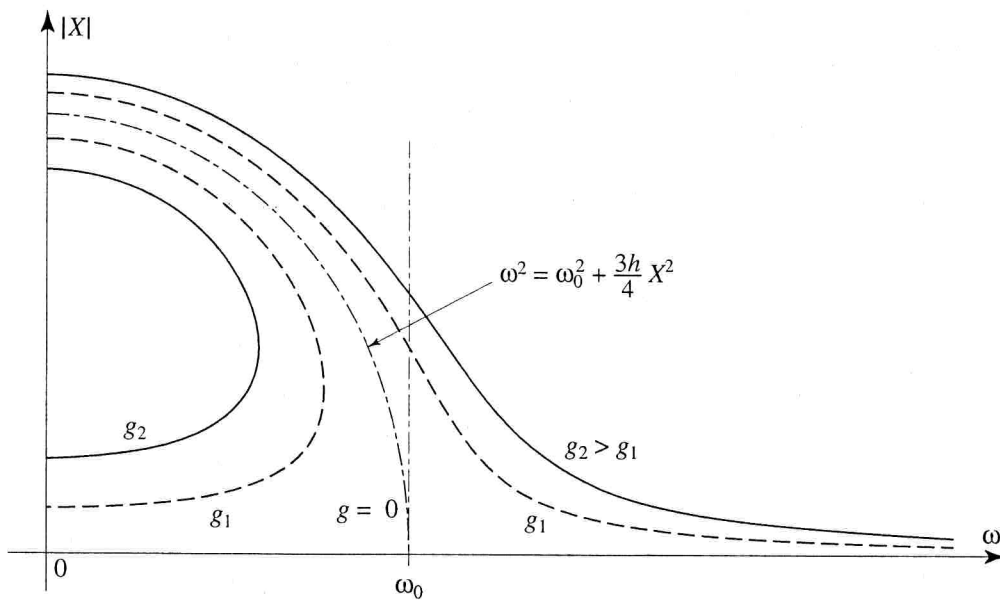


Fig. 18.14 Influence du paramètre $g = \frac{F}{m}$

On peut montrer qu'un faible amortissement du système a pour conséquence de fermer les courbes $|X| = f(\omega)$ qui présentent alors l'allure de la figure 18.15

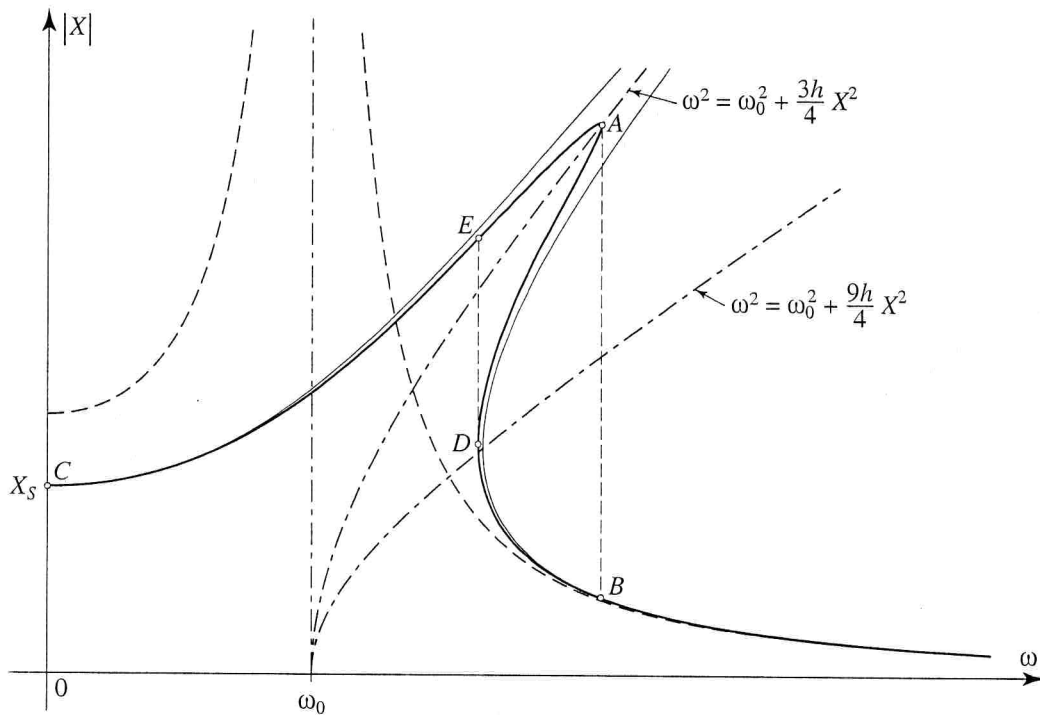


Fig. 18.15 Oscillateur amorti. Amplitude du régime permanent

Supposons que l'on décrive une courbe par valeurs croissantes de ω à partir de zéro. Au point A, l'amplitude décroît à fréquence constante (tangente verticale). Le mouvement devient instable jusqu'au moment où l'amplitude est égale à celle du point B. Si la pulsation forcée augmente encore, l'amplitude diminue et devient nulle pour $\omega \rightarrow \infty$.

Quand la pulsation forcée est décroissante, on décrit la courbe jusqu'en D où l'instabilité apparaît : l'amplitude augmente alors brusquement pour atteindre celle du point E. Elle diminue ensuite et on suit la courbe jusqu'au point C correspondant au déplacement statique.

Le point D est un maximum de la courbe $\omega = f(X)$. On a donc pour ce point

$$\frac{d\omega}{dX} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\omega^2)}{dX} = 0$$

mais l'équation (18.60) peut s'écrire

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{g}{X} + \frac{3h}{4} X^2$$

d'où

$$\frac{d\omega^2}{dX} = \frac{g}{X^2} + \frac{3h}{2} X = 0 \quad (18.62)$$

En éliminant g entre (18.62) et (18.60) on obtient le lieu des points D

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{9h}{4} X^2 \quad (18.63)$$