

EXAMEN BLANC
Probabilités Avancées
Semestre Automne 2013
Novembre 2013

Durée de l'examen : 2h30

Sont autorisés : 2 pages de notes personnelles.

Aucune machine à calculer n'est admise.

Veuillez svp. commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.

Résolvez toutes les questions

Une quelconque tricherie serait très sévèrement sanctionnée !

Inscrivez tout d'abord vos nom, prénom et votre département :

Nom : _____ **Prénom :** _____

Département : _____

Exercice	Points
1	
2	
3	
4	
5	
Total points :	

1) $\ll$ The σ -algebra on $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ generated by the functions $\omega \rightarrow \omega_t$ for $t \geq 0 \gg$

What does this mean?

Denote this σ -field by G . Show that $A \in G$ if and only if $\exists t_1, t_2, \dots \in [0, \infty)$ so that

$$A = \{\omega : (\omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \dots) \in H\}$$

for H in the Borel σ -field of $\mathbb{R}^N$.

2) Define, given events A_n , $n = 1, 2, \dots$ in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Prove that $P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$ and give an example where one is 1 and the other $\frac{1}{2}$.

3) Let $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ be iid $U([0, 1])$ r.v.s.
How many times is $U_n > nU_{n+1}$? Can you give a law of large numbers?

4) Let $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ be iid r.v.s with density $\frac{1}{x^2}$ for $x \geq 1$. Show with justification that

$$\frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p^r} 1.$$

Does

$$\frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s} 1?$$

5) For $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ with λ Lebesgue measure, $\mathcal{B}$ the Borel-

lennes.
Put $X_i(\omega) = [2^i \omega] \bmod 2$.

Show that the X_i are independent variables.

If

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_{2k} \text{ and}$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_{2k-1}$$

Show

$$E(\cos(U_1 U_2)) = \int_0^1 \int_0^1 \cos(x, y) dx dy$$