

Série n°6

Exercice 1 : Soient $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et C une classe de $\mathcal{L}$ -structures. On dit que la classe C est *axiomatisable* s'il existe une théorie T de $\mathcal{L}$ telle que, pour toute $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}$, on ait :

$$\mathcal{M} \in C \text{ si et seulement si } \mathcal{M} \models T.$$

La classe C est dite *finiment axiomatisable* s'il existe une théorie *finie* T de $\mathcal{L}$ telle que, pour toute $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}$, on ait :

$$\mathcal{M} \in C \text{ si et seulement si } \mathcal{M} \models T.$$

1. Soient $\mathcal{L}$ le langage égalitaire consistant en le seul symbole d'égalité et C la classe des $\mathcal{L}$ -structures finies. La classe C est-elle axiomatisable ? Est-elle finiment axiomatisable ?

Indication: Raisonner par l'absurde, en utilisant le théorème compacité et des énoncés signifiant "il existe au moins n éléments distincts".

2. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Montrer que si une classe C est finiment axiomatisable, alors la classe complémentaire de C l'est aussi.
3. Soit $\mathcal{L}$ le langage égalitaire consistant en le seul symbole d'égalité. Est-ce que la classe des $\mathcal{L}$ -structures infinies est axiomatisable ? finiment axiomatisable ?

Exercice 2 : Soit $\mathcal{L}_0$ le langage (égalitaire) du premier ordre de l'arithmétique $\{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}\}$. Pour le modèle standard $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ nous posons $T = \text{Th}(\mathcal{N})$ la $\mathcal{L}$ -théorie de $\mathbb{N}$, i.e.

$$\text{Th}(\mathcal{N}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ est une } \mathcal{L}\text{-formule close telle que } \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Nous définissons par induction le terme $\underline{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ comme $\underline{0} = \underline{0}$ et $\underline{n+1} = \underline{S(n)}$.

1. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T dans lequel il existe un élément $m \in |\mathcal{M}|$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, $\underline{n}^{\mathcal{M}}$ est un diviseur de m .
2. Montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de la théorie T il existe un unique plongement $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Nous rappelons :

Théorème (Compacité). *Une théorie $\mathcal{T}$ est satisfaisable si et seulement si tout sous-ensemble fini T' de T est satisfaisable.*

et nous considérons l'énoncé suivant :

Corollaire. *On a $T \models \varphi$ si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que $T' \models \varphi$.*

1. Montrer l'équivalence entre le théorème de compacité et le corollaire.
2. Montrer qu'une théorie T est contradictoire si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que T' est contradictoire.

Exercice 4 : Soient $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et $\mathbf{C}$ une classe de $\mathcal{L}$ -structures axiomatisée par la théorie T_C .

1. Montrer que $\mathbf{C}$ est finiment axiomatisable si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T de T_C telle que $\mathbf{C}$ est axiomatisée par T .

Indication: Utiliser le corollaire du théorème de compacité donné à l'Exercice 3.

2. Donner un nouvel argument pour le point 3. de l'Exercice 1 à la lumière du point précédent.