Série n°2

Exercice 1 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, comprenant le symbole de constante c, les symboles de fonction f et g respectivement unaire, binaire, et le symbole de relation binaire R. On pose $u = g(f(x), g(z, c))$ un terme de ce langage, et φ la formule suivante :

$$\varphi = \Big(\forall x \ \big(R(x, z) \wedge \exists z \ R(g(z, x), y)\big) \rightarrow \exists z \ \big(R(f(x), z) \vee \neg R(c, g(y, z))\big)\Big)$$

1. Dessiner l'arbre de décomposition et donner la hauteur de φ.
2. Quelles sont les occurrences libres ou liées des variables x, y et z dans φ ?
3. Ecrire les formules $\varphi_{[u/y]}$, $\varphi_{[u/x]}$ et $\varphi_{[u/z]}$, en renommant les occurrences liées des variables de φ lorsqu'il le faut.

Exercice 2 : En vous inspirant de l'arbre de décomposition d'une formule, définir l'arbre de décomposition d'un terme (par induction sur sa hauteur) de sorte que la hauteur du terme et la longueur de la plus longue branche de l'arbre coïncident.

Exercice 3 : Montrer que toute formule du calcul des prédicats possède autant de parenthèses ouvrantes que fermantes.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire dénombrable du premier ordre. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules de $\mathcal{L}$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exercice 5 :

1. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble $2^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de 0 et de 1 n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$.