Série n°11

Exercice 1 :

Donner une démonstration en déduction naturelle des séquents suivants.

1. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$
3. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
4. $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
5. $\varphi, \psi \vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$

Exercice 2 :

Donner une démonstration en déduction naturelle des séquents suivants.

1. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \; (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$ (symétrie de l'égalité)
2. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; ((x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3) \to x_1 = x_3)$ (transitivité de l'égalité)

Exercice 3 : Dans cet exercice, on travaille en déduction naturelle. On montre que certains systèmes de déduction sont équivalents.

Considérons les ensembles de règles suivants :

a) $\mathcal{R}_{cl.} = \{$Règles et axiomes de la logique classique$\}$;
b) $\mathcal{R}_{int.} = \{$Règles et axiomes de la logique intuitionniste$\}$;
c) $\mathcal{R}_{int.+t.e.} = \mathcal{R}_{int.} \cup \left\{ \dfrac{}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)}\,{\scriptstyle ax} \right\}$;
d) $\mathcal{R}_{int.+l.P.} = \mathcal{R}_{int.} \cup \left\{ \dfrac{}{(\neg\varphi \to \varphi) \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax} \right\}$.

Ainsi, les points c) et d) correspondent à l'ajout d'un axiome à la logique intuitionniste. En c), cet axiome est le tiers exclu, en d), il s'agit de la loi de Pierce. A chaque ensemble de règles $\mathcal{R}$, on associe l'ensemble des séquents qu'il peut prouver $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left\{ \Gamma \vdash \varphi \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{il existe une preuve en déduction naturelle du séquent } \Gamma \vdash \varphi \\ \text{n'utilisant que les règles et axiomes de } \mathcal{R} \end{array} \right\}.$$

Le but de l'exercice est de prouver :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+t.e.}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+l.P.}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{cl.}}$$

1. Prouver que $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+l.P.}}$
2. Prouver que $(\neg\varphi \to \varphi) \vdash \varphi \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+t.e}}$
3. Prouver que $(\neg\varphi \to \varphi) \vdash \varphi \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{cl.}}$
4. Prouver que la règle de l'absurde classique peut être obtenue avec $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+l.P.}}$
5. Conclure.