SMA

Logique mathématique

Dimitri ZAGANIDIS

Notes de cours du Prof. Jacques Duparc

Dernière modification le 28 octobre 2024

Table des matières

Ce polycopié est la retranscription des notes du cours du professeur Jacques Duparc, durant le semestre d'automne 2009. Complété en 2010 par R. Carroy et J. Duparc. Modifié en 2011 par Y. Pequignot. Modifié en 2012 par Y. Pequignot. Modifié en 2013 par J. Duparc et Y. Pequignot, etc.

Malgré de très nombreuses relectures il restera toujours des fautes, ce polycopié est donc fournit sans garantie ! N'hésitez pas à nous signaler les erreurs que vous remarquez. Un grand merci à Jacques Duparc, Rafael Guglielmetti et Nicolas Berger pour leur participation à l'élaboration de ce document ainsi qu'à Monica Perrenoud pour sa relecture attentive.

Un grand merci également de la part de Jacques Duparc à Gilbert Maystre pour les nombreuses typos qu'il y a relevées ainsi qu'à Antoine du Fresne von Hohenesche pour une relecture très attentive, de multiples question et une nouvelle preuve que tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal.

"La logique est le dernier refuge des gens sans imagination."

Oscar Wilde[1]

1 Introduction

Le but de ce cours est d'introduire et de démontrer le théorème de complétude de la logique de premier ordre qui peut s'énoncer ainsi :

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ si et seulement si } \Gamma \models \varphi.$$

Il exprime l'équivalence entre le fait que la formule φ est prouvable par l'ensemble d'hypothèses Γ et le fait que φ découle sémantiquement de Γ. Pour faire cela, il faudra formaliser certaines notions et réaliser la différentiation entre syntaxe et sémantique. D'un coté on a une notion de conséquence "syntaxique" (la preuve) dont on verra qu'elle est elle-même un objet mathématique particulier (en particulier un arbre fini) et de l'autre une notion de conséquence sémantique, qui repose sur le fait de regarder les modèles dans lesquels les hypothèses sont vérifiées et s'assurer que dans chacun d'eux la conséquence (la formule) l'est également.

Ainsi l'énoncé

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ si et seulement si } \Gamma \models \varphi.$$

pourra se comprendre comme

il existe une preuve de φ *à partir des hypothèses* Γ

si et seulement si

φ *est vraie dans tous les modèles qui satisfont les hypothèses* Γ.

Bien sûr, l'énoncé $\Gamma \nvdash \varphi$ si et seulement si $\Gamma \not\models \varphi$ est équivalent au précédent. Il se lit

il n'existe pas de preuve de φ *à partir des hypothèses* Γ

si et seulement si

il existe un modèle qui satisfait les hypothèses Γ *mais ne satisfait pas* φ.

Un tel modèle s'appelle un contre-exemple. Grâce à ce théorème de complétude, prouver que l'on ne peut pas prouver revient à produire un contre-exemple.

1. *"Consistency is the Last Refuge of the Unimaginative."* Oscar Wilde *"The Relation of Dress to Art"* in Pall Mall Gazette (2/28/1885).

2 Préambule

Dans ce cours, nous ne nous intéresserons pas à la théorie axiomatique des ensembles (c'est le sujet d'un cours à part entière). Toutefois, nous présentons un premier aperçu de ce que l'on pourrait appeler la théorie naïve des ensembles en explicitant qu'un ensemble est une collection d'objets dont on peut montrer l'existence en utilisant les propriétés (axiomes) suivant(e)s [2]. Le but de cette présentation naïve est de s'accorder sur certaines notions fondamentales qui vont revenir tout le semestre.

Axiome 1 (Existence)**.** Il existe un ensemble.

Axiome 2 (Extensionnalité)**.** Soit x et y deux ensembles, alors $x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$.

Axiome 3 (Schéma d'axiomes de compréhension)**.** Si A est un ensemble et P est une propriété exprimable dans le langage de la théorie des ensembles, alors l'ensemble $\{x \in A \mid P(x)\}$ existe.

A noter que l'on parle de schéma d'axiomes plutôt que d'axiome car en fait il y en a une infinité : il y en a autant qu'il y a de propriété à considérer. Pour que cette remarque fasse sens, il faudrait définir proprement ce qu'est une propriété. Mais cela requiert la logique du premier ordre que l'on est précisément en train d'introduire. Donc, chaque chose en son temps !
Paradoxe de Russell : Attention, toute collection d'objets n'est pas un ensemble. Par exemple, la collection E de tous les ensembles n'est pas un ensemble. Pour voir cela, procédons par l'absurde et supposons que cette collection E soit effectivement un ensemble. Par l'axiome de compréhension, on peut alors former l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas, c'est-à-dire l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin x\}$. Puisque A est un ensemble, $A \in E$. On peut donc se demander si $A \in A$. Si $A \in A$, par définition de A cela signifie que $A \notin A$, une contradiction. Or si $A \notin A$, cela signifie, à nouveau par définition de A, que $A \in A$, encore une contradiction. D'où l'on en déduit que la collection E de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

Axiome 4 (Infini)**.** $\mathbb{N}$ est un ensemble.

Axiome 5 (Paire)**.** Si x et y sont des ensembles, alors il existe un ensemble $\{x, y\}$.

Soient x et y des ensembles. On peut définir le *couple* (ou paire ordonnée) (x, y) comme l'ensemble :

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

2. Noter que la plupart de ces axiomes semblent totalement naturel à tout mathématicien.

Il s'agit là d'une représentation comme une autre. Dans la notion de couple il est primordial de distinguer le premier élément du second. On vérifie aisément que pour tous ensembles x, y, on a $(x, y) = (x', y')$ si et seulement si à la fois $x = x'$ et $y = y'$.

Axiome 6 (Union, intersection)**.** Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles indicée par un ensemble d'indices I.

(1) Il existe l'*union* des éléments de cette famille, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, est définie par
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists j \in I \quad x \in A_j\}.$$

(2) Il existe l'*intersection* des éléments de cette famille, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$, est définie par
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall j \in I \quad x \in A_j\}.$$

Axiome 7 (Ensemble des parties)**.** Soit A un ensemble. Il existe $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des parties de A, défini par :

$$\mathscr{P}(A) = \{B : \forall x \ (x \in B \to x \in A)\}$$

À l'aide des axiomes précédents, on peut montrer l'existence du

Definition 2.1 (Produit cartésien)**.** Soient A et B deux ensembles. On définit le *produit cartésien* de A avec B, noté $A \times B$, qui est par définition l'ensemble

$$A \times B = \{(u, v) \in \mathscr{P}\Big(\mathscr{P}(A \cup B)\Big) \mid u \in A \text{ et } v \in B\}.$$

(On rappelle que $(u, v) = \big\{\{u\}, \{u, v\}\big\}$.)

Axiome 8 (Fondation)**.** Il n'existe pas de suite infinie d'ensembles vérifiant

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots \ni x_n \ni x_{n+1} \ni \ldots\ldots$$

En particulier, pour tout ensemble x on n'a jamais $x \in x$.

Axiome 9 (Remplacement)**.** Pour tout ensemble A et toute propriété $P(x, y)$ – écrite dans le langage de la théorie des ensembles – qui vérifie que, pour tout $x \in A$ si $P(x, y)$ et $P(x, z)$ alors $y = z$ [3], la collection $\{y \mid \exists x \in A \ P(x, y)\}$ est un ensemble.

Axiome 10 (Choix)**.** Soit I un ensemble (d'indices) et pour chaque $i \in I$ un ensemble *non vide* A_i. Il existe une fonction (de choix) $\mathcal{C} \mid I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ telle que pour chaque $i \in I$, $\mathcal{C}(i) \in A_i$.

3. La propriété P se comporte comme une fonction.

Definition 2.2 (Fonction, application)**.** Une *fonction (partielle)* f de *domaine* A et de *codomaine* B, notée $f : A \longrightarrow B$, est un sous-ensemble de $A \times B$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A\ \forall y \in B\ \forall y' \in B\ \Big(\big((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f\big) \to y = y'\Big).$$

Une *application* ou *fonction (totale)* est une fonction partielle vérifiant de plus la condition qui la rend totale :

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ (x,y) \in f.$$

Lorsqu'on parlera d'une *fonction*, on entendra toujours par là *"fonction totale"*. Nous préciserons les rares cas où nous parlerons de fonctions partielles.

Notation 2.3. On notera souvent $f(x) = y$ pour $(x,y) \in f$.

Definition 2.4 (Injection, surjection, bijection)**.** Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite

(1) *injective* si $\forall x, x' \in A, \big(f(x) = f(x') \to x = x'\big)$;

(2) *surjective* si $\forall y \in B, \big(\exists x\ (x \in A \wedge f(x) = y)\big)$;

(3) *bijective* si elle est injective et surjective.

Definition 2.5 (Infini, dénombrable, non dénombrable)**.** Soit A un ensemble. Il est dit

(1) *infini*[4] s'il existe une injection $i : \mathbb{N} \to A$;

(2) *dénombrable* s'il existe une injection $i : A \to \mathbb{N}$;

(3) *non dénombrable* s'il est infini et non dénombrable.

Definition 2.6 (Equipotence)**.** Deux ensembles A et B sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de A vers B.

Notation 2.7. On notera

- $A \approx B$ le fait que A et B sont équipotents ;
- $A \lesssim B$ le fait qu'il existe une injection de A dans B ;
- $A \lesssim\!\!\!\!\!\!\not\ \ B$ pour $A \lesssim B$ et $B \not\lesssim A$. (On pourra également utiliser $A < B$.)

Le Théorème 2.9 ci-dessous dit précisément que $A \approx B$ est vérifié exactement lorsque à la fois $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$ le sont.

Deux ensembles finis sont équipotents précisément lorsqu'ils ont le même nombre d'éléments. A priori, il semble que pour les ensembles infinis ils soient tous équipotents entre eux. Il n'en est rien !

4. On pourra préférer à cette définition celle qui dit qu'un ensemble est infini s'il existe une injection de cet ensemble sur l'un de ses sous-ensembles propres. Cette définition est meilleure en ce qu'elle ne procure pas un "bon ordre" des éléments de A.

Theorème 2.8 (Cantor)**.** *Soit A un ensemble. Il n'existe pas de surjection de A sur $\mathscr{P}(A)$.*

Démonstration. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe une surjection $f : A \to \mathscr{P}(A)$ et l'on construit :

$$B = \{a \in A : \ a \notin f(a)\}$$

Puisque f est surjective il existe $b \in A$ tel que $f(b) = B$. On obtient alors la contradiction suivante : $b \in B$ si et seulement si $b \notin B$.

□

Theorème 2.9 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Soient A et B deux ensembles. S'il existe deux injections $i : A \xrightarrow{inj.} B$ et $j : B \xrightarrow{inj.} A$, alors il existe une bijection $h : A \xrightarrow{bij.} B$.*

Démonstration. Remarquer tout d'abord que le théorème est trivial pour $A = B$. Si $A \neq B$, on procède en deux temps. On prouve tout d'abord un cas particulier puis l'on prouve que le cas général se ramène très facilement au cas particulier.

Cas particulier, $B \subsetneq A$:

On suppose tout d'abord que B est inclus dans A. On construit ensuite par récurrence :

- $C_0 = A \setminus B$,
- $C_{n+1} = i[C_n]$,
- $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

On définit alors $h : A \longrightarrow B$ comme étant l'identité sur $A \setminus C$ et i sur C. h est bien à valeurs dans B puisque :

- si un élément appartient à $A \setminus C$, il n'appartient pas à C_0 donc il appartient à B ;
- i est à valeurs dans B.

h est injective puisque l'identité sur $A \setminus C$ est injective et i sur C est également une fonction injective de C sur C. Par ailleurs h est également surjective car pour tout y dans B :

- si $y \notin C$, alors $h(y) = y$;
- si $y \in C$, alors il existe un entier n tel que $y \in C_n$, de plus n est non nul car $y \in B$ et $C_0 = A \setminus B$. Par conséquent, il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $i(x) = y$.

Cas général :

On considère alors $B' = j[B]$ et par le cas précédent on obtient une bijection $h : A \longleftrightarrow B'$. Comme $j : B \longleftrightarrow B'$ est bijective, il ressort que $j^{-1} \circ h : A \longleftrightarrow B$ est également bijective. □

Definition 2.10 (Suite finie)**.** Soit A un ensemble non vide, et n un entier. On note par A^n l'ensemble des *suites finies*[5] $s = (s(0), s(1), \ldots, s(n-1)) = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ de longueur n sur A, on note $long(s) = n$. En particulier, $A^0 = \{\varepsilon\}$, où ε désigne la suite vide. Si s est de longueur n, alors pour tout entier m inférieur à n on peut définir la *restriction* de s de longueur m, désignée par $s|m$, comme étant la sous-suite $(s_0, \ldots, s_{m-1})$ de s.

Si s et t sont deux suites finies sur A, on dit que s est un *segment initial* (ou encore *préfixe*) de t, ou que t est une *extension* de s, noté $s \sqsubseteq t$, s'il existe un entier $n \leq long(t)$ tel que $t|n = s$.

On note $A^{<\omega}$ (ou A^* pour les informaticiens) l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ de toutes les suites finies sur A.

Soient $s \in A^n$ et $u \in A^m$, la *concaténation* de s et u est la suite

$$s^\frown u = (s_0, \ldots, s_{n-1}, u_0, \ldots, u_{m-1})$$

de A^{n+m}. On note $s^\frown a$ au lieu de $s^\frown(a)$ si $(a) \in A^1$.

Definition 2.11 (Arbre, arbre de hauteur finie)**.** Un *arbre* sur un ensemble A est un sous-ensemble T de $A^{<\omega}$ clos par préfixes, c'est à dire tel que pour tous t et s dans $A^{<\omega}$, si t appartient à T et que s est un segment initial de t, alors s appartient aussi à T.

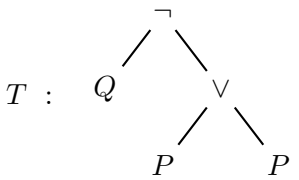
Les éléments d'un arbre sont appelés ses *nœuds*. Si s est un nœud de T, les *fils* du nœud s sont les nœuds de la forme $s^\frown a \in T$ pour un certain $a \in A$.

Les nœuds de T qui n'admettent pas d'extension propre dans T sont appelés les *feuilles* de T.

Un arbre $T \subseteq A^{<\omega}$ est dit de *hauteur finie* s'il existe un naturel n tel que $T \subseteq A^{\leq n} = \bigcup_{j\leq n} A^j$. Le plus petit n tel que $T \subseteq A^{\leq n}$ est appelé la *hauteur* de T.

Si T est de hauteur finie, une branche de T est une suite finie de nœuds $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ telle que n_0 est la suite vide, pour chaque $i < k$ n_{i+1} est un fils de n_i, et n_k est une feuille. La hauteur de T coïncide avec la longueur maximum des branches de T.

Nous allons généralement considérer des arbres comme celui-ci :

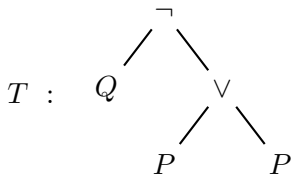


Cet arbre n'est pas à proprement parler un arbre sur un ensemble au sens de la Définition 2.11. Nous les voyons comme des arbres sur lesquels on est venu apposer des étiquettes :

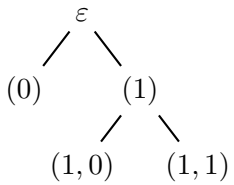
5. Nous verrons plus tard une notion bien plus générale de suite, les suites transfinies — voir Définition 7.29.

Definition 2.12. Un *arbre étiqueté* est un couple (T, j) où T est un arbre sur un certain ensemble A et $j : T \to E$ est une fonction de T vers un certain ensemble d'étiquettes E.

Par abus de terminologie, nous appellerons souvent « arbre » ce qui serait plus juste d'appeler un « arbre étiqueté ». De plus, en décrivant un arbre étiqueté (T, j) on omettra toujours la description de l'arbre T et de l'ensemble sur lequel celui-ci est construit. Pour comprendre que cela ne pose pas de problèmes, reprenons l'exemple de l'arbre



Formellement, nous pouvons le voir comme l'arbre étiqueté (S, j) où S est l'arbre sur $2 = \{0, 1\}$ donné par $S = \{\varepsilon, (0), (1), (1, 0), (1, 1)\}$ et que l'on se représent comme suit



et où l'étiquetage j à image dans l'ensemble d'étiquettes $E = \{\neg, Q, \vee, P\}$ est décrit par

$$\begin{aligned} j : S &\longrightarrow E \\ \varepsilon &\longmapsto \neg \\ (0) &\longmapsto Q \\ (1) &\longmapsto \vee \\ (1,0) &\longmapsto P \\ (1,1) &\longmapsto P. \end{aligned}$$

Toutefois, la description de S et de j ne sont pas nécessaires et seront en général omises.

3 Syntaxe

Dans cette partie, nous allons définir ce que sont le langage, les termes, puis les formules ainsi que la substitution.

Definition 3.1 (Arité)**.** L'*arité* d'une fonction $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} \longrightarrow B$ est l'entier n.

Exemple 3.2.
- L'addition sur les entiers est une fonction d'*arité* 2.
- L'exponentielle sur les réels et une fonction d'*arité* 1.

3.1 Langage, termes et formules

Definition 3.3 (Langage)**.** Un *langage du calcul des prédicats du premier ordre* est composé :

(i) D'un ensemble de variables : $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ [6] (en particulier, l'ensemble des variables est dénombrable).

(ii) De connecteurs logiques : $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(iii) De quantificateurs : $\{\forall, \exists\}$.

(iv) De parenthèses.

(v) D'un ensembles de symboles de constantes : $\{c_0, c_1, \ldots\}$.

(vi) D'un ensemble de symboles de fonctions d'arité quelconque (mais finie) : $\left\{f_0^{(n_0)}, f_1^{(n_1)}, \ldots\right\}$ (n_i représente l'arité de la $i^{\text{ème}}$ fonction).

(vii) Un ensemble de symboles de relations d'arité quelconque (mais finie) : $\left\{R_0^{(m_0)}, R_1^{(m_1)}, \ldots\right\}$.

Remarque 3.4. On formule les remarques suivantes :
- Les points (i) à (iv) de la définition précédente sont le plus souvent sous-entendus et non spécifiés.
- Les ensembles des points (v) à (vii) constitue la *signature* du langage. Celle-ci peut aussi bien être réduite au minimum qu'être non dénombrable.
- Les symboles de constantes peuvent également être considérés comme des symboles de fonctions d'arité 0.
- Lorsque la relation d'égalité fait partie du langage, on parle alors d'un langage *égalitaire* ou d'un langage *avec égalité*.

Exemple 3.5. On pourra prendre comme langage de la théorie des groupes :

$$\mathscr{L}_{\text{grp}} = \left\{f^{(2)}, s^{(1)}, c\right\}.$$

Ces symboles correspondent respectivement, à l'opération interne (l'addition de deux éléments), l'inverse (d'un élément) et l'élément neutre.

6. par la suite on se permettra d'utiliser x,y,z, ou toute autre lettre qui nous semblera commode pour dénoter des variables.

Definition 3.6 (Termes)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre quelconque. L'ensemble des *termes* de $\mathscr{L}$, noté $\mathscr{T}(\mathscr{L})$, est le plus petit ensemble vérifiant :

- les variables et les constantes de $\mathscr{L}$ sont dans $\mathscr{T}(\mathscr{L})$;
- pour toute fonction n-aire $f^{(n)}$ de $\mathscr{L}$ et pour tous termes $t_1, \ldots, t_n$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

Remarque 3.7. L'ensemble $\mathscr{T}(\mathscr{L})$ est un ensemble de mots finis sur l'alphabet $\mathscr{L}$. Lorsque, dans la définition ci-dessus, on écrit $f(t_1, \ldots, t_n)$, on parle de cette succession de symboles sans lui attribuer un sens.

Definition 3.8 (Hauteur d'un terme)**.** La *hauteur d'un terme* est définie de la manière suivante :

- les variables et les constantes sont de hauteur 0 ;
- si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de hauteur $h_1, \ldots, h_n$ et f un symbole de fonction n-aire, alors la hauteur du terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ est $1+\max\{h_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Notation 3.9. Pour indiquer qu'un terme t est de hauteur h, on notera souvent $\mathrm{ht}(t) = h$.

Definition 3.10 (Formule atomique)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre. Une *formule atomique* est une suite (finie) de symboles de $\mathscr{L}$ composée :

- d'une relation d'arité quelconque n ;
- d'une parenthèse ouvrante ;
- de n termes séparés par des virgules ;
- d'une parenthèse fermante.

On note $\mathscr{A}(\mathscr{L})$ l'ensemble des formules atomiques de $\mathscr{L}$.

Exemple 3.11. Voici des exemples de formules atomiques, si $\mathscr{L} = \{P^{(1)}, R^{(2)}, f^{(1)}, c^{(0)}\}$:

$$P(c),\ P\big(f(x)\big),\ R(c, f(c)),\ R(f(f(c)), x),\ P(f(f(f(y)))).$$

Definition 3.12 (Ensemble des formules)**.** L'*ensemble des formules* d'un langage du premier ordre $\mathscr{L}$ est le plus petit ensemble $X \subseteq \mathscr{L}^{<\omega}$ vérifiant :

- Toutes les formules atomiques sont dans X.
- Si φ et ψ sont dans X, alors

$$\neg\varphi,\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \to \psi) \text{ et } (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

  sont dans X.
- Soit x une variable et $\varphi \in X$, alors $\forall x\ \varphi$ et $\exists x\ \varphi$ sont dans X.

L'ensemble des formules de $\mathscr{L}$ est noté $\mathscr{F}(\mathscr{L})$.

3.2 Arbre de décomposition d'une formule

Definition 3.13 (Arbre de décomposition)**.** Soit φ une formule du premier ordre. L'*arbre de décomposition* de φ, noté T_φ, est défini par induction :

* Si φ est une formule atomique :

$$\varphi$$

* Si φ est de la forme $\neg\psi$:

$$\begin{array}{c} \neg \\ | \\ T_\psi \end{array}$$

* Si φ est de la forme $Qx\ \psi$, où $Q \in \{\exists, \forall\}$:

$$\begin{array}{c} Qx \\ | \\ T_\psi \end{array}$$

* Si φ est de la forme $\varphi_0 \star \varphi_1$, où $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$:

$$\begin{array}{ccc} & \star & \\ \swarrow & & \searrow \\ T_{\varphi_0} & & T_{\varphi_1} \end{array}$$

Definition 3.14 (Hauteur d'une formule)**.** Il s'agit de la longueur de la (les) plus longue(s) branche(s) de son arbre de décomposition.

Definition 3.15 (Sous-formule)**.** Une *sous-formule* ψ d'une formule φ est une sous-suite consécutive de symboles de φ qui est une formule.

Proposition 3.16. *Il y a une correspondance bijective entre les sous-formules d'une formule et les noeuds de son arbre de décomposition.*

3.3 Variables libres et variables liées

Definition 3.17 (Occurrence liée)**.** Dans une formule φ, une occurrence de la variable x (dans une feuille de l'arbre de décomposition de φ) est *liée* si en remontant de cette feuille vers la racine on rencontre un nœud de la forme Qx avec $Q \in \{\forall, \exists\}$. Une occurrence liée de la variable x est *quantifiée universellement* dans φ si le premier nœud de la forme Qx, en remontant de la feuille où se trouve l'occurence de x considérée, est $\forall x$, sinon elle est *quantifiée existentiellement.*

Definition 3.18 (Occurrence libre)**.** L'occurrence d'une variable x est dite *libre* si elle n'est pas liée.

Definition 3.19 (Variable libre, variable liée)**.** Une variable est *libre* dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre. Dans le cas contraire, elle est dite *liée*.

3.4 Formule close et clôture universelle

Definition 3.20 (Formule close)**.** Une formule est dite *close* si elle ne possède aucune variable libre.

Definition 3.21 (Clôture universelle)**.** Soit φ une formule dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n$. La *clôture universelle* de φ est :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi.$$

3.5 Substitution

Definition 3.22 (Substitution dans les termes)**.** Soient $x_1, \ldots, x_k$ des variables deux-à-deux distinctes et $t, t_1, \ldots, t_k$ des termes. Le résultat de la substitution des termes $t_1, \ldots, t_k$ aux variables $x_1, \ldots, x_k$ dans le terme t est noté $t\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right]$. Plus précisément :

(i) Si $\mathrm{ht}(t) = 0$,
   (a) si $t = x_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ alors $t\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right] = t_i$;
   (b) si $t \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$ alors $t\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right] = t$.

(ii) Si $\mathrm{ht}(t) > 0$, alors par définition il existe un entier n et des termes $u_1, \ldots, u_n$ tels que $t = f(u_1, \ldots, u_n)$ et on définit

$$t\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right] = f\left(u_1\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right], \ldots, u_n\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right]\right).$$

Definition 3.23 (Substitution dans les formules)**.** Soient φ une formule, $x_1, \ldots, x_k$ des variables deux-à-deux distinctes et $t_1, \ldots, t_k$ des termes. Le résultat de la substitution des termes $t_1, \ldots, t_k$ aux occurrences libres des variables $x_1, \ldots, x_k$ dans la formule φ est noté $\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right]$. Plus précisément :

(i) Si $\mathrm{ht}(\varphi) = 0$, alors φ est une formule atomique et il existe un entier n et des termes $u_1, \ldots, u_n$ tels que $\varphi = R(u_1, \ldots, u_n)$. On définit alors

$$\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right] = R\left(u_1\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right], \ldots, u_n\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right]\right).$$

(ii) Si $\mathrm{ht}(\varphi) > 0$, alors
   (a) si $\varphi = \neg\psi$, alors $\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right] = \neg\psi\left[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\right]$;

(b) si $\varphi = (\psi_0 \star \psi_1)$ avec $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, alors

$$\varphi\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big] = \Big(\psi_0\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big] \star \psi_1\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big]\Big);$$

(c) si $\varphi = (Qx\ \psi)$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$, alors plusieurs cas se présentent :

- si $x \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$ alors

$$\varphi\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big] = \Big(Qx\ \psi\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big]\Big);$$

- si $x = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ alors

$$\varphi\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big] = \Big(Qx\ \psi\big[t_1/x_1,\ldots,t_{i-1}/x_{i-1},t_{i+1}/x_{i+1},\ldots,t_k/x_k\big]\Big).$$

En général, $\varphi_{[t/x]}$ dit la même chose au sujet de ce qui est représenté par t que φ dit au sujet de ce qui est représenté par x. Toutefois, ce n'est pas toujours le cas, comme il est possible de s'en rendre compte en considérant par exemple $\exists y\ x = 2{\cdot}y$ pour φ, x pour x et $y{+}1$ pour t. La difficulté provient du fait que l'occurrence de y dans $y + 1$ est devenue liée après substitution. Nous souhaitons exclure ce genre de cas.

Definition 3.24. Nous disons qu'un terme t est *substituable* à la variable x dans la formule φ, si pour toute variable y apparaissant dans t il n'y a pas de sous-formule de φ de la forme $Qy\psi$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$ dans laquelle x possède une occurrence libre.

Remarquons que t est toujours substituable à x dans φ si t ne continent pas de variables ou si φ ne contient pas de quantificateurs. Nous faisons la convention suivante :

Convention 3.25. *Chaque fois que nous écrivons* $\varphi\big[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k\big]$ *il est sous-entendu que* t_i *est substituable à* x_i *dans* φ *pour tout* $i = 1, \ldots, k$. *Si tel n'est pas le cas, il est sous-entendu que nous avons préalablement substitué aux occurrences liées des variables apparaissant dans* φ *des variables n'apparaissant pas dans* $t_1, \cdots, t_k$.

4 Sémantique

Dans cette partie, nous allons donner un sens, interpréter la syntaxe.

4.1 Réalisation d'un langage

Definition 4.1 ($\mathscr{L}$-réalisation)**.** Soit $\mathscr{L} = \{c_i, f_j^{(n_j)}, R_k^{(n_k)}\}$ un langage du premier ordre. Une *$\mathscr{L}$-réalisation* (ou *$\mathscr{L}$-structure*) est une suite

$$\mathscr{M} = \left\langle M, {c_i}^{\mathscr{M}}, (f_j^{(n_j)})^{\mathscr{M}}, (R_k^{(n_k)})^{\mathscr{M}} \right\rangle$$

où l'on a :

(i) $M = |\mathscr{M}|$ est un ensemble non vide appelé *domaine de base* ;

(ii) ${c_i}^{\mathscr{M}}$ est un élément du domaine pour chaque symbole de constante c_i de $\mathscr{L}$;

(iii) $(f_j^{(n_j)})^{\mathscr{M}}$ est une fonction $(f_j^{(n_j)})^{\mathscr{M}} : M^{n_j} \longrightarrow M$, pour tout symbole de fonction $f_j^{(n_j)}$ de $\mathscr{L}$;

(iv) $(R_k^{(n_k)})^{\mathscr{M}}$ est une relation $(R_k^{(n_k)})^{\mathscr{M}} \subseteq M^{n_k}$ pour tout symbole de relation $R_k^{(n_k)}$ dans $\mathscr{L}$;

Exemple 4.2. Soit $\mathscr{L} = \{c, f^{(2)}, R^{(2)}\}$. Voici deux $\mathscr{L}$-réalisations :

(i) $\mathscr{M} = \langle \mathbb{N}, c^{\mathscr{M}}, f^{\mathscr{M}}, R^{\mathscr{M}} \rangle$ où $c^{\mathscr{M}} = 0, f^{\mathscr{M}} = +_{\mathbb{N}}$ et $R^{\mathscr{M}} = \leq_{\mathbb{N}}$;

(ii) $\mathscr{N} = \langle \mathbb{Z}, c^{\mathscr{N}}, f^{\mathscr{N}}, R^{\mathscr{N}} \rangle$ où $c^{\mathscr{N}} = 3, f^{\mathscr{N}}$ est définie par $f^{\mathscr{N}}(a, b) = 0$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ et $R^{\mathscr{N}} = \emptyset$.

Remarque 4.3. On rappelle que les ensembles de constantes, fonctions et relation peuvent être indénombrable, malgré la notation...

Definition 4.4 (Langage égalitaire)**.** On dit qu'un langage du premier ordre $\mathscr{L}$ est *égalitaire* lorsque le symbole d'égalité $\simeq$ appartient à $\mathscr{L}$ et que l'on convient que l'interprétation de $\simeq$ dans toute $\mathscr{L}$-réalisation $\mathscr{M}$ est la diagonale de $|\mathscr{M}|$, c'est à dire,

$$\simeq^{\mathscr{M}} = \{(m, m) : m \in |\mathscr{M}|\}.$$

4.2 Évaluation d'une formule dans une structure

Definition 4.5. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre, $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathscr{M}|$ et t un terme de $\mathscr{L}$ dont les variables sont parmi $x_1, \ldots, x_n$. On définit $t^{\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n} \in |\mathscr{M}|$, l'évaluation de t dans la $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ avec interprétation des variables $x_1, \ldots, x_n$ par $a_1, \ldots, a_n$ respectivement, par induction sur la hauteur de t :

$*$ Si $t = x_i$, $t^{\mathscr{M}-} = a_i$.

∗ Si $t = c$, $t^{\mathscr{M}_-} = c^{\mathscr{M}}$.

∗ Si $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, alors $t^{\mathscr{M}_-} = f^{\mathscr{M}}\left(t_1^{\mathscr{M}_-}, \ldots, t_k^{\mathscr{M}_-}\right)$

où $\mathscr{M}_-$ est un raccourci pour $\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n$.

Definition 4.6. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre, $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure, φ une formule dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in |\mathscr{M}|$. On note

$$\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n \models \varphi$$

le fait que φ est satisfaite dans $\mathscr{M}$ lorsque les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont respectivement interprétées par $a_1, \ldots, a_n$, ce qui se définit par induction sur la hauteur de φ, $\mathrm{ht}(\varphi)$:

∗ Si $\varphi = R\big(t_1, \ldots, t_k\big)$, alors $\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n \models \varphi$ si et seulement si

$$\left(t_1^{\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n}, \ldots, t_k^{\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n}\right) \in R^{\mathscr{M}}.$$

∗ Si $\varphi = \neg\psi$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \mathscr{M}_- \not\models \psi.$$

∗ Si $\varphi = (\varphi_0 \vee \varphi_1)$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \big(\mathscr{M}_- \models \varphi_0 \text{ ou } \mathscr{M}_- \models \varphi_1\big).$$

∗ Si $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \big(\mathscr{M}_- \models \varphi_0 \text{ et } \mathscr{M}_- \models \varphi_1\big).$$

∗ Si $\varphi = (\varphi_0 \to \varphi_1)$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \big(\mathscr{M}_- \not\models \varphi_0 \text{ ou } \mathscr{M}_- \models \varphi_1\big).$$

∗ Si $\varphi = (\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1)$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \Big(\big(\mathscr{M}_- \models \varphi_0 \text{ et } \mathscr{M}_- \models \varphi_1\big) \text{ ou } \big(\mathscr{M}_- \not\models \varphi_0 \text{ et } \mathscr{M}_- \not\models \varphi_1\big)\Big).$$

∗ Si $\varphi = \exists x\ \psi$, où $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \big(\text{il existe } a \in |\mathscr{M}| \text{ tel que } \mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n, a/x \models \psi\big).$$

∗ Si $\varphi = \forall x\ \psi$, où $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors

$$\mathscr{M}_- \models \varphi \text{ ssi } \big(\text{pour tout } a \in |\mathscr{M}| \text{ on a } \mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n, a/x \models \psi\big).$$

∗ Si $\varphi = \exists x_i\ \psi$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors

$$\begin{gathered}\mathscr{M}_- \models \varphi \\ \text{ssi il existe } a \in |\mathscr{M}| \text{ tel que} \\ \mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_{i-1}/x_{i-1}, a/x_i, a_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, a_n/x_n \models \psi.\end{gathered}$$

$*$ Si $\varphi = \forall x_i\ \psi$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors

$$\mathscr{M}_{-} \models \varphi$$
ssi pour tout $a \in |\mathscr{M}|$ on a
$$\mathscr{M}, a_1/x_1, \ldots, a_{i-1}/x_{i-1}, a/x_i, a_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, a_n/x_n \models \psi.$$

Definition 4.7. Soit φ et ψ des formules closes.

(i) On dit que φ est *universellement valide* si pour toute $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$, on a $\mathscr{M} \models \varphi$.

(ii) On dit que φ est *contradictoire* (ou *inconsistante)* si pour toute $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$, on a $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(iii) On dit que φ est *équivalente* à ψ, ce que l'on note $\varphi \equiv \psi$, si pour toute $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ on a $\mathscr{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Proposition 4.8.

- *Soient $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ des formules closes telles que $\varphi \equiv \varphi'$ et $\psi \equiv \psi'$. On a alors :*
  - (i) $\neg\varphi \equiv \neg\varphi'$;
  - (ii) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi' \vee \psi')$;
  - (iii) $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi' \wedge \psi')$;
  - (iv) $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi' \to \psi')$;
  - (v) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi' \leftrightarrow \psi')$.
- *Soit φ une formule dont les variables libres sont incluses dans $\{x\}$. On a alors :*
  - (i) $\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\varphi$;
  - (ii) $\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi$.
- *Soit φ une formule telle que y n'apparait pas dans φ. on a alors :*
  - (i) $\exists x\ \varphi \equiv \exists y\ \varphi_{[y/x]}$;
  - (ii) $\forall x\ \varphi \equiv \forall y\ \varphi_{[y/x]}$.

Proposition 4.9 (Propriétés des connecteurs)**.** *Soient φ, ψ, θ des formules closes.*

- Idempotence *de la conjonction et de la disjonction :*
  $\varphi \equiv (\varphi \wedge \varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi)$.
- Commutativité *de $\wedge, \vee, \leftrightarrow$:*
  - (i) $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$;
  - (ii) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
  - (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\psi \leftrightarrow \varphi)$.
- Associativité *de $\wedge, \vee, \leftrightarrow$:*
  Si $\star \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$, $((\varphi \star \psi) \star \theta) \equiv (\varphi \star (\psi \star \theta))$.
- Distributivité *entre conjonction et disjonction :*

(i) $(\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta))$;

(ii) $(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$;

- Lois de De Morgan :

  (i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;

  (ii) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

- Contraposée :
  $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.
- $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$.

Remarque 4.10. Les parenthèses ne doivent pas être omises ou déplacées dans certains cas. En effet, si φ et ψ sont deux formules avec x n'apparaissant pas dans ψ,

$$(\exists x\ \varphi \to \psi) \not\equiv \exists x\ (\varphi \to \psi).$$

Comme le montre le cas particulier $\varphi :=$ "$x = c$" et $\psi :=$ "$\neg c = c$", puisque dans toute structure avec au moins deux éléments : $(\exists x\ \varphi \to \psi)$ est fausse alors que $\exists x\ (\varphi \to \psi)$ est vraie.

4.3 Théories et conséquence sémantique

Definition 4.11 (Théorie)**.** Une théorie de $\mathscr{L}$ est un ensemble de formules closes de $\mathscr{L}$.

- On dit qu'une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ est **modèle** d'une théorie $\mathscr{T}$ (noté $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$) si chaque formule de $\mathscr{T}$ est satisfaite dans $\mathscr{M}$.
- Une théorie est dite **consistante** (ou satisfaisable) si elle possède un modèle. Elle est dite **inconsistante** si elle n'en possède aucun.
- Une théorie est dite **finiment consistante** si chacune de ses sous parties finies possède un modèle.
- Une formule est dite **universellement valide** si sa clôture universelle φ est satisfaite dans tous modèles. Autrement dit si $\{\neg\varphi\}$ est une théorie inconsistante.

Definition 4.12. $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont deux $\mathscr{L}$-théories équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites dans les mêmes $\mathscr{L}$-structures.

On notera $\mathscr{T} \equiv \mathscr{T}'$ le fait qu'elles soient équivalentes.

Definition 4.13 (Conséquence sémantique)**.** Une théorie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{L}$ a pour conséquence sémantique la formule close φ de $\mathscr{L}$ si toute $\mathscr{L}$-structure satisfaisant $\mathscr{T}$ satisfait également φ.

Dans le cas où φ n'est pas close, on dira que $\mathscr{T}$ a pour conséquence sémantique φ si $\mathscr{T}$ a pour conséquence sémantique la clôture universelle de φ.

On notera $\mathscr{T} \models \varphi$ le fait que φ est conséquence sémantique de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T} \not\models \varphi$ sa négation.

Remarque 4.14.

- Si $\mathscr{T}$ est satisfaisable et $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$, alors $\mathscr{T}'$ est également satisfaisable car tout modèle de $\mathscr{T}$ est également un modèle de $\mathscr{T}'$.
- Si $\mathscr{T}$ est satisfaisable, alors toute théorie *finie* $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$ est satisfaisable.
- $\mathscr{T} \models \varphi$ ssi $\mathscr{T} \cup \{\neg\varphi\}$ est inconsistante.
- Si $\mathscr{T}'$ est inconsistante et $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$, alors $\mathscr{T}$ est inconsistante.
- Si $\mathscr{T}' \models \varphi$ et $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$, alors $\mathscr{T} \models \varphi$.
- $\mathscr{T} \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\mathscr{T} \models (\varphi \to \psi)$.
- $\mathscr{T}$ est inconsistante ssi pour *toute formule* φ, $\mathscr{T} \models \varphi$.
- $\mathscr{T}$ est inconsistante ssi il existe une *contradiction* φ, telle que $\mathscr{T} \models \varphi$.
- φ est universellement valide ssi $\emptyset \models \varphi$.
- φ est universellement valide ssi pour *toute théorie* $\mathscr{T}$, $\mathscr{T} \models \varphi$.
- En remplaçant dans $\mathscr{T}$ chaque formule par une formule logiquement équivalente, on obtient une théorie équivalente à $\mathscr{T}$.
- $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ est une théorie inconsistante ssi la formule
$$\Big(\neg\varphi_0 \vee \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_k\Big)$$
est universellement valide.
- $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ et $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ sont deux théories équivalentes
si et seulement si
$\Big((\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \leftrightarrow (\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)\Big)$ est universellement valide
si et seulement si
$(\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \equiv (\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$

4.4 Jeu d'évaluation d'une formule

Dans cette section, on va donner une définition alternative de l'évaluation d'une formule, en utilisant la théorie des jeux. Pour commencer, quelques mots sur la théorie des jeux.

4.4.1 Théorie des jeux

Nous allons considérer des *jeux à deux joueurs à information parfaite* un jeu :

- opposant deux joueurs ;
- dont le déroulement est séquentiel [7] ;
- dont tous les éléments sont connus par chacun des deux joueurs à tout moment du déroulement (jeu à information complète) ;
- où le hasard n'intervient pas pendant le déroulement du jeu.

Exemples 4.15. (i) Le jeux d'échec est un jeu de ce type.

(ii) Le poker n'est pas de ce type, parce qu'il oppose plus que deux joueurs, et que l'information n'est pas complète (ni la main des autres joueurs ni le contenu de la pioche n'est connu).

(iii) Le dilemme du prisonnier [8] n'est pas de ce type parce que les joueurs jouent simultanément.

Definition 4.16 (Jeu en temps fini)**.** Un jeu est dit *en temps fini* s'il existe un naturel n tel que toute partie se déroule en au plus n coups.

Exemple 4.17. Le jeu d'échec est un jeu en temps fini car une règle indique que si 50 coups sont joués sans prise ni mouvement de pion, alors chacun des joueurs peut demander que la partie soit déclarée nulle.

Formellement, nous faisons les définitions suivantes.

Definition 4.18 (Arbre de jeu)**.** Un *arbre de jeu* est un arbre de hauteur finie étiqueté par l'ensemble $\{1, 2\}$, où 1 et 2 sont des noms pour nos deux joueurs. En symboles, c'est un couple (T, j) où T est un arbre de hauteur finie sur un ensemble A et $j : T \to \{1, 2\}$ est une fonction qui associe les nœuds de l'arbre à chacun de nos deux joueurs.

Le jeu à deux joueurs à information parfaite associé à un arbre de jeu (T, j) peut alors être décrit comme suit [9]. On pose un pion sur la racine de T. Le déroulement du jeu est alors le suivant. On considère que le pion se trouve sur un nœud $N \in T$:

- si N est une feuille et
  - $j(N) = 1$, le joueur 1 remporte la partie ;
  - $j(N) = 2$, le joueur 2 remporte la partie ;
- si N n'est pas une feuille et
  - $j(N) = 1$, le joueur 1 déplace le pion sur l'un des fils du nœud N de son choix ;

7. un seul joueur à la fois.

8. Voici une brève description du jeu. Deux prisonniers (complices d'un délit) sont retenus dans des cellules séparées et ne peuvent communiquer. Si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que le second obtient la peine maximale (10 ans) ; si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (5 ans) ; si les deux refusent de dénoncer, la peine sera minimale (6 mois). Le but de chaque joueur est de minimiser sa propre peine.

9. Intuitivement, le déroulement d'une partie correspond à la production d'une branche de l'arbre et j est la fonction qui indique le joueur dont c'est le tour.

- $j(N) = 2$, le joueur 2 déplace le pion sur l'un des fils du nœud N de son choix ;

Le jeu associé à un arbre de jeu de hauteur finie est un jeu en temps fini.

Definition 4.19 (Stratégie, stratégie gagnante)**.** Une *stratégie* pour le joueur 1 dans le jeu associé à un arbre de jeu (T, j) est un sous-ensemble σ de T (en fait, un arbre) tel que

(1) la racine de T appartient à σ ;

(2) pour tout nœud N dans σ qui n'est pas une feuille de T :
- si $j(N) = 1$, alors un fils de N et un seul appartient à σ ;
- si $j(N) = 2$, alors tous les fils de N appartiennent à σ.

On définit mutatis mutandis une stratégie pour le joueur 2. Une stratégie σ pour le joueur 1 est *gagnante* si pour toute feuille F de σ, on a $j(F) = 1$. Une stratégie τ pour le joueur 2 est *gagnante* si pour toute feuille F de τ on a $j(F) = 2$.

Definition 4.20 (Arbre de jeu dual)**.** Pour tout arbre de jeu $\mathcal{T} = (T, j)$, on définit l'arbre de jeu dual $\mathcal{T}^\delta$ comme l'arbre (T, j^δ) avec

$$j^\delta(N) = 1 \text{ si et seulement si } j(N) = 2.$$

Le déroulement du jeu sur l'arbre dual à $\mathcal{T}$ est identique à celui sur $\mathcal{T}$ mais le rôle des joueurs 1 et 2 sont inversés.

Theorème 4.21. *Soit (T, j) un arbre de jeu. Il existe une stratégie gagnante pour un des deux joueurs.*

Démonstration. Commençons par une définition. Le sous-jeu (T_N, j_N) de (T, j) correspondant au nœud $N = (a_0, \ldots, a_n) \in T$ est défini par

$$T_N = \{(s_0, \ldots, s_m) \in A^{<\omega} \mid (a_0, \ldots a_n, s_0, \ldots, s_m) \in T\}, \text{et}$$
$$j_N(s_0, \ldots, s_m) = j(a_0, \ldots a_n, s_0, \ldots, s_m) \quad \text{pour tout } (s_0, \ldots, s_m) \in T_N.$$

En particulier $(T_\varepsilon, j_\varepsilon) = (T, j)$ pour ε la suite vide, la racine de T.

Nous montrons que pour chaque nœud $N \in T$ de l'arbre de jeu, un (seul) des deux joueurs possède une stratégie gagnante dans le sous-jeu (T_N, j_N) correspondant. Notons h la hauteur de T et appelons hauteur d'un nøeud $N = (a_0, \ldots, a_n) \in T$ la longueur de la suite N, dans ce cas $n + 1$. Nous définissons $g : T \to \{1, 2\}$ par induction inverse la hauteur des nœuds de T de sorte que pour tout $N \in T$ et $i \in \{1, 2\}$

$$g(N) = i \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l}\text{le joueur } i \text{ possède} \\ \text{une stratégie gagnante dans } (T_N, j_N).\end{array} \tag{1}$$

Comme $h \in \mathbb{N}$ est la hauteur de T, tous les nœuds de hauteur h sont des feuilles de T. Le sous-jeu (T_F, j_F) associé à une feuille consiste simplement à

déclarer gagnant le joueur i pour lequel $j(F) = i$. Il existe donc trivialement une stratégie gagnante pour ce joueur-là et nous posons pour tout nœud N de hauteur h, $g(N) = j(N)$.

Dans le diagramme ci-dessous, nous avons représenté un arbre de jeu.

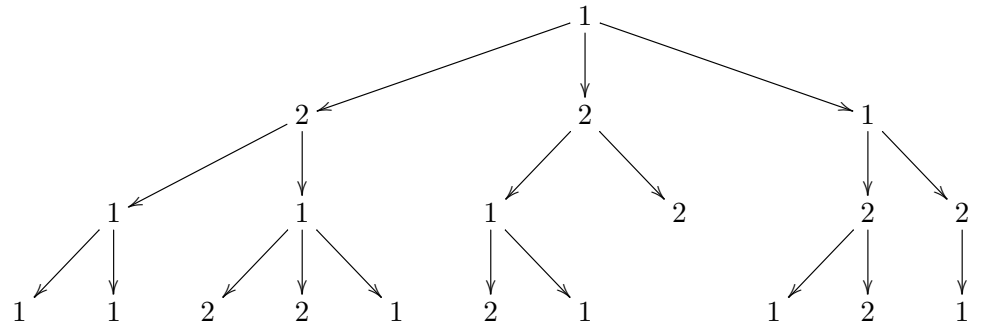


FIG. 1: Un arbre de jeu.

Nous entourons un nœud N d'un rectangle lorsque le joueur 1 possède une stratégie gagnante dans le sous-jeu correspondant (i.e. si $g(N) = 1$), nous les entourons d'un cercle lorsque c'est le joueur 2 qui possède un stratégie gagnante dans le sous-jeu associé (i.e. si $g(N) = 2$).

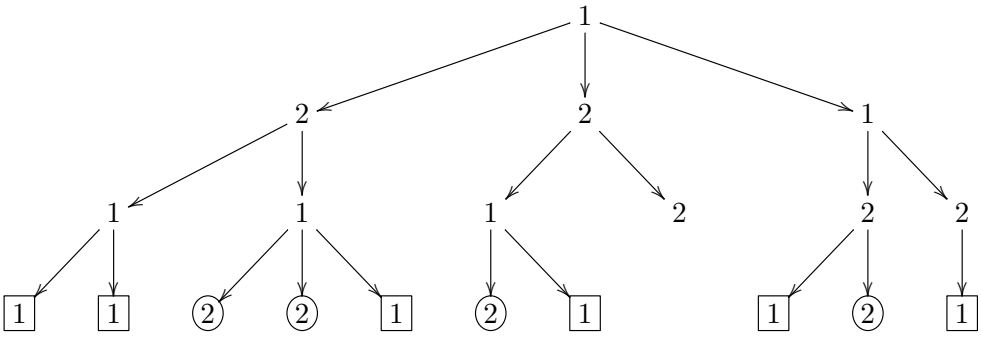


FIG. 2: Pour tout nœud N de hauteur h, $g(N) = j(N)$.

Supposons pour l'étape de récurrence que nous avons défini g sur tous les nœuds de hauteur strictement supérieure à k pour $k < h$ de sorte que pour tout nœud N de hauteur strictement supérieur k (1) soit satisfaite. Considérons un nœud $N = (a_0, \ldots, a_{k-1})$ de hauteur k. Plusieurs cas se présente à nous :

1) N est une feuille, auquel cas on pose $g(N) = j(N)$;

2) N n'est pas une feuille, $j(N) = 1$ et

a) il existe $a \in A$ tel que $N' = (a_0, \ldots, a_{k-1}, a) \in T$ et $g(N') = 1$. Nous posons alors $g(N) = 1$. En effet, 1 possède une stratégie gagnante dans (T_N, j_N). Celle-ci consiste à commencer par déplacer le pion sur le nœud (a), puis à appliquer une stratégie gagnante qu'il possède dans $(T_{N'}, j_{N'})$.

b) pour tout $a \in A$, si $N' = (a_0, \ldots, a_{k-1}, a) \in T$, alors $g(N') = 2$. Nous posons alors $g(N) = 2$. En effet, 2 a une stratégie gagnante dans (T_N, j_N). Celle-ci consiste laisser le joueur 1 déplacer le pion de la racine vers un nœud (a) tel que $N' = (a_0, \ldots, a_{k-1}, a) \in T$ puis de suivre une stratégie gagnante qu'il possède dans $(T_{N'}, j_{N'})$.

3) N n'est pas une feuille et $j(N) = 2$: mutatis mutandis les deux cas ci-dessus.

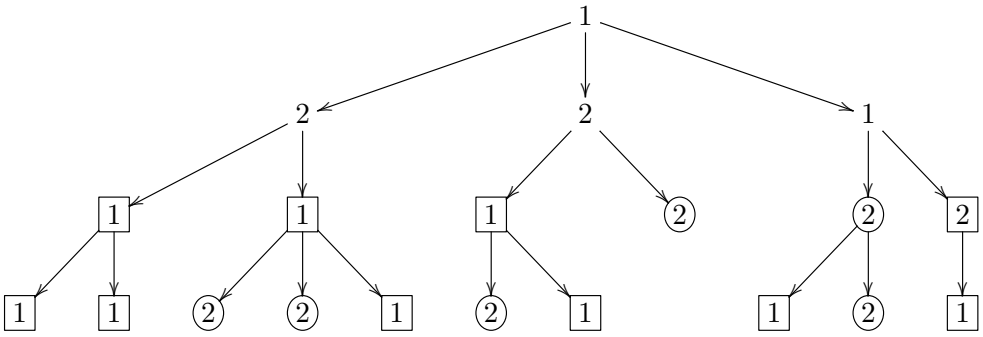


FIG. 3: Lorsque g est définie sur les nœuds de hauteur $> k$, nous pouvons la définir sur les nœuds de hauteur k.

Puisque l'arbre de jeu est de hauteur finie, notre définition de g par récurrence aboutit en un nombre fini d'étapes à la définition de g en la racine de T. L'image par g de la racine de T est le joueur qui possède une stratégie gagnante dans T. Supposons sans perte de généralité que $g(\emptyset) = 1$.

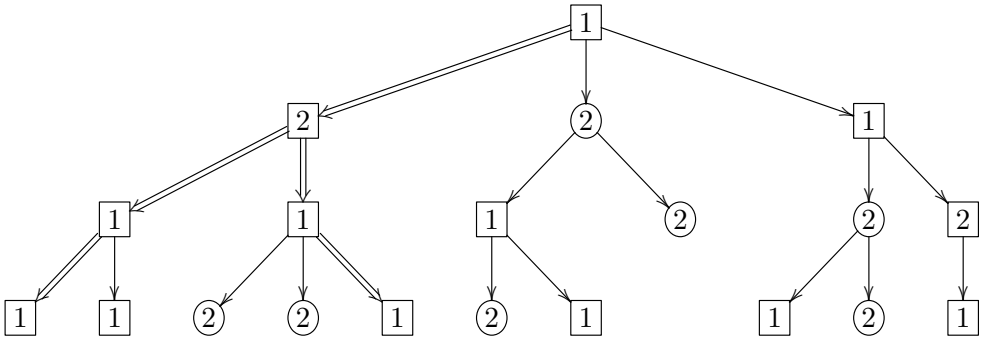


FIG. 4: Une fois g totalement définie, l'image par g de la racine donne le vainqueur. Les doubles flèches décrivent une stratégie gagnante pour le joueur 1.

En effet, nous pouvons définir par récurrence en nous basant sur g une stratégie gagnante σ pour le joueur 1. Nous définissons une stratégie σ pour le joueur 1 de sorte que g restreinte à σ est constante égale à 1. Tout d'abord posons $\sigma_0 = \{\emptyset\}$. Supposons ensuite que nous ayons défini $\sigma_k \subseteq A^{\leq k}$ pour $0 \leq k < h$ de sorte que g restreinte à σ_k est constante égale à 1. Nous définissons alors σ_{k+1} comme suit :

- pour tout $N \in \sigma_k$, $N \in \sigma_{k+1}$;
- pour tout $N = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \sigma_k$ qui n'est pas une feuille de T,
  - si $j(N) = 1$, alors nous avons par définition de g qu'il existe $a \in A$ tel que $N' = (a_0 \ldots, a_n, a) \in T$ et $g(N') = 1$. Nous choisissons alors un tel a et pour lequel nous posons $N' = (a_0 \ldots, a_n, a) \in \sigma_{k+1}$;
  - si $j(N) = 2$, alors pour tout $a \in A$ tel que $N' = (a_0, \ldots, a_{k-1}, a) \in T$ nous posons $N' \in \sigma_{k+1}$.

Nous posons finalement $\sigma = \sigma_h$. Il est clair que σ ainsi définie est une stratégie pour le joueur 1. En outre, tout feuille de σ est une feuille de T. Par ailleurs, g restreinte à σ et constante égale à 1 et par définition pour toute feuille F de T, nous avons $j(F) = g(F)$. Il s'ensuit que pour toute feuille F de σ nous avons $j(F) = 1$ et par conséquent σ est gagnante.

□

Remarque 4.22. Que signifie le théorème précédent au sujet du jeu d'échecs ? Afin de satisfaire aux hypothèses du théorème, il nous faut déclarer un vainqueur si la partie est nulle. Si nous déclarons les blancs vainqueurs lors d'un nulle, le théorème nous assure alors qu'il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. Soit cette stratégie assure la victoire aux noirs, soit elle assure la victoire ou le nul aux blancs. De la même façon, nous pouvons déclarer les noirs vainqueurs et le théorème nous assure alors l'existence d'une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs dans cette variante du jeu d'échecs. Il n'y a que trois possibilités. Premièrement, les blancs gagnent

dans les deux variantes et ils possèdent donc une façon de gagner en évitant le nul. Deuxièmement, les noirs gagnent dans les deux variantes et ils possèdent donc une façon de gagner en évitant le nul. Dernièrement, dans chaque variante, la couleur qui possède la stratégie gagnante est celle qui obtient la victoire lors d'une partie nulle. Dans ce dernier cas, il existerait aux échecs une stratégie tant pour les blancs que pour les noirs leur assurant la victoire ou le nul.

4.4.2 Évaluation d'une formule

Definition 4.23 (Jeu d'évaluation d'une formule φ)**.** Soit un langage $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et φ une formule close sur ce langage dont les connecteurs sont dans $\{\neg, \vee, \wedge\}$. On définit le *jeu d'évaluation* de la formule φ dans $\mathscr{M}$, noté $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$. C'est un jeu à deux joueurs, à qui on attribue les rôles de **V**érificateur et **F**alsificateur. Le premier joueur commence dans le rôle du **V**érificateur. Par récurrence, on définit l'ensemble des coups possibles à partir des règles suivantes :

si φ est de la forme	c'est le tour de	le jeu continue avec
formule atomique	personne !	fin du jeu
$\exists x\, \psi$	le **V**érificateur choisit un élément $a \in M$	$\psi_{[a/x]}$
$\forall x\, \psi$	le **F**alsificateur choisit un élément $a \in M$	$\psi_{[a/x]}$
$\varphi_1 \vee \varphi_2$	le **V**érificateur choisit φ_1 ou φ_2	formule choisie
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	le **F**alsificateur choisit φ_1 ou φ_2	formule choisie
$\neg\psi$	on échange les rôles	ψ

Le but du jeu est de finir sur une formule atomique $R(t_1, \ldots, t_n)$ avec $\mathscr{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ en ayant le rôle du **V**érificateur ou telle que $\mathscr{M} \not\models R(t_1, \ldots, t_n)$ en ayant le rôle du **F**alsificateur.

Remarque 4.24. Le fait de considérer seulement des formules avec les connecteurs dans $\{\neg, \vee, \wedge\}$ n'est pas restrictif, car on peut remplacer $a \to b$ par $\neg a \vee b$, et $a \leftrightarrow b$ par $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$.

Definition 4.25 (Arbre de jeu d'évaluation)**.** On se fixe un langage $\mathscr{L}$, $\varphi[x_0, \ldots, x_n]$ une formule sur ce langage dont les connecteurs sont dans $\{\neg, \vee, \wedge\}$ et les variables libres sont parmi $x_0, \ldots, x_n$, et $\mathscr{M}_{x_0 \to a_0, \ldots, x_n \to a_n}$ une $\mathscr{L}$-structure avec les interprétations $a_0, \ldots, a_n \in |\mathscr{M}|$ des variables $x_0, \ldots, x_n$. On définit l'arbre de jeu $T_{\mathbb{EV}}(\varphi[x_0, \ldots, x_n], \mathscr{M}_{x_0 \to a_0, \ldots, x_n \to a_n})$ ($T_{\varphi, \mathscr{M}}$ pour alléger la notation) associé à la formule $\varphi[x_0, \ldots, x_n]$ dans la structure $\mathscr{M}_{x_0 \to a_0, \ldots, x_n \to a_n}$, par induction sur la hauteur de φ comme suit.

- φ est une formule atomique :
  - si $\mathscr{M}_{x_0 \to a_0, \ldots, x_n \to a_n} \models \varphi$, alors

$$T_{\varphi, \mathscr{M}} \quad = \quad \mathbf{V}$$

- si $\mathscr{M}_{x_0 \to a_0, \ldots, x_n \to a_n} \not\models \varphi$, alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = \quad \mathbf{F}$$

- φ est de la forme $\varphi_1 \vee \varphi_2$: alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = \quad \begin{array}{ccc} & \mathbf{V} & \\ \swarrow & & \searrow \\ T_{\varphi_1,\mathscr{M}} & & T_{\varphi_2,\mathscr{M}} \end{array}$$

- φ est de la forme $\varphi_1 \wedge \varphi_2$: alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = \quad \begin{array}{ccc} & \mathbf{F} & \\ \swarrow & & \searrow \\ T_{\varphi_1,\mathscr{M}} & & T_{\varphi_2,\mathscr{M}} \end{array}$$

- φ est de la forme $\exists x\, \psi$: alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{V} & & \\ & \swarrow & | & \searrow & \\ \ldots & & T_{\psi,\mathscr{M}_{x\to m}} & & \ldots \end{array} \qquad \text{pour tout } m \in |\mathscr{M}|.$$

- φ est de la forme $\forall x\, \psi$: alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{F} & & \\ & \swarrow & | & \searrow & \\ \ldots & & T_{\psi,\mathscr{M}_{x\to m}} & & \ldots \end{array} \qquad \text{pour tout } m \in |\mathscr{M}|.$$

- φ est de la forme $\neg\psi$: alors

$$T_{\varphi,\mathscr{M}} \quad = (T_{\psi,\mathscr{M}})^{\delta}$$

où $(T_{\psi,\mathscr{M}})^{\delta}$ est l'arbre de jeux dual à $T_{\psi,\mathscr{M}}$ (voir Définition 4.20). Ici les joueurs 1 et 2 sont appelés **V** (pour Vérificateur) et **F** (pour Falsificateur).

Remarque 4.26. La hauteur de l'arbre $T_{\mathbb{EV}}(\varphi, \mathscr{M})$ et l'étiquetage des nœuds qui ne sont pas des feuilles ne dépendent que de la formule φ. La largeur de l'arbre $T_{\mathbb{EV}}(\varphi, \mathscr{M})$ ne dépend que de la cardinalité du domaine de la structure $\mathscr{M}$. L'étiquetage des feuilles de l'arbre $T_{\mathbb{EV}}(\varphi, \mathscr{M})$ dépend de l'interprétation dans $\mathscr{M}$ des symboles (et de l'interprétation des variables libres).

Remarque 4.27. Le jeu d'évaluation $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$ de la Définition 4.23 correspond exactement au jeu sur l'arbre de jeu $T_{\mathbb{EV}}(\varphi, \mathscr{M})$ (comme décrit dans la Définition 4.18).

Definition 4.28 (Évaluation d'une formule)**.** Soit φ une formule et $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure comme précédemment. On dit que φ est satisfaite dans $\mathscr{M}$ et on note $\mathscr{M} \models \varphi$ si et seulement si dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, le joueur qui commence dans le rôle du **V**érificateur a une stratégie gagnante. De façon équivalente, $\mathscr{M} \models \varphi$ si et seulement si le vérificateur, le joueur **V**, possède une stratégie gagnante dans le jeu $T_{\mathbb{EV}}(\varphi, \mathscr{M})$. Dans le cas contraire, on note $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

Theorème 4.29. *Les deux définitions d'évaluation d'une formule sont équivalentes.*

Démonstration. La preuve est longue, ennuyeuse et très facile. Elle consiste essentiellement à vérifier que les règles du jeu d'évaluation ont été bien choisies.

On montre simultanément par induction sur la hauteur de la formule φ à paramètres dans M les deux propositions suivantes :

- $$\mathscr{M} \models \varphi$$
  $$\iff$$
  le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$

- $$\mathscr{M} \not\models \varphi$$
  $$\iff$$
  le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$

(1) Si φ est de hauteur 0, alors φ est une formule atomique à paramètres dans M. Le jeu d'évaluation associé s'arrête aussitôt sans qu'aucun joueur n'ait à effectuer de quelconque choix. Le **V**érificateur gagnant si et seulement si $\mathscr{M} \models \varphi$, il ressort que le **V**érificateur possède une stratégie gagnante si et seulement si $\mathscr{M} \models \varphi$, et le **F**alsificateur en possède une si et seulement si $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(2) Si φ est de hauteur > 0, alors

(a) si $\varphi = (\varphi_0 \vee \varphi_1)$:

(⇒)

- si $\mathscr{M} \models \varphi$, alors
  - soit $\mathscr{M} \models \varphi_0$ d'où il ressort, par hypothèse d'induction, que le **V**érificateur possède une stratégie gagnante σ_0 dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$. Dès lors la stratégie qui consiste à choisir φ_0 et ensuite appliquer σ_0 est gagnante pour lui dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

- soit $\mathscr{M} \models \varphi_1$ d'où le **V**érificateur possède également, par hypothèse d'induction, une stratégie gagnante σ_1 dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$ qu'il lui suffit d'appliquer après avoir choisi φ_1 pour l'emporter dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

• si $\mathscr{M} \not\models \varphi$, alors

- $\mathscr{M} \not\models \varphi_0$ et $\mathscr{M} \not\models \varphi_1$ d'où il existe, par hypothèse d'induction, une stratégie τ_0 (resp. τ_1) gagnante pour le **F**alsificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$ (resp. $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$) ; ce qui lui confère une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

($\Leftarrow$) • si le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie lui commande soit de choisir φ_0, soit de choisir φ_1, et bien sûr ce joueur possède toujours une stratégie gagnante à partir de son choix. Par conséquent l'hypothèse d'induction implique, dans le premier cas que $\mathscr{M} \models \varphi_0$, et dans le second cas que $\mathscr{M} \models \varphi_1$. Ce qui dans les deux cas donne $\mathscr{M} \models \varphi$.

• si le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie est également gagnante dans les deux jeux $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$ et $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$. Par hypothèse d'induction il ressort que $\mathscr{M} \not\models \varphi_0$ et $\mathscr{M} \not\models \varphi_1$ et donc $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(b) si $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$:

($\Rightarrow$)

• si $\mathscr{M} \models \varphi$, alors

- $\mathscr{M} \models \varphi_0$ et $\mathscr{M} \models \varphi_1$ d'où il existe, par hypothèse d'induction, une stratégie σ_0 (resp. σ_1) gagnante pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$ (resp. $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$) ; ce qui lui confère une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

• si $\mathscr{M} \not\models \varphi$, alors

- soit $\mathscr{M} \not\models \varphi_0$ auquel cas, par hypothèse d'induction, le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante τ_0 dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$. Dès lors la stratégie qui consiste à choisir φ_0 et ensuite appliquer τ_0 est gagnante pour lui dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.
- soit $\mathscr{M} \not\models \varphi_1$ d'où le **F**alsificateur possède également, par hypothèse d'induction, une stratégie gagnante τ_1 dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$ qu'il lui suffit d'appliquer après avoir choisi φ_1 pour l'emporter dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

($\Leftarrow$)

- si le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie est également gagnante dans les deux jeux $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_0)$ et $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$. Par hypothèse d'induction il ressort que $\mathscr{M} \models \varphi_0$ et $\mathscr{M} \models \varphi_1$ et donc $\mathscr{M} \models \varphi$.
- si le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie lui commande soit de choisir φ_0, soit de choisir φ_1, et ce joueur possède toujours une stratégie gagnante à partir de son choix. Par conséquent l'hypothèse d'induction implique, dans le premier cas que $\mathscr{M} \not\models \varphi_0$, et dans le second cas que $\mathscr{M} \not\models \varphi_1$. Ce qui dans les deux cas donne $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(c) si $\varphi = \neg\psi$:

($\Rightarrow$)

- si $\mathscr{M} \models \varphi$, alors $\mathscr{M} \not\models \psi$ d'où il existe, par hypothèse d'induction, une stratégie gagnante pour le **F**alsificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi)$, ce qui donne immédiatement une stratégie gagnante pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.
- si $\mathscr{M} \not\models \varphi$, alors $\mathscr{M} \models \psi$ d'où il existe, par hypothèse d'induction, une stratégie gagnante pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi)$, d'où découle une stratégie gagnante pour le **F**alsificateur $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

($\Leftarrow$)

- si le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi)$. L'hypothèse d'induction donne $\mathscr{M} \not\models \psi$, d'où il apparait que $\mathscr{M} \models \varphi$.
- si le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi)$. L'hypothèse d'induction donne $\mathscr{M} \models \psi$, d'où il apparait que $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(d) si $\varphi = \exists x\psi$:

($\Rightarrow$)

- si $\mathscr{M} \models \varphi$, alors il existe un élément a de M tel que $\mathscr{M}, a/x \models \psi$ ce que l'on peut écrire $\mathscr{M} \models \psi[a/x]$ [10]. L'hypothèse d'induction, nous donne une stratégie gagnante

10. où a est un paramètre de M, autrement dit un nouveau symbole de fonction dont l'interprétation est a.

σ_a pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. Dès lors la stratégie consistant à choisir a et appliquer σ_a ensuite est gagnante pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

- si $\mathscr{M} \not\models \varphi$, alors pour tous éléments $a \in M$, $\mathscr{M}, a/x \not\models \psi$ (ou $\mathscr{M} \not\models \psi[a/x]$). L'hypothèse d'induction, nous procure alors, pour chaque $a \in M$ une stratégie gagnante τ_a pour le **F**alsificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. Dès lors la stratégie consistant à appliquer τ_a lorsque le **V**érificateur choisit a est gagnante pour le **F**alsificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

($\Leftarrow$)

- si le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie choisit un élément a de M tel que le **V**érificateur ait toujours une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. L'hypothèse d'induction donne $\mathscr{M} \models \psi[a/x]$, d'où $\mathscr{M} \models \varphi$.
- si le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors quelque soit le choix de $a \in M$ que fait le **V**érificateur, le **F**alsificateur possède une stratégie τ_a gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. L'hypothèse d'induction donne $\mathscr{M} \not\models \psi[a/x]$ pour tout a de M, d'où $\mathscr{M} \not\models \varphi$.

(e) si $\varphi = \forall x\psi$:

($\Rightarrow$)

- si $\mathscr{M} \models \varphi$, alors pour tous éléments $a \in M$, $\mathscr{M} \models \psi[a/x]$. L'hypothèse d'induction, nous procure alors, pour chaque $a \in M$ une stratégie gagnante σ_a pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. Dès lors la stratégie consistant à appliquer σ_a lorsque le **F**alsificateur choisit a est gagnante pour le **V**érificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.
- si $\mathscr{M} \not\models \varphi$, alors il existe un élément a de M tel que $\mathscr{M} \not\models \psi[a/x]$. L'hypothèse d'induction, nous donne alors une stratégie gagnante τ_a pour le **F**alsificateur dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. Dès lors la stratégie consistant à choisir a et appliquer ensuite τ_a est gagnante pour le **F**alsificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$.

($\Leftarrow$)

- si le **V**érificateur possède une stratégie gagnante dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors quelque soit le choix de $a \in M$ que fait le **F**alsificateur, le **V**érificateur possède une stratégie σ_a gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. L'hypothèse d'induction donne $\mathscr{M} \models \psi[a/x]$ pour tout a de M, d'où $\mathscr{M} \models \varphi$.

- si le **F**alsificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$, alors cette stratégie choisit un élément a de M tel que le **F**alsificateur ait toujours une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \psi[a/x])$. L'hypothèse d'induction donne alors $\mathscr{M} \not\models \psi[a/x]$, d'où $\mathscr{M} \not\models \varphi$. □

5 Un soupçon de théorie des modèles

5.1 Homomorphisme, plongement et isomorphisme

Lorsqu'on a différents modèles d'un même langage, il est souvent intéressant de les comparer. Les notions d'homomorphisme et d'isomorphisme sont une réponse à cette exigence comparative.

Definition 5.1. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures,

Un **homomorphisme** de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$ est une fonction $\mathscr{H}$ de M dans N qui vérifie :

(1) pour tout symbole de constante c de $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{H}(c^{\mathscr{M}}) = c^{\mathscr{N}}$$

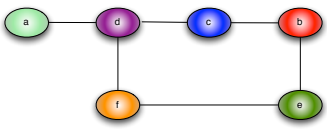
(2) pour tout entier n et tout symbole de fonction f d'arité n du langage $\mathscr{L}$, et pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{M}|$:

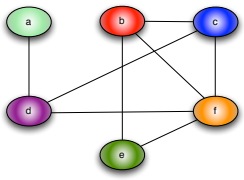
$$\mathscr{H}\left(f^{\mathscr{M}}(a_1, \ldots, a_n)\right) = f^{\mathscr{N}}\left(\mathscr{H}(a_1), \ldots, \mathscr{H}(a_n)\right)$$

(3) pour tout entier n et tout symbole de relation R d'arité n du langage $\mathscr{L}$, et pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{M}|$:

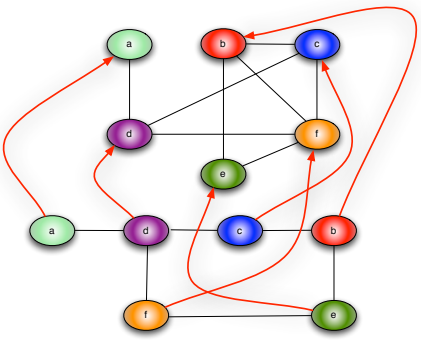
$$\text{si } (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathscr{M}} \text{ alors } \left(\mathscr{H}(a_1), \ldots, \mathscr{H}(a_n)\right) \in R^{\mathscr{N}}$$

Exemple 5.2. Deux structures $\mathscr{M} = \langle M, E^{\mathscr{M}}, c^{\mathscr{M}} \rangle$ et $\mathscr{N} = \langle N, E^{\mathscr{N}}, c^{\mathscr{N}} \rangle$ où M et N désignent les nœuds des graphes respectifs et $(x, y) \in E^{\mathscr{M}}$ (respectivement $(x, y) \in E^{\mathscr{N}}$) si et seulement si il existe une arête de x vers y ; et $c^{\mathscr{M}} = c^{\mathscr{N}} = a$:





$\mathscr{M}$ $\mathscr{N}$



Un homomorphisme de $\mathscr{M}$ vers $\mathscr{N}$

Definition 5.3. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures. Un **plongement** de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$ est un homomorphisme $\mathscr{H}$ de M dans N qui vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes :

(1) $\mathscr{H}$ est injectif,

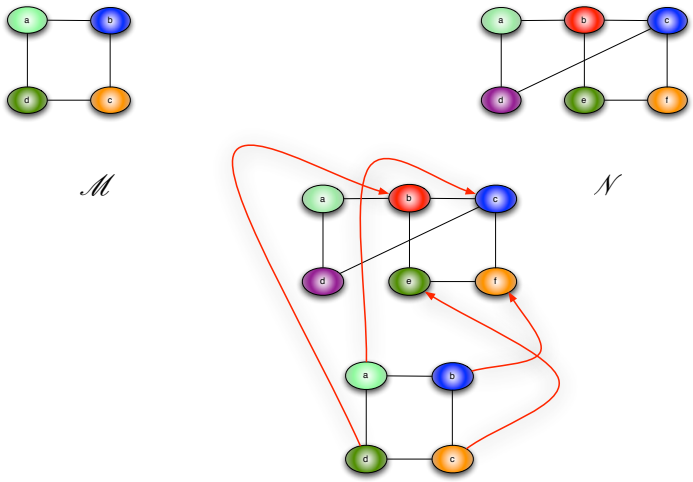
(2) pour tout entier n et tout symbole de relation R d'arité n du langage $\mathscr{L}$, et pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{M}|$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathscr{M}} \text{ si et seulement si } (\mathscr{H}(a_1), \ldots, \mathscr{H}(a_n)) \in R^{\mathscr{N}}$$

A noter que l'homomorphisme de l'exemple 5.2 n'est pas un plongement car le nœud c possède une arête vers f dans $\mathscr{N}$ mais pas dans $\mathscr{M}$.

Le plongement d'un modèle dans un autre détermine une copie conforme du premier modèle dans le second. En effet, l'injectivité du plongement implique que l'image du premier modèle dans le second forme une sous-structure du second modèle parfaitement semblable au premier modèle, au changement de nom près.

Exemple 5.4. Deux structures $\mathscr{M} = \langle M, E^{\mathscr{M}}, c^{\mathscr{M}} \rangle$ et $\mathscr{N} = \langle N, E^{\mathscr{N}}, c^{\mathscr{N}} \rangle$ où M et N désignent les nœuds des graphes respectifs et $(x, y) \in E^{\mathscr{M}}$ (respectivement $(x, y) \in E^{\mathscr{N}}$) si et seulement si il existe une arête de x vers y ; et $c^{\mathscr{M}} = a$ et $c^{\mathscr{N}} = c$:



Un plongement de $\mathscr{M}$ vers $\mathscr{N}$

Pour être plus précis, dans l'image ci-dessus, l'image du domaine de $\mathscr{M}$ par le plongement forme un sous-modèle de $\mathscr{N}$ qui est isomorphe à $\mathscr{M}$. Cela signifie que cette image est une copie conforme du modèle de départ, une copie qui "vit" dans le modèle $\mathscr{N}$ et qui en forme donc une partie, une restriction : la restriction de toutes les interprétations des symboles de constante, de fonction, de relation, au domaine image du domaine de $\mathscr{M}$.

Definition 5.5. Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures,

Un **isomomorphisme de** $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$ est un plongement *surjectif* de M dans N.

Les deux structures sont alors dites isomorphes.

Remarque 5.6.

- Un homomorphisme d'une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ vers elle-même est appelé **endomorphisme**.
- Un isomorphisme d'une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ vers elle-même est appelé **automorphisme**.

5.2 Sous-structure

Definition 5.7 (Sous-structure)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures, on dit que $\mathscr{N}$ est une sous-structure de $\mathscr{M}$ si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

(1) $|\mathscr{N}| \subseteq |\mathscr{M}|$.

(2) pour tout symbole de constante c de $\mathscr{L}$: $c^{\mathscr{N}} = c^{\mathscr{M}}$,

(3) pour tout entier $k \geq 1$ et tout symbole de fonction f d'arité k de $\mathscr{L}$: $f^{\mathscr{N}} = f^{\mathscr{M}} \restriction_{|\mathscr{N}|^k}$,

(4) pour tout entier $k \geq 1$ et tout symbole de relation R d'arité k de $\mathscr{L}$: $R^{\mathscr{N}} = R^{\mathscr{M}} \cap |_{\mathscr{N}}|^k$.

Exemple 5.8.

- $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Q}, 0, + \rangle$,
- $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$,
- $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$. [11]
- Deux structures $\mathscr{M} = \langle M, E^{\mathscr{M}}, c^{\mathscr{M}} \rangle$ et $\mathscr{N} = \langle N, E^{\mathscr{N}}, c^{\mathscr{N}} \rangle$ où M et N désignent les nœuds des graphes respectifs et $(x, y) \in E^{\mathscr{M}}$ (respectivement $(x, y) \in E^{\mathscr{N}}$) si et seulement si il existe une arête de x vers y ; et $c^{\mathscr{M}} = c^{\mathscr{N}} = a$:

$\mathscr{M}$ $\mathscr{N}$

$\mathscr{M}$ est une sous-structure de $\mathscr{N}$

5.3 Equivalence élémentaire

Definition 5.9 (Equivalence élémentaire)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage, et soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures. Les structures $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont dites *élémentairement équivalentes* si et seulement si elles satisfont exactement les mêmes formules closes, c'est-à-dire si et seulement si pour toute formule close φ de $\mathscr{L}$, on a

$$\mathscr{M} \models \varphi \text{ si et seulement si } \mathscr{N} \models \varphi.$$

Remarque 5.10.

(1) Pour une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$, on définit la *théorie de* $\mathscr{M}$ comme l'ensemble des formules closes de $\mathcal{L}$ qui sont satisfaites par $\mathscr{M}$:

$$\mathrm{Th}(\mathscr{M}) = \{\varphi : \text{ formule close de } \mathscr{L}, \text{ et } \mathscr{M} \models \varphi\}$$

(2) Deux $\mathscr{L}$-structures $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont *élémentairement équivalentes* si et seulement si leurs théorie sont égales, i.e. $\mathrm{Th}(\mathscr{M}) = \mathrm{Th}(\mathscr{N})$.

11. $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs.

(3) Deux $\mathscr{L}$-structures $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ *élémentairement équivalentes* ne sont pas nécessairement isomorphes. C'est le cas des deux ordres denses $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ et $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Lemme 5.11.

Si deux $\mathscr{L}$-structures $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont isomorphes *alors elles sont également élémentairement équivalentes.*

Démonstration. Soit f un isomorphisme entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$. Soit φ une formule close de $\mathscr{L}$ telle que $\mathscr{M} \models \varphi$ et σ une stratégie gagnante pour le Vérificateur dans le jeu d'évaluation associé. La stratégie σ induit une stratégie σ' pour le Vérificateur dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{N}, \varphi)$ par un va-et-vient qui consiste à choisir $f(a)$ dans le jeu $\mathbb{EV}(\mathscr{N}, \varphi)$ lorsque le Vérificateur choisit a dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$ et à choisir $f^{-1}(b)$ dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$ lorsque le Falsificateur choisit b dans $\mathbb{EV}(\mathscr{N}, \varphi)$.

La condition suivante de la définition d'un isomorphisme garantit la victoire de σ' : *pour tout entier n et tout symbole de relation R d'arité n du langage $\mathscr{L}$, et pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{M}|$:*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathscr{M}} \text{ si et seulement si } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathscr{N}}.$$

□

Definition 5.12 (Théorie complète)**.** Une théorie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{L}$ est dite **complète** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\mathscr{T}$ est consistante,

(2) tous les modèles de $\mathscr{T}$ sont élémentairement équivalents.

Exemple 5.13. Soit $\mathscr{L}$ le langage constitué de la seule égalité. La $\mathscr{L}$-théorie $\{\forall x \forall y \ x = y\}$ est complète puisque tous ses modèles n'ayant qu'un seul élément sont isomorphes. Par contre la $\mathscr{L}$-théorie $\{\forall x \forall y \forall z \ \big((x = y \vee x = z) \vee y = z\big)\}$ n'est pas complète puisque tous ses modèles n'ayant qu'un seul élément satisfont la formule $\forall x \forall y \ x = y$ alors que ceux à deux éléments ne la satisfont pas.

Lemme 5.14. *Une théorie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{L}$ est* **complète** *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $\mathscr{T}$ est consistante,

(2) pour toute formule close φ du langage $\mathscr{L}$ soit $\mathscr{T} \models \varphi$, soit $\mathscr{T} \models \neg\varphi$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Puisque tous les modèles de $\mathscr{T}$ satisfont les mêmes formules, ils satisfont soit tous φ [12], soit tous $\neg\varphi$ [13].

12. auquel cas $\mathscr{T} \models \varphi$.
13. auquel cas $\mathscr{T} \models \neg\varphi$.

($\Leftarrow$) Si tous les modèles de $\mathscr{T}$ ne sont pas élémentairement équivalents, alors il existe une formule φ de $\mathscr{L}$ et deux modèles $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ de $\mathscr{T}$ avec $\mathscr{M} \models \varphi$ et $\mathscr{N} \not\models \varphi$. Par conséquent, $\mathscr{M} \not\models \neg\varphi$ et $\mathscr{N} \not\models \varphi$ pour $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ des modèles de T, contredisant la condition *(2)*.

□

Remarque 5.15. Si $\mathscr{T}$ est une $\mathscr{L}$-théorie **complète**, alors il existe une théorie équivalente[14] $\mathscr{T}'$ telle que :

(1) $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ et $\mathscr{T} \equiv \mathscr{T}'$,

(2) pour toute formule close φ du langage $\mathscr{L}$ soit $\varphi \in \mathscr{T}'$, soit $\neg\varphi \in \mathscr{T}'$

En l'occurrence il n'est plus possible d'ajouter une seule formule à $\mathscr{T}'$ sans la rendre inconsistante. Elle est donc complète au sens où *"plus personne ne peut rentrer"*.

Démonstration. On construit $\mathscr{T}'$ en ajoutant à $\mathscr{T}$ chaque formule close φ de $\mathscr{L}$ vérifiant $\mathscr{T} \models \varphi$.

$$\mathscr{T}' = \{\varphi : \ \varphi \text{ formule close de } \mathscr{L} \text{ et } \mathscr{T} \models \varphi\}.$$

□

5.4 Sous-structure élémentaire

Definition 5.16 (Sous-structure élementaire)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et $\mathscr{M}$, une $\mathscr{L}$-structure et $\mathscr{N}$ une sous-structure de $\mathscr{M}$, on dit que $\mathscr{N}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathscr{M}$ (ou de manière équivalente $\mathscr{M}$ est une extension élémentaire de $\mathscr{N}$) si et seulement si

pour toute formule $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ de $\mathscr{L}$ et tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{N}|$ on a :

$$\mathscr{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si et seulement si } \mathscr{N} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

On note $\mathscr{N} \prec \mathscr{M}$ le fait que $\mathscr{N}$ soit sous-structure élémentaire de $\mathscr{M}$.

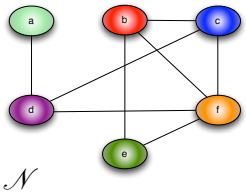
Exemple 5.17.

- $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Q}, 0, + \rangle$ mais elle n'est pas sous-structure élémentaire car la formule $\forall x \exists y \ y + y = x$ est satisfaite dans $\langle \mathbb{Q}, 0, + \rangle$ mais non dans $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$.
- $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ mais pas une sous-structure élémentaire car la formule $\exists x \ x \cdot x = 2$, à paramètre dans $\mathbb{Q}$, est satisfaite dans $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ mais pas dans $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$.
- $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$.Mais ce n'est pas une sous-structure élémentaire car la formule $\exists x \ x + x = 2$, à paramètre dans $2\mathbb{Z}$, est satisfaite dans $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ mais pas dans $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle$.

14. et donc elle-même complète aussi.

- Deux structures $\mathscr{M} = \langle M, E^{\mathscr{M}}, c^{\mathscr{M}} \rangle$ et $\mathscr{N} = \langle N, E^{\mathscr{N}}, c^{\mathscr{N}} \rangle$ où M et N désignent les nœuds des graphes respectifs et $(x, y) \in E^{\mathscr{M}}$ (respectivement $(x, y) \in E^{\mathscr{N}}$) si et seulement si il existe une arête de x vers y ; et $c^{\mathscr{M}} = c^{\mathscr{N}} = a$:

$\mathscr{M}$



$\mathscr{N}$

$\mathscr{M}$ est une sous-structure de $\mathscr{N}$ mais pas une sous-structure élémentaire car la formule $\forall x(bEx \to xEd)$ est satisfaite dans $\mathscr{M}$ mais pas dans $\mathscr{N}$ [15].

Remarque 5.18. L'utilisation du Théorème de Compacité sera un moyen certes brutal mais extrêmement efficace pour obtenir des extensions élémentaires.

Definition 5.19 (Test de Tarski-Vaught)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre, $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et $\mathscr{N}$ une sous-structure de $\mathscr{M}$. Supposons que pour toute formule $\varphi[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de $\mathscr{L}$ et tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $|\mathscr{N}|$:

si $\mathscr{M} \models \exists x_0 \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, alors il existe $a_0 \in |\mathscr{N}|$ tel que $\mathscr{N} \models \varphi[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Alors $\mathscr{N} \prec \mathscr{M}$.

Démonstration. On considère ψ quelconque (dont les connecteurs sont parmi $\{\neg, \wedge\}$ et les seuls quantificateurs sont existentiels et les variables libres sont parmi $y_1, \ldots, y_k$). On montre que pour tous éléments $b_1, \ldots, b_k$ de $|\mathscr{N}|$ on a $\mathscr{N} \models \psi[b_1, \ldots, b_k]$ si est seulement si $\mathscr{M} \models \psi[b_1, \ldots, b_k]$. On procède par induction sur la hauteur de ψ.

(1) si ψ est une formule atomique, le résultat est immédiat.

(2) si ψ est une conjonction, le résultat découle immédiatement de l'hypothèse d'induction.

(3) si ψ est une négation, le résultat découle également directement de l'hypothèse d'induction.

(4) si ψ est une formule existentielle, le sens ($\Rightarrow$) est immédiat, et le sens ($\Leftarrow$) découle de l'hypothèse du test de Tarski-Vaught.

□

15. car $\mathscr{N} \models (bEe \wedge \neg eEd)$).

6 Théorème de compacité

Nous allons maintenant introduire le théorème de compacité. Pour faire ceci, nous avons besoin de quelques outils que l'on va présenter maintenant.

6.1 Filtre, base de filtre et ultrafiltre

Definition 6.1 (Filtre)**.** Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(E)$ est appelé *filtre sur* E s'il vérifie les points suivants :

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(ii) si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(iii) si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B$, alors $B \in \mathcal{F}$.

Definition 6.2 (Ensemble cofini)**.** Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. Alors, A est dit *cofini* si $E \setminus A$ est fini.

Exemples 6.3. (i) Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$. Alors $\mathcal{F} = \{B \subseteq E : A \subseteq B\}$ est un filtre.

(ii) Prenons $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ est cofini}\}$. Alors F est un filtre. Il est appelé *filtre de Fréchet*.

Definition 6.4 (Base de filtre)**.** Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(E)$. On dit que la collection $\mathcal{B}$ est une *base de filtre* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\emptyset \notin \mathcal{B}$;

(ii) si $A, B \in \mathcal{B}$, alors $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Le filtre engendré par $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq E : \exists A \in \mathcal{B} \text{ tel que } A \subseteq B\}.$$

Il s'agit d'un filtre car :

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) Si $B, B' \in \mathcal{F}$, alors il existe $A, A' \in \mathcal{B}$ tels que $A \subseteq B$ et $A' \subseteq B'$. Puisque $A \cap A' \subseteq B \cap B'$ et que $A \cap A' \in \mathcal{B}$, on a $B \cap B' \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $B \in \mathcal{F}$ et $B \subseteq B'$, alors il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $A \subseteq B \subseteq B'$, ce qui implique $B' \in \mathcal{F}$.

Exemple 6.5. Soit I un ensemble non vide et E l'ensemble des parties finies de I. Pour $a \in E$, on définit

$$E_a = \{b \in E : a \subseteq b\}.$$

Alors $\mathcal{B} = \{E_a : a \in E\}$ est une base de filtre sur E. Pour cela, vérifions les deux conditions :

(i) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

(ii) Soient $E_a, E_b \in \mathcal{B}$, alors

$$\begin{aligned} E_a \cap E_b &= \{c \in E : a \subseteq c\} \cap \{c \in E : b \subseteq c\} \\ &= \{c \in E : (a \cup b) \subseteq c\} \\ &= E_{a \cup b} \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Definition 6.6 (Ultrafiltre)**.** Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(E)$ est appelé *ultrafiltre sur* E si

(i) $\mathcal{U}$ est un filtre sur E ;

(ii) pour tout $F \subseteq E$, on a $F \in \mathcal{U}$ ou $E \backslash F \in \mathcal{U}$ (c'est-à-dire, $\mathcal{U}$ est maximal, voir la preuve de la remarque 6.10).

Pour pouvoir étendre un filtre en un ultrafiltre, nous allons avoir besoin de nous munir de l'axiome du choix.

Axiome 11 (Axiome du choix)**.** Soit $(A_i)_{i \in I}$, une collection d'ensembles telle que $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Alors, il existe une fonction $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ telle que $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

L'axiome du choix est lui-même équivalent au lemme de Zorn, que l'on énonce maintenant.

Definition 6.7 (Ensemble inductif)**.** Un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ est dit *inductif* si toute partie $C \subseteq X$ totalement ordonnée[16] (que l'on nomme chaîne) de X admet au moins un majorant[17].

Theorème 6.8 (Lemme de Zorn)**.** *Tout ensemble ordonné inductif* $(X, \leq)$ *admet (au moins) un élément maximal*[18]*.*

Lemme 6.9. *L'Axiome du Choix est équivalent au Lemme de Zorn.*

Axiome 12 (Axiome de l'ultrafiltre)**.** Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.

Remarque 6.10. L'axiome du choix implique l'axiome de l'ultrafiltre (mais la réciproque est fausse).

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble E non vide. Considérons l'ensemble des filtres $\mathcal{F}'$ sur E qui étendent $\mathcal{F}$:

$$\mathscr{X} = \{\mathcal{F}' \subseteq E \mid \mathcal{F}' \text{ est un filtre et } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'\}.$$

16. Cela signifie que $(C, \leq)$ est un ordre total.

17. C'est-à-dire un élément $m \in X$ satisfaisant la relation $c \leq m$ pour tout élément c de la chaîne.

18. Cela signifie qu'il existe $m \in X$ qui est supérieur ou égal à tous les éléments avec lesquels il est comparable. i.e., tel que pour tout élément $a \in X$, si $m \leq a$ alors $a = m$.

Muni de l'inclusion, $(\mathscr{X}, \subseteq)$, cet ensemble devient un ordre partiel inductif. En effet, soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une chaîne de ce poset. Montrons tout d'abord que $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est bien un filtre sur E :

(i) Puisque $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ est vérifié par chaque $i \in I$, nous avons $\emptyset \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

(ii) Soient $A, A' \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Alors il existe $j_A, j_{A'} \in I$ tels que $A \in \mathcal{F}_{j_A}, A' \in \mathcal{F}_{j'_A}$. Or, $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est une chaîne et donc on peut supposer sans perte de généralité que l'on a $\mathcal{F}_{j_A} \subseteq \mathcal{F}_{j'_A}$. Par conséquent, $A \cap A' \in \mathcal{F}_{j'_A} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

(iii) Soient $A \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ et $A \subseteq B \subseteq E$. Alors il existe $j \in I$ tel que $A \in \mathcal{F}_j$. Ceci implique que $B \in F_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

Ensuite, il est clair que

- $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ étend $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_i$ est vérifié pour chaque[19] indice i et donc $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$.
- $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est un majorant de la chaîne puisque $\mathcal{F}_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est vérifié pour tou $j \in I$.

Par le lemme de Zorn (qui est équivalent à l'axiome du choix), nous obtenons l'existence d'un élément maximal de $(\mathscr{X}, \subseteq)$, notons le $\mathcal{U}$. C'est donc un filtre sur E qui étend $\mathcal{F}$. Montrons que c'est un ultrafiltre. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $S \subseteq E$ tel qu'on ait à la fois $S \notin \mathcal{U}$ et $S^{\complement} \notin \mathcal{U}$ (où $S^{\complement}$ désigne $E \setminus S$).

Tout d'abord, remarquons que pour chaque $A \in \mathcal{U}$, nous avons $A \cap S \neq \emptyset$. En effet, s'il existait un ensemble $A \in \mathcal{U}$ vérifiant $A \cap S = \emptyset$, nous aurions $A \subseteq S^{\complement}$ et donc — puisque $\mathcal{U}$ est un filtre — $S^{\complement} \in \mathcal{U}$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ensuite, remarquons que l'ensemble $\mathscr{V} = \{B \subseteq E \mid \exists A \in \mathcal{U} \;\; A \cap S \subseteq B\}$ est un filtre :

(1) $\emptyset \notin \mathscr{V}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{U}$, $A \cap S \subseteq \emptyset$ n'est jamais vérifié.

(2) Si $B, B' \in \mathscr{V}$, alors il existe $A, A' \in \mathcal{U}$ tels que $A \cap S \subseteq B$ et $A' \cap S \subseteq B'$. On obtient $A \cap A' \cap S \subseteq B \cap B'$ ce qui montre que $B \cap B' \in \mathscr{V}$ puisque $A \cap A' \in \mathcal{U}$.

(3) Si $B \in \mathscr{V}$ et $B \subseteq C$, alors il existe $A \in \mathcal{U}$ tel que $A \cap S \subseteq B$ et donc $A \cap S \subseteq C$, ce qui montre que $C \in \mathscr{V}$.

Montrons maintenant que $\mathscr{V} \in \mathscr{X}$: pour tout ensemble $A \in \mathcal{U}$ nous avons $A \cap S \subseteq A$, d'où $A \in \mathscr{V}$; par conséquent, nous avons $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathscr{V}$.

Par ailleurs, pour tout ensemble $A \in \mathcal{U}$ nous avons $A \cap S \subseteq S$, d'où $S \in \mathscr{V}$. Or, puisque par hypothèse, $S \notin \mathcal{U}$, nous obtenons $\mathcal{U} \subsetneq \mathscr{V}$; autrement dit, $\mathscr{V}$ est un majorant strict de $\mathcal{U}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{U}$.

□

19. On peut noter qu'il est suffisant que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_i$ soit vérifié par au moins un indice i.

6.2 Ultraproduit

Definition 6.11 (Ultraproduit)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre, I un ensemble non vide, $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{L}$-structures et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I.
L'*ultraproduit* $\mathscr{M}$ de la famille $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$ par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est la $\mathscr{L}$-structure notée :

$$\mathscr{M} = \prod_{i\in I} \mathscr{M}_i \Big/ \mathcal{U}.$$

On définit d'abord une relation d'équivalence $\sim$ sur $\prod_{i\in I} |\mathscr{M}_i|$ de la façon suivante :

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence :

Réflexivité Pour tout $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} |\mathscr{M}_i|$, on a que $\{i \in I : a_i = a_i\} = I$. Or, $\emptyset \notin \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est un filtre. Par conséquent, puisque $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, $I \in \mathcal{U}$ et donc $(a_i)_{i\in I} \sim (a_i)_{i\in I}$.

Symétrie

$$\begin{aligned} (a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} &\Leftrightarrow \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : b_i = a_i\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow (b_i)_{i\in I} \sim (a_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Transitivité Si $(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I} \sim (c_i)_{i\in I}$, alors

$$\{i \in I : a_i = c_i\} \supseteq \underbrace{\underbrace{\{i \in I : a_i = b_i\}}_{\in\mathcal{U}} \cap \underbrace{\{i \in I : b_i = c_i\}}_{\in\mathcal{U}}}_{\in\mathcal{U}}.$$

Or, par hypothèse, $\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$ et $\{i \in I : b_i = c_i\} \in \mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est un filtre, $\{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\} \in \mathcal{U}$ et donc $\{i \in I : a_i = c_i\} \in \mathcal{U}$; autrement dit $(a_i)_{i\in I} \sim (c_i)_{i\in I}$.

Maintenant, on pose :

(i) $|\mathscr{M}| = \prod_{i\in I} |\mathscr{M}_i| \Big/ \sim$;

(ii) pour tout symbole de constante c de $\mathscr{L}$,

$$c^{\mathscr{M}} = \left[\left(c^{\mathscr{M}_i}\right)_{i\in I}\right]_\sim ;$$

(iii) pour tout symbole de fonction f de $\mathscr{L}$,

$$f^{\mathscr{M}}\left(\left[(a_i^1)_{i\in I}\right]_\sim, \ldots, \left[(a_i^N)_{i\in I}\right]_\sim\right) = \left[\left(f^{\mathscr{M}_i}\left(a_i^1, \ldots, a_i^N\right)\right)_{i\in I}\right]_\sim ;$$

(iv) pour tout symbole de relation R de $\mathscr{L}$,

$$\left(\left[(a_i^1)_{i\in I}\right]_\sim, \ldots, \left[(a_i^N)_{i\in I}\right]_\sim\right) \in R^{\mathscr{M}} \Leftrightarrow \left\{i \in I : \left(a_i^1, \ldots a_i^N\right) \in R^{\mathscr{M}_i}\right\} \in \mathcal{U}.$$

On vérifie que tout ceci est bien défini. C'est-à-dire que si

$$\left(a_i^1\right)_{i\in I} \sim \left(b_i^1\right)_{i\in I}, \ldots, \left(a_i^N\right)_{i\in I} \sim \left(b_i^N\right)_{i\in I},$$

alors

$$\left(f^{\mathscr{M}_i}\left(a_i^1,\ldots,a_i^N\right)\right)_{i\in I} \sim \left(f^{\mathscr{M}_i}\left(b_i^1,\ldots,b_i^N\right)\right)_{i\in I}$$

et

$$\left\{i\in I : \left(a_i^1,\ldots,a_i^N\right)\in R^{\mathscr{M}_i}\right\}\in\mathcal{U} \Leftrightarrow \left\{i\in I : \left(b_i^1,\ldots,b_i^N\right)\in R^{\mathscr{M}_i}\right\}\in\mathcal{U}.$$

- On vérifie d'abord la première partie :

  $$\left\{i\in I : f^{\mathscr{M}_i}\left(a_i^1,\ldots,a_i^N\right) = f^{\mathscr{M}_i}\left(b_i^1,\ldots,b_i^N\right)\right\} \supseteq \bigcap_{j=1}^{N}\left\{i\in I : a_i^j = b_i^j\right\}.$$

  Or, le deuxième membre est par hypothèse une intersection finie d'éléments de $\mathcal{U}$ et donc, par définition d'un filtre, c'est un élément de $\mathcal{U}$. Ainsi, le premier membre étend un élément de $\mathcal{U}$ et c'est par conséquent aussi un élément de $\mathcal{U}$. On a ainsi vérifié que

  $$\left(f^{\mathscr{M}_i}\left(a_i^1,\ldots,a_i^N\right)\right)_{i\in I} \sim \left(f^{\mathscr{M}_i}\left(b_i^1,\ldots,b_i^N\right)\right)_{i\in I}.$$

- On s'occupe maintenant de la deuxième partie.
  Posons $A = \left\{i\in I : \left(a_i^1,\ldots a_i^N\right)\in R^{\mathscr{M}_i}\right\}$ et $B = \bigcap_{j=1}^{N}\left\{i\in I : a_i^j = b_i^j\right\}$ et supposons que

  $$\left\{i\in I : \left(a_i^1,\ldots,a_i^N\right)\in R^{\mathscr{M}_i}\right\}\in\mathcal{U}.$$

  Alors

  $$\left\{i\in I : \left(b_i^1,\ldots b_i^N\right)\in R^{\mathscr{M}_i}\right\} \supseteq A\cap B.$$

  Or par hypothèse, A et B sont dans $\mathcal{U}$ et de ce fait $A\cap B\in U$. Ainsi, le premier membre étend un élément de $\mathcal{U}$ et c'est donc aussi un élément de $\mathcal{U}$, par définition d'un filtre. Il suffit maintenant de constater que la situation est symétrique pour trouver l'implication inverse.

6.3 Théorème de Łoś

Theorème 6.12 (Théorème de Łoś)**.** *Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et I un ensemble non vide. Soient encore $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{L}$-structures, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I et φ une formule dont les variables libres sont parmi $x_1,\ldots,x_n$ et $[\alpha^1]_\sim,\ldots,[\alpha^n]_\sim\in|\mathscr{M}|$.*
Alors, si α_i^j est la i-ème projection de α^j,

$$\mathscr{M} = \prod_{i\in I}\mathscr{M}_i \Big/ \mathcal{U} \models \varphi_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]} \Leftrightarrow \left\{i\in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]}\right\}\in\mathcal{U}.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que seuls $\neg, \wedge$ et $\exists$ apparaissent dans φ. La démonstration se fait par récurrence sur la hauteur de φ.

- Si $\mathrm{ht}(\varphi) = 0$, alors il existe un entier naturel n et des termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$. On obtient

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M} \models \varphi_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]} \\
&\Leftrightarrow \left(t_1^{\mathscr{M}}{}_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]}, \ldots, t_n^{\mathscr{M}}{}_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]} \right) \in R^{\mathscr{M}} \\
&\Leftrightarrow \left\{ i \in I : \left(t_1^{\mathscr{M}_i}{}_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]}, \ldots, t_n^{\mathscr{M}_i}{}_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]} \right) \in R^{\mathscr{M}_i} \right\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

  où l'on a utilisé la simple définition de l'évaluation d'une formule dans un modèle pour la première double implication et également pour la troisième. La seconde double implication est la seule pour laquelle on utilise la définition même de la satisfaction des formules atomiques dans l'ultraproduit.

- Si $\mathrm{ht}(\varphi) > 0$:

  (i) Si $\varphi = \neg\Psi$, alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} \models \varphi_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]} &\Leftrightarrow \mathscr{M} \not\models \Psi_{\left[[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n\right]} \\
&\Leftrightarrow \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \Psi_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \notin \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \not\models \Psi_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \neg\Psi_{\left[\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

  On remarque que pour la direction ($\Rightarrow$) de la double implication ($\Leftrightarrow$) on utilise fortement le fait que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre (si l'on travaillait avec un filtr,. cela ne suffirait pas).

(ii) Si $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$, alors

$$\begin{aligned}
& \mathscr{M} \models \varphi\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathscr{M} \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathscr{M} \models \varphi_0\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \text{ et } \mathscr{M} \models \varphi_1\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_0\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \ \textbf{ et } \ \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_1\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Montrons les deux cotés de la double implication ($\Leftrightarrow$).

- Pour le sens ($\Rightarrow$) :

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_0\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \textbf{ et } \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_1\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Rightarrow \quad & \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_0\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \bigcap \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_0\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Rightarrow \quad & \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- Pour le sens ($\Leftarrow$) :

$$\begin{aligned}
& \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases}
\left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \subseteq \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_0\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\textbf{et} \\
\left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \subseteq \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \varphi_1\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}.
\end{cases}
\end{aligned}$$

(iii) Si $\varphi = \exists x\ \psi$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M} \models \varphi\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow\ &\mathscr{M} \models \exists x\ \psi\Big[_{[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow\ &\text{il existe } \big[(a_i)_{i\in I}\big]_\sim\ \mathscr{M} \models \psi\Big[_{\left[(a_i)_{i\in I}\right]_\sim/x,[\alpha^1]_\sim/x_1,\ldots,[\alpha^n]_\sim/x_n}\Big] \\
\Leftrightarrow\ &\text{il existe } \big[(a_i)_{i\in I}\big]_\sim\ \left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \psi\Big[_{a_i/x,\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow\ &\left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \exists x\ \psi\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow\ &\left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \varphi\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Pour établir la double implication ($\Leftrightarrow$) :

- Pour le sens ($\Rightarrow$) :

$$\begin{aligned}
&\left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \psi\Big[_{a_i/x,\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U} \\
\Rightarrow\ &\left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \psi\Big[_{a_i/x,\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \subseteq \left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \exists x\ \psi\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- Pour le sens ($\Leftarrow$) :

  Puisqu'on a $\left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \exists x\ \psi\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\} \in \mathcal{U}$, commençons par appeler J cet ensemble :

$$J = \left\{ i\in I : \mathscr{M}_i \models \exists x\ \psi\Big[_{\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\}$$

  Ensuite, pour chaque $i \in I$ on considère l'ensemble E_i suivant (dont on remarquera qu'il est *non-vide*) :

  (a) si $i \in J$, alors $E_i = \left\{ a \in |\mathscr{M}_i| \mid \mathscr{M}_i \models \psi\Big[_{a/x,\alpha_i^1/x_1,\ldots,\alpha_i^n/x_n}\Big] \right\}$

(b) si $i \notin J$, alors $E_i = |\mathscr{M}_i|$.

Par application de l'Axiome du Choix, il existe une fonction de choix qui prélève un élément dans chaque ensemble E_i, de sorte que l'on obtient une famille $(a_i)_{i\in I}$ qui vérifie

$$\left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \psi_{\left[a_i/x, \alpha_i^1/x_1, \ldots, \alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \in \mathcal{U}$$

et par conséquent on a montré :

$$\textit{il existe } \left[(a_i)_{i\in I}\right]_\sim \left\{ i \in I : \mathscr{M}_i \models \psi_{\left[a_i/x, \alpha_i^1/x_1, \ldots, \alpha_i^n/x_n\right]} \right\} \in \mathcal{U}.$$

□

6.4 Théorème de compacité

Theorème 6.13 (Théorème de compacité)**.** *Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre et T une $\mathscr{L}$-théorie.*

T est satisfaisable si et seulement si T est finiment satisfaisable.

Démonstration. $\Rightarrow$ **:** Évident.

$\Leftarrow$ **:** On remarque tout d'abord que si la théorie T est finie, le résultat est évident. Un suppose donc que la théorie T est infinie.

Soit I l'ensemble des parties finies de la théorie T :

$$I = \mathscr{P}_{\text{fini}}(T).$$

Pour chaque indice $i \in I$ on considère l'ensemble $\Gamma_i \subseteq I$ des sous-théories finies de T qui étendent i :

$$\Gamma_i = \{\Delta \in I \mid i \subseteq \Delta\}.$$

On remarque aisément que quel que soit i, l'ensemble Γ_i n'est pas vide (il est même infini puisqu'on a supposé la théorie T infinie). On considère ensuite la famille

$$\mathcal{B} = \{\Gamma_i \mid i \in I\}.$$

et on vérifie que c'est une base de filtre :

(1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$ est vérifié puisque $\mathcal{B}$ ne contient que des ensembles infinis donc non-vides.

(2) Pour $i, j \in I$ des valeurs quelconques, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_i \cap \Gamma_j &= \{\Delta \in I \mid i \subseteq \Delta\} \cap \{\Delta \in I \mid j \subseteq \Delta\} \\ &= \{\Delta \in I \mid i \cup j \subseteq \Delta\} \\ &= \Gamma_{i \cup j}.\end{aligned}$$

Puisque i et j sont des parties finies de T, il en est de même de $i \cup j$. Par conséquent $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \Gamma_{i \cup j} \in \mathcal{B}$.

On considère alors le filtre $\mathscr{F}$ engendré par cette base :

$$\mathscr{F} = \{J \subseteq I \mid \text{ il existe } \Gamma_i \in \mathcal{B} \text{ tel que } \Gamma_i \subseteq J\},$$

ainsi que n'importe quel ultrafiltre $\mathcal{U} \supseteq \mathscr{F}$.

Puisque T est finiment satisfaisable, pour chaque partie finie $i \subseteq T$, il existe au moins une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{N}$ qui vérifie $\mathscr{N} \models i$. Grace à l'Axiome du Choix, on peut choisir pour chaque indice i, un modèle $\mathscr{M}_i$ et obtenir ainsi une famille $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ telle que $\mathscr{M}_i \models i$ est vérifié pour chaque indice $i \in I$.
On peut finalement former l'ultraproduit

$$\mathscr{M} = \prod_{i \in I} \mathscr{M}_i \Big/ \mathcal{U}$$

et vérifier que $\mathscr{M} \models T$. Pour cela, soit φ une formule quelconque de T, il nous faut montrer que $\mathscr{M} \models \varphi$. Remarquons tout d'abord que si i (qui est un ensemble fini de formules de T) vérifie $\varphi \in i$, alors puisque $\mathscr{M}_i \models i$, on a en particulier $\mathscr{M}_i \models \varphi$. Ainsi, pour chaque $i \in \Gamma_{\{\varphi\}}$ on a $\mathscr{M}_i \models \varphi$ et donc

$$\underbrace{\Gamma_{\{\varphi\}}}_{\in \mathcal{B}} = \{i \in I : \{\varphi\} \subseteq i\} \subseteq \underbrace{\{i \in I \mid \mathscr{M}_i \models \varphi\}}_{\in \mathcal{U}}$$

Par le Théorème de Łoś, on obtient

$$\prod_{i \in I} \mathscr{M}_i \Big/ \mathcal{U} \models \varphi.$$

Puisque φ était une formule quelconque de T, on a montré

$$\prod_{i \in I} \mathscr{M}_i \Big/ \mathcal{U} \models T.$$

□

Voici maintenant une des nombreuses applications de ce théorème.

6.5 Modèles non-standard de l'arithmétique

Soit $\mathscr{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ le langage **égalitaire** où 0 est un symbole de constante, S est un symbole de fonction unaire et $+, \cdot$ sont des symboles de fonction binaires. La théorie de Peano $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est l'ensemble *infini* des formules closes suivantes :

axiome 1. $\forall x\ Sx \neq 0$

axiome 2. $\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to Sy = x)$

axiome 3. $\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \to x = y)$

axiome 4. $\forall x\ x{+}0 = x$

axiome 5. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{+}Sy = S(x{+}y)\Big)$

axiome 6. $\forall x\ x{\cdot}0 = 0$

axiome 7. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{\cdot}Sy = (x{\cdot}y){+}x\Big)$

schema d'axiome (induction). Pour chaque $\mathscr{L}$-formule φ dont les variable libres sont parmi $\{x_0, \ldots, x_n\}$, l'axiome suivant :

$$\forall x_1\ \ldots\ \forall x_n\ \Big(\big(\varphi_{[0/x_0]}\ \wedge\ \forall x_0\ (\varphi \to \varphi_{[Sx_0/x_0]})\big) \to \forall x_0\ \varphi\Big)$$

On suppose ici que la théorie de Peano $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ admet un modèle (que l'on nomme modèle standard) $\mathscr{N} = \langle \mathbb{N}, 0^\mathscr{N}, S^\mathscr{N}, +^\mathscr{N}, \cdot^\mathscr{N}\rangle$ et défini par :

(1) $0^\mathscr{N} := 0$;

(2) $S^\mathscr{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *successeur* ;

(3) $+^\mathscr{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *addition* ;

(4) $\cdot^\mathscr{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *multiplication* ;

On ajoute au langage $\mathscr{L}$ un nouveau symbole de constante c de sorte qu'on considère maintenant le langage égalitaire $\mathscr{L}' = \{c, 0, S, +, \cdot\}$. Pour chaque entier n on définit la $\mathscr{L}'$-formule φ_n par

- $\varphi_0 := \neg c = 0$
- $\varphi_{n+1} := \neg c = \underbrace{S \ldots S}_{n+1 \text{ fois}} 0$.

On considère ensuite l'ensemble de $\mathscr{L}'$-formules closes $\Gamma = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et enfin la $\mathscr{L}'$-théorie $T = \mathcal{T}_\mathcal{P} \cup \Gamma$.

La théorie T est finiment satisfaisable. En effet, soit Δ un sous-ensemble fini quelconque de T. Puisque Δ est fini, $\Gamma \setminus \Delta$ est infini. Considérons k le plus petit entier tel que $\varphi_k \notin \Delta$ et formons le $\mathscr{L}'$-modèle $\mathscr{D} = \langle D, c^\mathscr{D}, 0^\mathscr{D}, S^\mathscr{D}, +^\mathscr{D}, \cdot^\mathscr{D}\rangle$ suivant :

(1) $D = \mathbb{N}$;

(2) $c^\mathscr{D} := k$;

(3) $0^{\mathscr{D}} := 0$;

(4) $S^{\mathscr{D}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *successeur* ;

(5) $+^{\mathscr{D}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *addition* ;

(6) $\cdot^{\mathscr{D}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction usuelle *multiplication* ;

On voit alors facilement que

(1) $\mathscr{D}$ satisfait chaque formule de $\Delta \cap \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ car $\mathscr{D}$ satisfait chacune des formules de $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$;

(2) $\mathscr{D}$ satisfait chaque formule de $\Delta \cap \Gamma$ (par construction, puisque ces formules disent simplement que $c^{\mathscr{D}}$ est différent d'un nombre fini de valeurs qui sont toutes différentes de la valeur (k) que prend $c^{\mathscr{D}}$ dans ce modèle).

D'où $\mathscr{D}$ satisfait chaque formule de Δ. Par application du théorème de compacité, on obtient que T est satisfaisable. Il existe donc un $\mathscr{L}'$-modèle $\mathscr{M} = \langle M, c^{\mathscr{M}}, 0^{\mathscr{M}}, S^{\mathscr{M}}, +^{\mathscr{M}}, \cdot^{\mathscr{M}} \rangle$ tel que $\mathscr{M} \models T$. Si l'on appelle *entiers standards* de ce modèle, les seuls éléments du domaine de base M qui sont

- soit $0^{\mathscr{M}}$,
- soit $\underbrace{S^{\mathscr{M}} \dots S^{\mathscr{M}}}_{n+1 \text{ fois}} 0^{\mathscr{M}}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$;

alors ce modèle $\mathscr{M}$ possède un élément qui n'est pas un entier standard ($c^{\mathscr{M}}$). On appelle un tel élément un *entier non standard*. Un modèle qui contient un tel entier est dénommé *modèle non standard*[20].

6.6 Théorème de compacité et ensembles définissables

Definition 6.14. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une partie $D \subseteq M^n$ est dite *définissable* dans $\mathcal{M}$ s'il existe une formule $\varphi[\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\overline{x}}, \underbrace{y_1, \dots, y_j}_{\overline{y}}]$ et des paramètres $\underbrace{b_1, \dots, b_j}_{\overline{b}}$ dans M tels que :

$$D = \left\{ \overline{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}, \overline{b}] \right\}$$

20. On peut par ailleurs montrer que la restriction d'un tel modèle non standard $\mathscr{M}$ aux seuls entiers standards est une sous-structure de $\mathscr{M}$ isomorphe au modèle standard. Plus précisément, la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I} : & \mathbb{N} & \to & \left\{ \underbrace{S^{\mathscr{M}} \dots S^{\mathscr{M}}}_{n} 0^{\mathscr{M}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ & k & \to & \underbrace{S^{\mathscr{M}} \dots S^{\mathscr{M}}}_{k} 0^{\mathscr{M}} \end{array}$$

est un isomorphisme entre le modèle standard $\mathscr{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathscr{N}}, S^{\mathscr{N}}, +^{\mathscr{N}}, \cdot^{\mathscr{N}} \rangle$ et la $\mathscr{L}$-structure obtenue en oubliant la constante c et en prenant la restriction de $\mathscr{M}$ aux seuls entiers standards. Autrement dit, si l'on pose $E = \left\{ \underbrace{S^{\mathscr{M}} \dots S^{\mathscr{M}}}_{n} 0^{\mathscr{M}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, alors $\mathcal{I}$ est un $\mathscr{L}$-isomorphisme entre les structures $\mathscr{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathscr{N}}, S^{\mathscr{N}}, +^{\mathscr{N}}, \cdot^{\mathscr{N}} \rangle$ et $\mathscr{E} = \langle E, 0^{\mathscr{M}}, S^{\mathscr{M}} \restriction E, +^{\mathscr{M}} \restriction E \times E, \cdot^{\mathscr{M}} \restriction E \times E \rangle$.

On note $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ la famille des ensembles définissables de $\mathcal{M}$.

Exemple 6.15. Soit $\langle G, e, \cdot, ^{-1} \rangle$ un groupe. Le centre C de G est défini par la formule $\forall y\, x \cdot y = y \cdot x$.

Definition 6.16. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $A \subseteq M$. On peut considérer l'expansion $\mathcal{M}_A$ de $\mathcal{M}$ par des constantes dans A, c'est à dire la $\mathcal{L}_A$ structure $\langle M, \mathcal{L}^{\mathcal{M}}, a^{\mathcal{M}_A} : a \in A \rangle$, où $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{a : a \in A\}$, et $a^{\mathcal{M}_A} = a$. On note $\mathrm{Th}(\mathscr{M}, A) = \mathrm{Th}(\mathscr{M}_A)$

Remarque 6.17. Soit $\mathscr{N}$ une sous-structure de $\mathscr{M}$. Alors on a :

$$\mathscr{N} \prec \mathscr{M} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathscr{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathscr{N}, M) \Leftrightarrow \mathscr{N} \models \mathrm{Th}(\mathscr{M}, M)$$

Corollaire 6.18. *Soit $\mathscr{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et une famille de formules $(\varphi_i[\overline{x}, \overline{m_i}])_{i \in I}$. Si pour toute partie finie I_0 de I il existe $\overline{a} \in M^n$ tel que pour tout $i \in I_0$, $\mathscr{M} \models \varphi_i[\overline{a}, \overline{m_i}]$, alors il existe une extension élémentaire $\mathscr{N}$ de $\mathscr{M}$ et $\overline{a} \in N^n$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathscr{N} \models \varphi_i[\overline{a}, \overline{m_i}]$*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ le langage $\mathcal{L}$ auquel on a ajouté de nouvelles constantes. On considère sur le langage $\mathcal{L}'_M$ la théorie :

$$\Sigma = \mathrm{Th}(\mathscr{M}, M) \cup \{\varphi_i[\overline{c}, \overline{m_i}] : i \in I\}.$$

Par hypothèse, cette théorie est finiment satisfaisable. D'après le théorème de compacité, elle est satisfaisable et admet donc un modèle $\mathscr{N}$. L'interprétation des constantes $\left\{m^{\mathscr{N}} : m \in M\right\} \subseteq N$ forme une sous-structure élémentaire $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$ de $\mathscr{N}'$, la structure sur N réduite au langage $\mathcal{L}$. Cette sous-structure est par ailleurs isomorphe à $\mathscr{M}$, car $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathscr{M}, \mathcal{M})$. Par isomorphisme, on identifie $\mathscr{M}$ à $\mathscr{M}_{\mathscr{N}}$, et l'interprétation $\overline{a} \in N^n$ des constantes $\overline{c}$ dans $\mathscr{N}$ implique que tout $i \in I$, $\mathscr{N}' \models \varphi_i[\overline{a}, \overline{m_i}]$. □

6.7 Le corps ordonné des réels

Soit $\mathcal{L}$ le langage des corps ordonnés, c'est à dire :

$$\mathcal{L} = \{0, 1, +^{(2)}, -^{(2)}, .^{(2)}; \leq^{(2)}\}$$

et $\mathcal{R}$ la $\mathcal{L}$-structure de domaine $\mathbb{R}$, les réels. On rappelle que le corps des réels est

- ordonné, i.e. :
  - la relation $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$;
  - pour tous x, y et z dans $\mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$;
  - pour tous x, y et z dans $\mathbb{R}$, si $0 \leq z$ et $x \leq y$ alors $x \cdot z \leq y \cdot z$.
- archimédien, c'est à dire que pour tout x dans $\mathbb{R}$ il existe un entier naturel n (vu comme le terme $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$) tel que $x \leq n$.

- tel que tout sous-ensemble non vide majoré admet une borne supérieure.

Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \cup c$, et soit la théorie

$$\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{R}, \mathbb{R}) \cup \{\underline{n} \leq c : n \in \mathbb{N}\}$$

sur $\mathcal{L}'$, où $\underline{n} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois}}$. Cette théorie est finiment satisfaisable, et d'après le théorème de compacité il existe donc une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{K}'$ satisfaisant Σ. Dans cette structure, il existe un élément $c^{\mathcal{K}'}$ plus grand que tous les entiers. Si on restreint $\mathcal{K}'$ à $\mathcal{L}$, on obtient une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{K}$ telle que $\mathcal{R} \prec \mathcal{K}$ [21] avec K non-archimédien.

Par ailleurs $\mathbb{R}$, vu comme sous-ensemble de K, est majoré dans K mais n'a pas de borne supérieure ! En effet, pour tout majorant b de $\mathbb{R}$, $b/2$ est un majorant de $\mathbb{R}$ strictement plus petit que b. Or dans $\mathcal{K}$, tout sous-ensemble définissable non vide et qui a un majorant admet une borne supérieure. Pour le voir, prenons $D = \left\{a \in K : \mathcal{K} \models \varphi[a, \overline{b}]\right\}$ non vide et majoré. On a donc :

$$\mathcal{K} \models \left(\exists v\, \varphi[v, \overline{b}] \wedge \exists y \forall z (\varphi[z, \overline{b}] \to z \leq y)\right).$$

Mais si $\psi[y, \overline{w}] = \forall z(\varphi[z, \overline{w}] \to z \leq y)$, alors

$$\mathcal{R} \models \forall \overline{w}\, ((\exists z\, \varphi[z, \overline{w}] \wedge \exists y\, \psi[y, \overline{w}]) \to (\exists v\, (\psi[v, \overline{w}] \wedge \forall x\, (\psi[x, \overline{w}] \to v \leq x)))).$$

Puisque $\mathcal{R} \prec \mathcal{K}$, cette formule est aussi vraie dans $\mathcal{K}$ et doit être en particulier vraie pour $\overline{w} = \overline{b}$, donc D doit admettre un plus petit majorant. Ainsi, $\mathbb{R}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{K}$.

21. si par isomorphisme on identifie $\mathcal{R}$ avec la sous-structure de $\mathcal{K}'$ de domaine $\{r^{\mathcal{K}'} : r \in \mathbb{R}\}$.

7 Nombres ordinaux et cardinaux

7.1 Bons ordres

Definition 7.1 (Ordre strict)**.** Soit E un ensemble quelconque. $\langle E, < \rangle$ est un ordre strict sur E si $< \subseteq E \times E$ est une relation binaire vérifiant :

(1) $\forall x, y, z \in E \ (x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$;

(2) $\forall x \in E \ \neg(x < x)$.

Remarque : on utilise la notation usuelle "$x < y$" au lieu de la disgracieuse "$(x, y) \in <$".

Definition 7.2 (Ordre total)**.** Un ordre strict $<$ sur E est dit un *ordre total* sur E si pour tout $x, y \in E$,

$$\text{si } x \neq y, \text{ alors } x < y \text{ ou } y < x.$$

Remarque 7.3. Si $\langle A, < \rangle$ est un ordre total et $B \subseteq A$, alors $\langle B, <_B \rangle$ — où $<_B = < \restriction B \times B$ — est également un ordre total.

Les deux définitions suivantes sont des rappels de la section 5 : *Un soupçon de théorie des modèles.*

Definition 7.4 (Homomorphisme)**.** Un *homomorphisme* f entre deux ordres $\langle E, <_E \rangle$ et $\langle F, <_F \rangle$ est une fonction $f : E \to F$ telle que pour tout $x, y \in E$,

$$\text{si } x <_E y, \quad \text{alors} \quad f(x) <_F f(y).$$

Definition 7.5 (Isomorphisme)**.** Un *isomorphisme* f entre deux ordres $\langle E, <_E \rangle$ et $\langle F, <_F \rangle$ est une bijection $f : E \xrightarrow{bij.} F$ telle que pour tout $x, y \in E$,

$$x <_E y \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) <_F f(y).$$

Proposition 7.6. *Si $f : E \xrightarrow{hom.} F$ est un homomorphisme bijectif entre deux ordres totaux $\langle E, <_E \rangle$ et $\langle F, <_F \rangle$, alors c'est un isomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de considérer que pour tout $f(x), f(y) \in F$, si $f(x) <_F f(y)$, alors $x <_E y$. Puisque $\langle E, <_E \rangle$ est un ordre total, une seule des trois possibilités suivantes est réalisée : $x = y$, $y <_E x$ ou $x <_E y$. Montrons que les deux premières ne le sont pas.

(1) $x = y$, est contredit par le fait que $f(x) \neq f(y)$;

(2) $y <_E x$ entrainerait $f(y) <_F f(x)$ (car f est un homomorphisme). On aurait donc $f(y) <_F f(x)$ et $f(x) <_F f(y)$ et donc par associativité de $>_F$, $f(y) <_F f(y)$, ce qui contredit l'irréflexivité de $<_F$.

□

Definition 7.7 (Bon ordre)**.** Soit E un ensemble et $<$ une relation d'ordre stricte sur E. $\langle E, < \rangle$ est un bon ordre si

(1) $\langle E, < \rangle$ est un ordre total et

(2) toute partie non vide $F \subseteq E$ possède un plus petit élément selon $<$.
i.e., pour tout $\emptyset \neq F \subseteq E$,

$$\text{il existe } a \in F \text{ tel que pour tout } b \in F \setminus \{a\} \text{ on ait } \ a < b.$$

On dit alors que E est *bien ordonné* par $<$.

Exemples 7.8. (1) Tout ensemble *fini* totalement ordonné est un bon ordre.

(2) $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ est un bon ordre.

(3) $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ n'est pas un bon ordre.

(4) $\langle \mathbb{Q}^+, < \rangle$ n'est pas un bon ordre.

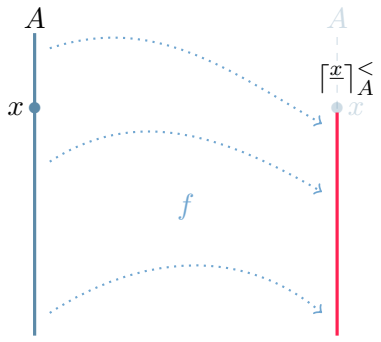
Notation 7.9 (Ensemble des prédécesseurs)**.** Soit E un ensemble bien ordonné par $<$. Pour $x \in E$, *l'ensemble des prédécesseurs (pour l'ordre* $<$*)* de x est noté $\lceil \underline{x} \rceil_E^< = \{y \in E : y < x\}$.

Remarque 7.10. Si $\langle A, < \rangle$ est un bon ordre et $B \subseteq A$, alors $\langle B, <_B \rangle$ — où $<_B = < \restriction B \times B$ — est également un bon ordre.

Lemme 7.11. *Si A est un ensemble non vide et $\langle A, <_R \rangle$ est un bon ordre, alors pour tout $x \in A$,*

$$\langle A, <_R \rangle \ncong \left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle .$$

Démonstration. Par l'absurde, soient $x \in A$ et $f : A \xrightarrow{iso.} \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}$ un isomorphisme.



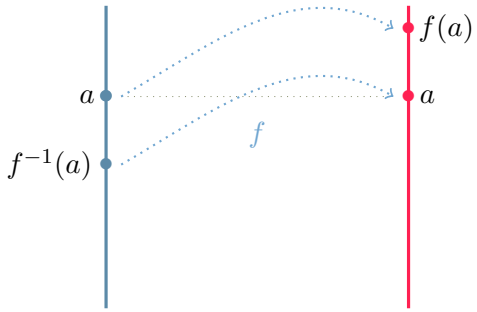
Considérons l'ensemble

$$B = \{y \in A : f(y) \neq y\}.$$

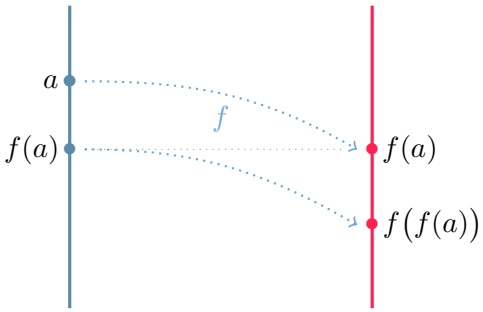
Cet ensemble est non vide car $x \in B$. Puisque $\langle A, <_R \rangle$ est un bon ordre, il existe un élément $a \in B$ qui est $<_R$-minimal dans B.

Par définition de B, on a que $a <_R f(a)$ ou bien $f(a) <_R a$.

(1) Si $a <_R f(a)$, alors $a \in [\underline{x}]_A^{<_R}$. Par conséquent, $f^{-1}(a) <_R a$ et donc $f^{-1}(a) \in B$, ce qui contredit la minimalité de a.



(2) Si $f(a) <_R a$, alors $f(f(a)) <_R f(a)$, par conséquent $f(a) \in B$, ce qui contredit la minimalité de a.



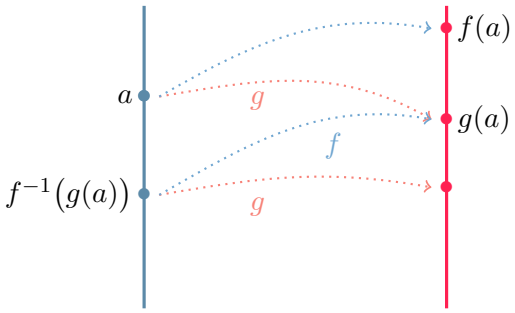
□

Lemme 7.12. *Si $\langle A, <_R\rangle \cong \langle B, <_S\rangle$, alors l'isomorphisme est unique.*

Démonstration. Soient $f : A \xrightarrow{isom.} B$ et $g : A \xrightarrow{isom.} B$ deux isomorphismes de $\langle A, <_R\rangle$ vers $\langle B, <_S\rangle$ et supposons par l'absurde qu'ils sont différents. Alors l'ensemble suivant est non vide :

$$C = \{a \in A : f(a) \neq g(a)\}.$$

Puisque $\langle A, <_R\rangle$ est un bon ordre, il existe un élément $a \in C$ qui est $<_R$-minimal dans C. Par définition de C, on a que $f(a) <_S g(a)$ ou bien $g(a) <_S f(a)$. Par symétrie, il suffit de traiter l'un des deux cas. Supposons donc $g(a) <_S f(a)$ et posons $b = f^{-1} \circ g(a)$. On obtient que $b <_R a$ et donc $b \notin C$. Ainsi, $f(b) = g(b)$ ce qui donne $g(a) = g(b)$. C'est une contradiction avec l'injectivité de g, car $a \neq b$ (pusique $a \in C$).



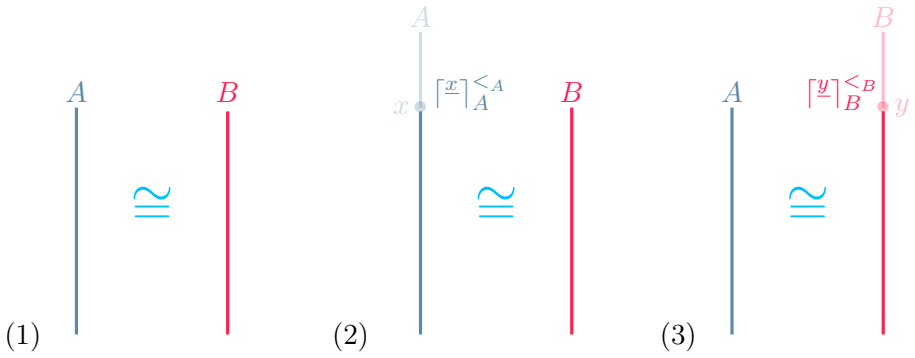
□

Theorème 7.13. *Soient $\langle A, <_R\rangle$ et $\langle B, <_S\rangle$ deux bons ordres. Il y a trois possibilités (mutuellement exclusives) :*

(1) $\langle A, <_R\rangle \cong \langle B, <_S\rangle$;

(2) $\exists y \in B \ \langle A, <_R\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{y} \rceil_B^{<_S}, <_S\right\rangle$;

(3) $\exists x \in A \ \left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \langle B, <_S\rangle$.



Démonstration. Soit l'ensemble G_f défini de la manière suivante :

$$G_f = \left\{(v, w) \in A \times B : \left\langle \lceil \underline{v} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{w} \rceil_B^{<_S}, <_S\right\rangle\right\}.$$

Assertion.

$$G_f \text{ est le graphe d'une fonction } f.$$

Preuve de l'assertion : Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors il existe deux éléments distincts $w, w' \in B$ et $v \in A$ tels que $(v, w), (v, w') \in G_f$. Sans

perte de généralité, supposons que $w <_S w'$. Les deux couples appartenant à G_f, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \lceil \underline{v} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle &\cong \left\langle \lceil \underline{w'} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle \\ &\cong \left\langle \lceil \underline{w} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle. \end{aligned}$$

Or, puisque $w <_S w'$, on obtient que $\lceil \underline{w} \rceil_B^{<_S} = \lceil \underline{w} \rceil_{\lceil \underline{w'} \rceil_B^{<_S}}^{<_S}$ et par conséquent on a

$$\left\langle \lceil \underline{w} \rceil_{\lceil \underline{w'} \rceil_B^{<_S}}^{<_S}, <_S \right\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{w'} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle,$$

ce qui est en contradiction avec le lemme 7.11. Donc, G_f est le graphe d'une fonction. Un argument similaire permet de montrer que la fonction f représentée par G_f est injective.

(1) On va maintenant prouver que f est un isomorphisme d'un segment initial de A vers un segment initial de B.

Commençons par montrer que c'est un homomorphisme.

Pour cela, soit $\mathrm{dom}(f)$ le domaine de f. Considérons $a, a' \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ tels que $a <_R a'$, et supposons par l'absurde que $f(a') <_S f(a)$. On a alors que :

- $\left\langle \lceil \underline{a} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{f(a)} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle$;
- $\left\langle \lceil \underline{a'} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{f(a')} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle$.

Soit h, h' les isomorphismes correspondants. On obtient que la composition

$$h^{-1} \circ h' : \lceil \underline{a'} \rceil_A^{<_R} \longrightarrow \lceil \underline{h^{-1} \circ f(a')} \rceil_A^{<_R}$$

est un isomorphisme. Or $h^{-1} \circ f(a') <_R a$, ce qui est en contradiction avec le lemme 7.11.

Prouvons que le domaine et le codomaine de f sont des segments initiaux.

Soit $(v', w') \in G_f$ et $v \in A$ tels que $v <_R v'$ et montrons qu'il existe $w \in B$ tel que $(v, w) \in G_f$. Par l'absurde, supposons le contraire et posons

$$E = \{a \in A : \forall b \in B \ (a, b) \notin G_f\},$$

qui est alors non vide. Puisque $\langle A, <_R \rangle$ est un bon ordre, il existe $\tilde{v}$ un élément $<_R$-minimal de E. Posons alors $F = B \setminus f[\lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}]$ et on choisit $\tilde{w}$ un élément $<_S$-minimal de F. On va montrer qu'en fait $\left\langle \lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{\tilde{w}} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle$, ce qui nous donne que $(\tilde{v}, \tilde{w}) \in G_f$, une contradiction.

L'isomorphisme est donné par la fonction g de graphe

$$G_g = G_f \cap \lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R} \times \lceil \underline{\tilde{w}} \rceil_B^{<_S}.$$

En effet, par minimalité de $\tilde{v}$, le domaine de g est $\mathrm{dom}(g) = \lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}$. Par ailleurs, par minimalité de $\tilde{w}$, on a que

$$\lceil \underline{\tilde{w}} \rceil_B^{<_S} \subseteq f[\lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}] = g[\lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}].$$

Ainsi, la fonction g de graphe G_g est une application bijective de $\lceil \underline{\tilde{v}} \rceil_A^{<_R}$ vers $\lceil \underline{\tilde{w}} \rceil_B^{<_S}$. Par la proposition 7.6, il reste a vérifier que g est bien un homomorphisme, ce qui est trivialement le cas puisque f en est un.

Ainsi, pour tout couple $(v', w') \in G_f$ et $v \in A$ tels que $v <_R v'$, il existe $w \in B$ tel que $(v, w) \in G_f$. Ainsi, si $v \in \mathrm{dom}(f)$ alors $\lceil \underline{v} \rceil_A^{<_R} \subseteq \mathrm{dom}(f)$. On a donc prouvé que le domaine de f est un segment initial.

Par symétrie de la définition de G_f, on obtient de la même manière que le codomaine $\mathrm{codom}(f)$ de f est un segment initial.

(2) Il suffit maintenant de montrer que le domaine et le codomaine de f ne peuvent être en même temps des segments initiaux propres. Par l'absurde, supposons le contraire. Alors $\mathrm{dom}(f) = \lceil \underline{v} \rceil_A^{<_R}$ et $\mathrm{codom}(f) = \lceil \underline{w} \rceil_B^{<_S}$ pour un certain $v \in A$ et un certain $w \in B$. Par conséquent, f est un isomorphisme de $\lceil \underline{v} \rceil_A^{<_R}$ vers $\lceil \underline{w} \rceil_B^{<_S}$, et donc $(v, w) \in G_f$, une contradiction. Ainsi, trois cas sont possibles :

1. Ni le domaine ni le codomaine de f ne sont des segment initiaux propres. Alors f est un isomorphisme de $\langle A, <_R \rangle$ vers $\langle B, <_S \rangle$, ce qui implique que
$$\langle A, <_R \rangle \overset{f}{\cong} \langle B, <_S \rangle .$$

2. Seul le codomaine de f est un segment initial propre. Par conséquent, il existe $y \in B$ tel que $\mathrm{codom}(f) = \lceil \underline{y} \rceil_B^{<_S}$, ce qui donne
$$\exists y \in B \ \langle A, <_R \rangle \overset{f}{\cong} \left\langle \lceil \underline{y} \rceil_B^{<_S}, <_S \right\rangle .$$

3. Seul le domaine de f est un segment initial propre. Par conséquent, il existe $x \in A$ tel que $\mathrm{dom}(f) = \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}$, ce qui donne
$$\exists x \in A \ \left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R \right\rangle \overset{f}{\cong} \langle B, <_S \rangle .$$

□

7.2 Ordinaux

Definition 7.14 (Ensemble transitif)**.** Un ensemble E est dit *transitif* si pour tout $x \in E$, on a $x \subseteq E$.

Autrement dit, E est transitif si pour tous $x, y : x \in y \in E \Rightarrow x \in E$.

Definition 7.15 (Ordinal)**.** Un ensemble α est appelé *ordinal* ou *nombre ordinal* s'il est transitif et si la relation d'appartenance forme un bon ordre sur α.
Formellement, la relation d'appartenance est $<_\in = \{(a,b) \in \alpha \times \alpha : a \in b\}$.

Exemples 7.16. (1) Les ensembles $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... sont des ordinaux. On les note :
- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- ...

Par contre, l'ensemble $\{0,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ n'est pas un nombre ordinal, car il n'est pas transitif puisque $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ mais $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(2) Si $x = \{x\}$, alors x n'est pas un ordinal.

Notation 7.17. Dans la suite, pour α un ordinal, nous notons simplement :

(1) α à la place de $\langle \alpha, <_\in \rangle$ et nous appelons son ordre $\in$;

(2) $\mathrm{Pred}^\alpha(\beta)$ à la place de $\lceil \overset{\beta}{-} \rceil_\alpha^{<_\in}$, et ce pour tout $\beta \in \alpha$.

Theorème 7.18. *Soient x et y des ordinaux. On a les propriétés suivantes :*

(1) si $z \in x$, alors z est un ordinal et $z = \mathrm{Pred}^x(z)$;

(2) si $x \cong y$, alors $x = y$;

(3) il y a trois possibilités (mutuellement exclusives) :

1. $x = y$;

2. $x \in y$;

3. $y \in x$;

(4) si $z \in x$ et $x \in y$, alors $z \in y$;

(5) si C est un ensemble non vide d'ordinaux, alors

$$\exists x \ \forall y \in C \ (x \in y \vee x = y).$$

Démonstration. (1) Puisque x est un ordinal, $z \subseteq x$ et donc $\langle z, \in \rangle$ est un bon ordre. Par ailleurs, par transitivité de x, pour tout $\tilde{z} \in z$, $\tilde{z} \in x$. De plus, trivialement, pour tous $\tilde{z} \in x$ tels que $\tilde{z} \in z$, alors $\tilde{z} \in z$ et on obtient que $z = \mathrm{Pred}^x(z)$. Enfin, pour tout $\tilde{z} \in z \in x$, alors $\tilde{z} \in x$ et donc $\tilde{z} \subseteq x$. Or, $\in$ est un bon ordre sur x, il est en particulier transitif. Par conséquent, si $z' \in \tilde{z} \in z$, alors $z' \in z$. Ainsi, z est un ordinal.

(2) Soit f l'isomorphisme entre x et y et posons

$$E = \{x' \in x : x' \neq f(x')\}.$$

Si cet ensemble est vide, alors $\forall x' \in x\ x' = f(x') \in y$, et puisque f est surjective, $\forall y' \in y\ \exists x' \in x\ (y = f(x') = x' \in x)$. Ainsi, par l'axiome d'extensionalité $x = y$.
Par l'absurde, supposons donc que l'ensemble est non-vide. Alors il existe m un élément minimal de E. Par minimalité, pour tout $x' \in m$, $x' = f(x')$. Puisque f est un homomorphisme, $\forall x' \in m\ (x' = f(x') \in f(m))$ et donc $m \subseteq f(m)$.
Soit $y' \in f(m)$. Alors, $f^{-1}(y') \in m$. Par minimalité de m,

$$y' = f \circ f^{-1}(y') = f^{-1}(y') \in m.$$

Par conséquent, $f(m) \subseteq m$.
Par l'axiome d'extensionalité, $f(m) = m$, une contradiction.

(3) Par le théorème 7.13, il y a trois possibilités (mutuellement exclusives) :

1. $x \cong y$ ce qui implique par le point (2) que $x = y$;
2. $x \cong \mathrm{Pred}^y(z)$ pour un certain $z \in y$, ce qui implique par les points (1) et (2) que $x = z \in y$.
3. $\mathrm{Pred}^x(z) \cong y$ pour un certain $z \in x$, ce qui implique par les points (1) et (2) que $y = z \in x$.

(4) Par définition.

(5) Soit $x \in C$.
- Si $x \cap C = \emptyset$, alors x est l'élément recherché. En effet, d'après le point (3), il suffit de vérifier que $\forall y \in C\ (\neg y \in x)$, ce qui est le cas.
- Si $x \cap C \neq \emptyset$, alors par le point (1), c'est un ensemble *non vide* bien ordonné par $\in$. Le plus petit élément z de $x \cap C$ est l'élément recherché. En effet, d'après le point (3), il suffit de vérifier que $\forall y \in C\ (\neg y \in z)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in C$ tel que $y \in z$. Alors, par transitivité de x, $y \in x \cap C$, ce qui contredit la minimalité de z.

□

Theorème 7.19. *La classe* **On** *de tous les ordinaux n'est pas un ensemble. Autrement dit,*

$$\neg\exists z\ \forall x\ (x \text{ est un ordinal}^{22} \to x \in z).$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons le contraire. Alors il existe un ensemble $\mathbf{On} = \{x : x \text{ est un ordinal}\}$. Ainsi, par le théorème 7.18, **On** est un ordinal. En effet, 7.18 (1) implique que **On** est transitif et 7.18 (5) implique que **On** est bien ordonné par $\in$.
Par conséquent, $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$, une contradiction avec l'irréflexivité de $\in$.

□

22. On note x est un ordinal comme abréviation de la formule axiomatisant les ordinaux.

Lemme 7.20. *Si A est un ensemble d'ordinaux transitif, alors A est un ordinal.*

Démonstration. L'ensemble A est transitif, et par le théorème 7.18 (3) un ordre total, puis par le théorème 7.18 (5), bien ordonné par $\in$.

□

Theorème 7.21. *Si $\langle A, <_R\rangle$ est un bon ordre, alors il existe un* unique *ordinal α tel que $\langle A, <_R\rangle \cong \alpha$.*

Démonstration. **Unicité :** Soient α, α' deux ordinaux tels que $\langle A, <_R\rangle \cong \alpha$ et $\langle A, <_R\rangle \cong \alpha'$. Par transitivité de $\cong$, on obtient que $\alpha \cong \alpha'$ et par le théorème 7.18 (2), $\alpha = \alpha'$.

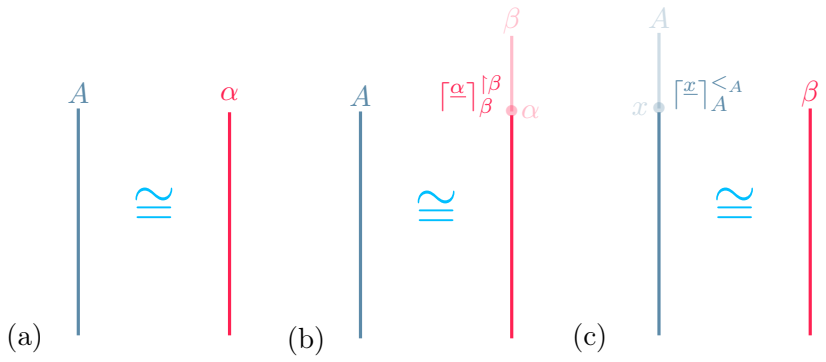
Existence : D'après le Théorème 7.13, deux bons ordres sont toujours comparables soit parce qu'ils sont isomorphes, soit parce que l'un est isomorphe aux prédécesseurs de l'un des éléments de l'autre.

(1) Soit il existe un ordinal α tel que $\langle A, <_R\rangle \cong \langle \alpha, \in_{\restriction \alpha}\rangle$ et le tour est joué.

(2) Soit il existe un ordinal β tel que $\exists \alpha \in \beta\ \langle A, <_R\rangle \cong \left\langle \lceil \underline{\alpha} \rceil_{\beta}^{\in \restriction \beta}, \in_{\restriction \beta}\right\rangle$. Dans ce cas, d'après le Théorème 7.18, α est un ordinal et l'ordre sur α induit par l'ordre sur β n'est autre que la relation d'appartenance restreinte à α, ce qui nous ramène au cas (1).

(3) Supposons maintenant que le cas (1) (et par conséquent également le cas (2)) ne soit jamais vérifié. On se retrouverait donc dans le cas où quel que soit l'ordinal β considéré, il existerait $x \in A\ \left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \langle \beta, \in_{\restriction \beta}\rangle$. Par le Lemme 7.11, on a que si $x \in A$ vérifie $\left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \langle \beta, \in_{\restriction \beta}\rangle$, alors il n'existe pas d'autre élément $y \in A$, $x \neq y$ tel que $\left\langle \lceil \underline{y} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \langle \beta, \in_{\restriction \beta}\rangle$. On peut alors définir une fonctionnelle $f : A \xrightarrow{surj.} \mathbf{On}$ par

- $f(x) =$ l'unique ordinal β tel que $\left\langle \lceil \underline{x} \rceil_A^{<_R}, <_R\right\rangle \cong \langle \beta, \in_{\restriction \beta}\rangle$, s'il existe un tel ordinal, et
- $f(x) = 0$ sinon.



Par une instance de l'axiome de remplacement, l'image du domaine (l'*ensemble* A) est un ensemble. Or cette image n'est autre que la classe de tous les ordinaux, qui n'est pas un ensemble par le Théorème 7.19

□

Notation 7.22.

(1) On note type $\langle A, <_R \rangle$ l'unique ordinal α tel que $\langle A, <_R \rangle \cong \alpha$.

(2) Soient α, β deux ordinaux. Alors on note $\alpha \leq \beta$ pour $(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$ et $\alpha < \beta$ pour $\alpha \in \beta$.

Definition 7.23 (Suprémum, Infimum)**.** Soit X un ensemble d'ordinaux. Alors le *suprémum* de X, noté $\sup X$, est :

$$\sup X = \bigcup X := \{\gamma : \exists x \in X \ (\gamma \in x)\}.^{23}$$

Si $X \neq \emptyset$, l'*infimum* de X, noté $\inf X$, est :

$$\inf X = \bigcap X := \{\gamma : \forall x \in X \ (\gamma \in x)\}.$$

Lemme 7.24. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall \alpha \ \forall \beta \ (\alpha, \beta$ des ordinaux $\rightarrow (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta))$ *;*

(2) si X *est un ensemble d'ordinaux, alors* $\sup X$ *est le plus petit ordinal qui majore* X*.*

(3) si X *est un ensemble non vide d'ordinaux, alors* $\inf X$ *est le plus petit élément de* X*.*

Démonstration. Évident.

□

Definition 7.25 (Successeur d'un ordinal)**.** Pour un ordinal α, on définit son *successeur* $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

On écrira 1 pour $s(0)$, 2 pour $s(1)$, 3 pour $s(2)$, etc. et on dénotera par ω l'ensemble de ces entiers. Cet ensemble est un ordinal.

Lemme 7.26. *Pour tout ordinal* α*, on a que :*

(1) $s(\alpha)$ *est un ordinal ;*

(2) $\alpha < s(\alpha)$ *;*

23. On remarquera que $\sup 0 = \sup \emptyset = \bigcup \emptyset = \emptyset$. Pour α un ordinal quelconque : $\sup(\alpha + 1) = \sup(\alpha \cup \{\alpha\}) = \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\}) = \alpha$. Pour λ un ordinal limite quelconque : $\sup \lambda = \sup\{\xi : \xi \in \lambda\} = \lambda$. Pour C un ensemble d'ordinaux possédant un *maximum* α, $\sup C = \alpha$. Si par contre C un ensemble d'ordinaux qui ne posséde pas de *maximum*, alors $\sup C$ est un ordinal limite : le plus petit majorant des ordinaux de C.

(3) $\forall \beta \ (\beta < s(\alpha) \to \beta \leq \alpha)$.

Démonstration. Immédiat.

□

Definition 7.27 (Ordinal successeur, ordinal limite)**.** Un ordinal α est dit *successeur* s'il existe un ordinal β tel que $s(\beta) = \alpha$. Sinon, s'il est différent de 0, on le dit *limite*.

Exemple 7.28. Les ordinaux $1, 2, 3, 4$, etc. sont des ordinaux successeurs. Par contre ω est un ordinal limite [24].

Definition 7.29 (Suite)**.** Soit A un ensemble. Une *suite* d'éléments de A est une fonction d'un ordinal α dans A. α est alors dénommé la *longueur de cette suite*.

La définition de la suite que nous avons donné dans la Définition 2.10 correspond à cette définition générale restreinte aux seuls ordinaux $\alpha \leq \omega$.

On peut étendre le principe du raisonnement par récurrence des entiers aux ordinaux.

Le raisonnement par récurrence consiste à montrer que des éléments d'un ensemble A satisfont une propriété P par le procédé suivant :

(1) Les éléments de A sont distribués le long des entiers par le truchement d'une fonction (appelée hauteur) de A dans $\mathbb{N}$.

(2) On montre que les éléments de hauteur 0 satisfont la propriété P,

(3) on montre ensuite, (pour n quelconque) que ceux de hauteur $n+1$ satisfont la propriété P **en supposant** que ceux de hauteur n la satisfont également.

Le raisonnement par récurrence transfinie procède de même mais au lieu de distribuer les éléments d'un ensemble A sur les entiers, on les distribue sur les ordinaux. Il faut donc, pour grimper le long des ordinaux, non seulement partir du niveau 0 et être capable d'effectuer les étapes successeurs (grimper d'un barreau n au barreau $n + 1$) mais encore pouvoir passer les étapes limites.

Le raisonnement par récurrence transfinie consiste à montrer que des éléments d'un ensemble A satisfont une propriété P par le procédé suivant :

(1) Les éléments de A sont distribués le long des ordinaux par une fonction appelée hauteur.

(2) On montre que les éléments de hauteur 0 satisfont la propriété P,

(3) On montre ensuite, (pour α quelconque) que ceux de hauteur $\alpha + 1$ satisfont la propriété P **en supposant** que ceux de hauteur α la satisfont également.

24. c'est d'ailleurs le plus petit ordinal limite

(4) On montre finalement, (pour λ limite quelconque) que ceux de hauteur λ satisfont la propriété P **en supposant** que tous ceux de hauteur α pour $\alpha < \lambda$ la satisfont également.

De même que l'on définit des objets mathématiques par induction le long des entiers, on peut également définir de tels objets par induction le long des ordinaux transfinis.

Application 7.30 (Arithmétique ordinale)**.** *On définit l'addition d'ordinaux par récurrence transfinie.*
Soit α, β deux ordinaux. Par récurrence sur β, on définit $\alpha + \beta$:

Étape 0 **:** $\alpha + 0 = \alpha$ *;*

Étape successeur : $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$ *;*

Étape limite : $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.

On vérifie aisément que l'addition ordinale est associative. Par contre elle n'est pas commutative comme le montre les exemples suivants.

Exemples 7.31. (1) $\omega + 1 = s(\omega + 0) = s(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$;

(2) $1 + \omega = sup\{1 + n : n < \omega\} = \omega$.

(3) $1 + \omega + 2 + \omega + 3 + \omega = \omega + \omega + \omega$.

Par récurrence sur β, on définit $\alpha \cdot \beta$:

Étape 0 **:** $\alpha \cdot 0 = 0$ *;*

Étape successeur : $\alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ *;*

Étape limite : $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$.

On remarque que la multiplication ordinale est associative mais n'est pas commutative.

Exemples 7.32. (1) $\omega \cdot 2 = (\omega \cdot 1) + \omega = ((\omega \cdot 0) + \omega) + \omega = \omega + \omega$;

(2) $2 \cdot \omega = sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega$.

Par récurrence sur β, on définit α^β :

Étape 0 **:** $\alpha^0 = 1$ *;*

Étape successeur : $\alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ *;*

Étape limite : $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$.

On remarque que l'exponentiation ordinale n'est ni associative ni commutative.

Exemples 7.33. (1) $2^{(1^2)} = 2^1 = 2$ et $(2^1)^2 = 2^2 = 4$;

(2) $\omega^2 = (\omega^1) \cdot \omega = ((\omega^0) \cdot \omega) \cdot \omega = (1 \cdot \omega) \cdot \omega = \omega \cdot \omega$;

(3) $2^\omega = sup\{2^n : n < \omega\} = \omega$.

7.3 Axiome du Choix, Lemme de Zorn et Théorème de Zermelo

> *« The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma ? »*
>
> Jerry L. Bona

Où l'on montre, dans ZF, que ces trois énoncés (**AC**, **TZ**, **LZ**) sont tous équivalents.

Axiome 13 (Axiome du choix)**.** Soit $(A_i)_{i\in I}$, une collection d'ensembles indexée par un ensemble I telle que $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Alors, il existe une fonction $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ telle que $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

L'axiome du choix est lui-même équivalent au lemme de Zorn, que l'on énonce maintenant.

Definition 7.34 (Ensemble inductif)**.** Un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée (que l'on nomme chaine) de X admet au moins un majorant.

Definition 7.35 (Lemme de Zorn)**.** Tout ensemble ordonné inductif admet (au moins) un élément maximal.

Definition 7.36 (Théorème de Zermelo)**.** Tout ensemble peut être bien ordonné.

Theorème 7.37. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

*(1) (**AC**) Axiome du Choix*

*(2) (**LZ**) Lemme de Zorn*

*(3) (**TZ**) Théorème de Zermelo*

Démonstration. **(AC ⇒ LZ)** Soit $(X, \leq)$ un ensemble non vide partiellement ordonné *inductif*. Supposons en vue d'une contradiction que $(X, \leq)$ n'admet pas d'élément maximal. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des chaînes de $(X, \leq)$. Pour toute chaîne $C \in \mathcal{C}$ notons

$$Maj(C) = \{m \in X \mid \text{ pour tout } c \in C \ (c \leq m \text{ et } c \neq m)\}$$

l'ensemble des majorants stricts de C. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, $Maj(C)$ est non vide car sinon un majorant de C est un élément maximal de X, contredisant notre hypothèse. Par l'axiome du choix, il existe une fonction de choix pour la collection $\{Maj(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$. Désignons par $C \mapsto m_C$ une telle fonction. Par le théorème de récurrence transfinie on définit la fonctionelle $(a_\xi)_{\xi\in \mathbf{On}}$:

- a_0 est un élément quelconque de X ;
- $a_{\alpha+1} = m_{(a_\xi)_{\xi\leq\alpha}}$;
- pour λ limite, $a_\lambda = m_{(a_\xi)_{\xi<\lambda}}$.

Les a_α sont bien définis car pour tout β $\{a_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ est une chaîne de X.[25] La fonctionnelle $\alpha \mapsto a_\alpha$ ainsi définie est injective comme on le voit par induction. On peut donc définir une fonctionnelle de domaine X qui envoie x sur α si $x = a_\alpha$, et x sur $\emptyset$ si pour tout ordinal α $x \neq a_\alpha$. Par remplacement, l'image de cette fonctionnelle sur X, à savoir la classe **On**, serait un ensemble, contredisant le fait vu en cours selon lequel c'est une classe propre.

(LZ ⇒ TZ) Soit E un ensemble non vide. Pour montrer l'existence d'un bon ordre sur E on procède comme suit. On considère X l'ensemble des bons ordres sur des parties de E, i.e.

$$X = \{(P, R) \mid P \subseteq E \text{ et } R \text{ est un bon ordre sur } P\}$$

Observer que X n'est pas vide car pour $e \in E$, $(\{e\}, \emptyset)$ est un bon ordre. On définit sur X la relation $\sqsubseteq$ de segment initial définie par

$$(P,R) \sqsubseteq (P',R') \text{ ssi } \begin{cases} P \subseteq P' & \text{et} \\ \text{pour tous } a,b \in P (aRb \Leftrightarrow aR'b) & \text{et} \\ \text{pour tout } a \in P \text{ et tout } b \in P' \setminus P \quad aR'b. \end{cases}$$

On vérifie que $(X, \sqsubseteq)$ est un ensemble inductif. Pour toute chaîne $(P_i, R_i)_{i\in I}$, l'ensemble $P = \bigcup_{i\in I} P_i$ est bien ordonné par la relation $R = \bigcup_{i\in I} R_i$, et on vérifie que (P, R) est un majorant de la chaîne $(P_i, R_i)_{i\in I}$.

Par le Lemme de Zorn il existe un élément maximal (M, R) de $(X, \sqsubseteq)$. Nous montrons que $M = E$ et donc que R est un bon ordre sur E. Supposons qu'au contraire il existe $e \in E \setminus M$, alors $(M \cup \{e\}, R \cup \{(m, e) \mid m \in M\}$ est un bon ordre qui étend strictement (M, R), contredisant la maximalité de (M, R).

(TZ ⇒ AC) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides. Par le théorème de Zermelo, il existe un bon ordre $\leq_A$ sur l'ensemble $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Nous pouvons alors définir une fonction de choix $f : I \to A$ en posant $f(i)$ égale à l'élément $\leq_A$-minimal de A_i.

□

Proposition 7.38. *L'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant : soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une surjection. Alors il existe $g : Y \to X$ telle que pour tout $y \in Y$, $f(g(y)) = y$*

25. Formellement, il faudrait définir m_E pour tout sous-ensemble non vide de X (par a_0 par exemple), puis définir la suite des a_α, enfin vérifier par induction transfinie que $\{a_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ est une chaîne pour tout β pour être assuré que pour tout β, a_β est bien le majorant strict de $\{a_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ donné par la fonction de choix.

Démonstration. Supposons tout d'abord **AC**, et soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une surjection. Pour tout $y \in Y$, on a $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Il existe donc une fonction de choix

$$g : Y \to \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = X$$

telle que pour tout $y \in Y$, $f(g(y)) = y$.

Dans l'autre sens, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles telle que pour tout $i \in I$, $X_i \neq \emptyset$. On considère la fonction

$$f : \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}) \to I$$

telle que pour tout $i \in I$ et $x \in X_i$, $f(x; i) = i$. Cette fonction est surjective puisque tous les X_i sont non vides. Par hypothèse, il existe donc une fonction

$$g : I \to \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

telle que pour tout $i \in I$, $g(i) = (x; i)$, avec $x \in X_i$. La fonction

$$\pi_1 \circ g : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$$

est donc une fonction de choix. □

Definition 7.39 (**AC**$_\omega$)**.** L'axiome du choix dénombrable et la restriction de l'axiome du choix aux familles dénombrables. Soit $(X_n)_{n \in \omega}$ une famille d'ensembles non vides. Alors il existe une fonction

$$f : \omega \to \bigcup_{n \in \omega} X_n$$

telle que pour tout $n \in \omega$, $f(n) \in X_n$.

L'axiome du choix dénombrable est strictement plus faible que l'axiome du choix, dans ZF on peut prouver l'implication (**AC**) $\Rightarrow$ (**AC**$_\omega$), mais pas l'inverse. Même si (**AC**$_\omega$) ne permet pas de développer toute l'analyse, il suffit par exemple pour établir l'équivalence entre les définitions de continuité.

Proposition 7.40. *Les deux implications suivantes sont vraies :*

*(1) (**AC**$_\omega$) implique que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

(2) Si toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors tout produit dénombrable de parties dénombrables est non vide.

Démonstration.

(1) Sans perte de généralité, on considère une famille $(A_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles dénombrables et deux à deux disjoints. Pour tout $n \in \omega$, on définit l'ensemble

$$O_n = \{f : A_n \to \omega : f \text{ est injective}\}.$$

Puisque chaque A_n est dénombrable, $O_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \omega$. D'après ($\mathbf{AC}_\omega$), il existe donc une fonction de choix

$$g : \omega \to \bigcup_{n\in\omega} O_n$$

telle que pour tout $n \in \omega$, $g(n)$ est une injection de A_n dans ω. On peut alors définir

$$\begin{aligned} F : \bigcup_{n\in\omega} A_n &\to \omega \times \omega \\ a &\mapsto (n; g(n)(x)), \text{ si } a \in A_n \end{aligned}$$

La fonction F est injective, et puisque $\omega\times\omega$ est dénombrable, $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ est dénombrable.

(2) Soit une famille $(A_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles dénombrables. Par hypothèse, $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ est dénombrable, il existe donc une injection

$$f : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \omega.$$

On définit alors pour tout $n \in \omega$

$$g_n = f^{-1}(\min(f(A_n)))$$

Pour tout $n \in \omega$, on a $g_n \in A_n$, et donc $(g_n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} A_n$.

□

Il est intéressant de noter que la deuxième implication est indépendante de ZF.

Definition 7.41. Un ensemble est infini s'il n'est équipotent à aucun ordinal fini. Un ensemble X est Dedekind-infini s'il existe une injection non surjective $f : X \to X$.

Proposition 7.42. *Un ensemble X est Dedekind infini si et seulement si il existe $Y \subseteq X$ tel que $Y \approx \omega$.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $f : X \to X$ injective non surjective, et soit $a \in X \backslash f(X)$. On définit par induction la suite $(a_n)_{n\in\omega}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Cette suite forme une fonction

$$\begin{aligned} i : \omega &\to X \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

injective, car pour tous entiers naturels n et m distincts, $a_n \neq a_m$. Ainsi $\omega \approx i(\omega) \subseteq X$.

$\Leftarrow$ Soit $Y \subseteq X$ tel que $Y \approx \omega$, et soit une bijection $g : Y \to \omega$. On définit

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in X \backslash Y \\ g^{-1}(g(x)+1) & \text{si } x \in Y \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est injective mais n'est pas surjective car $g^{-1}(0)$ n'est jamais atteint.

□

Cela prouve que dans ZF, tout ensemble Dedekind-infini est infini. L'implication inverse nécessite l'axiome du choix dénombrable.

Proposition 7.43. *(AC_ω) implique que tout ensemble infini est Dedekind-infini.*

Démonstration. Soit X infini. Pour tout $n \in \omega$, soit

$$A_n = \{B \subset X : B \approx 2^n\}.$$

Comme X est infini, pour tout $n \in \omega$ on a $A_n \neq \emptyset$. En utilisant l'axiome du choix dénombrable, on obtient une famille d'ensembles $(B_n)_{n\in\omega}$ telle que pour tout $n \in \omega$, $B_n \in A_n$. On définit alors par induction la famille $(C_n)_{n\in\omega}$:

$$\begin{cases} C_0 = B_0 \\ C_n = B_n \backslash \bigcup_{i<n} C_i \end{cases}$$

On obtient ainsi une famille telle que, pour tout $n \in \omega$, $C_n \neq \emptyset$, et telle que pour tous $n, m \in \omega$, $n \neq m \Rightarrow C_n \cap C_m = \emptyset$. En utilisant à nouveau l'axiome du choix dénombrable, on obtient une fonction

$$c : \omega \to X$$

telle que pour tout $n \in \omega$, $c(n) \in C_n$. Comme les C_n sont disjoints, cette fonction est injective, et on a donc $\omega \approx c(\omega) \subset X$. Ainsi, X est Dedekind-infini. □

Definition 7.44 (DC)**.** L'axiome des choix dépendants est l'énoncé suivant. Soit X un ensemble et R une relation binaire sur X telle que pour tout $a \in X$, il existe $b \in X$ satisfaisant aRb. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de X tels que $x_n R x_{n+1}$ pour tout $n \in \omega$.

L'axiome des choix dépendants est strictement plus faible que l'axiome du choix, et strictement plus fort que l'axiome du choix dénombrable, c'est à dire que dans ZF on peut prouver les implications (**AC**) $\Rightarrow$ (DC) $\Rightarrow$ (**AC**$_\omega$), mais pas les implications inverses. L'axiome des choix dépendants et suffisant pour développer une majeure partie de l'analyse, en particulier on peut prouver qu'il est équivalent au fait que tout espace complètement métrisable est de Baire. Par ailleurs [26] il existe un modèle de ZF+(DC) dans lequel il n'existe pas d'ensembles non Lebesgue mesurables.

7.4 Cardinaux

Definition 7.45 (Cardinal d'un ensemble)**.** Si A peut être bien ordonné, le *cardinal de* A, noté $\mathrm{Card}\,(A)$, est le plus petit ordinal α tel qu'il existe $\alpha \xrightarrow{bij.} A$.

Remarque 7.46.

(1) Avec l'Axiome du Choix, tout ensemble peut être bien ordonné par le théorème de Zermelo (équivalent à l'axiome du choix). Par conséquent il existe $<_R$ un bon ordre sur A. Par ailleurs un bon ordre est isomorphe à un ordinal unique. Donc il existe α tel que $\langle A, <_R\rangle \cong \alpha$. Cet isomorphisme est entre autre une bijection entre A et α. Par conséquent l'ensemble des ordinaux qui sont en bijection avec A est non vide. Dés lors, $\mathrm{Card}\,(A)$ est bien défini comme le plus petit d'entre eux.

(2) Pour tout ordinal α, $\mathrm{Card}\,(\alpha) \leq \alpha$.

On présupposera l'Axiome du Choix pour le reste de cette section.

Definition 7.47 (Nombre cardinal)**.** Un ordinal α est un (nombre) *cardinal* si $\alpha = \mathrm{Card}\,(\alpha)$.

Remarque 7.48.

(1) Un nombre cardinal infini est un cardinal qui n'est pas fini c'est-à-dire qui est en bijection avec un de ses sous-ensembles propres.

(2) Chaque cardinal infini est un ordinal limite [27].

26. Si ZF est consistant !
27. Car $1 + \omega = \omega$.

Exemples 7.49.

(1) Chaque entier est un cardinal.

(2) ω est un cardinal.

(3) $\omega + 1$ n'est pas un cardinal : $\mathrm{Card}\,(\omega + 1) = \omega$.

(4) $\omega \cdot \omega$ n'est pas un cardinal.

(5) ω^ω n'est pas un cardinal.

On peut se demander quelle est la relation entre la cardinalité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et celle de $\mathbb{N}$. On sait déjà que $\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(\mathbb{N})) > \mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$ puis qu'on sait que pour tout ensemble A il n'y a pas de bijection entre A est l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(A)$ (voir Théorème 2.8 (Cantor)). Par conséquent, pour tout nombre cardinal κ, on a $\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(\kappa)) > \kappa$ et donc l'ensemble suivant est non vide.

$$\{\lambda \leq \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(\kappa)) \mid \kappa < \lambda \text{ et } \lambda \text{ est un nombre cardinal}\}$$

Il possède donc un plus petit élément que l'on note κ^+ : c'est le plus petit nombre cardinal strictement plus grand que κ.

Cela motive la définition suivante :

Definition 7.50 ([AC] Suite ordinale aleph)**.** On définit par récurrence transfinie la *suite ordinale* $\aleph$ *(aleph)* par :

Étape 0 **:** $\aleph_0 = \omega$;

Étape successeur : $\aleph_{\beta+1}$ est le plus petit cardinal plus grand que $\aleph_\beta$;

Étape limite : $\aleph_\beta = \sup\{\aleph_\gamma : \gamma < \beta\}$.

Il est facile de montrer que chaque $\aleph_\alpha$ est un cardinal infini et que la famille $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{On}}$ contient exactement tous les cardinaux infinis.

Proposition 7.51.

(1) Pour chaque ordinal α, $\aleph_\alpha$ est un nombre cardinal infini.

(2) Chaque cardinal infini est de la forme $\aleph_\alpha$ pour un ordinal α.

Démonstration.

(1) C'est immédiat pour $\alpha = 0$ et pour α successeur. Pour α un ordinal limite, on a $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma : \gamma < \alpha\}$. En supposant $\mathrm{Card}\,(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$, il existerait $\gamma < \alpha$ tel que $\mathrm{Card}\,(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\gamma < \aleph_\alpha$ et donc également

$$\mathrm{Card}\,(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\gamma < \aleph_{\gamma+1} < \aleph_\alpha$$

ainsi que les injections suivantes :

$$\aleph_\alpha \xrightarrow{inj.} \mathrm{Card}\,(\aleph_\alpha) \xrightarrow{inj.} \aleph_\gamma \xrightarrow{inj.} \aleph_{\gamma+1} \xrightarrow{inj.} \aleph_\alpha.$$

(Par composition d'injections) on aurait donc une injection entre n'importe lesquels de ces ensembles. En particulier il y aurait une injection $\aleph_{\gamma+1} \xrightarrow{inj.} \aleph_\gamma$ et l'injection triviale $id : \aleph_\gamma \xrightarrow{inj.} \aleph_{\gamma+1}$. Par le Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein (2.9) il existerait une bijection $\aleph_\gamma \xrightarrow{bij.} \aleph_{\gamma+1}$, ce qui contredirait la définition de $\aleph_{\gamma+1}$.

(2) Soit κ un cardinal infini. Considérons α le plus petit ordinal tel que $\kappa \leq \aleph_\alpha$. On remarque aisément qu'un tel ordinal α existe car pour tout nombre ordinal β on a $\beta \leq \aleph_\beta$ et par conséquent $\kappa \leq \aleph_\kappa$ est vérifié. On montre ensuite que l'on ne peut pas avoir $\kappa < \aleph_\alpha$ et donc $\kappa = \aleph_\alpha$. Pour cela supposons que $\kappa < \aleph_\alpha$. On a alors
   (a) $\alpha = 0$ est impossible puisque κ est infini.
   (b) $\alpha = \beta + 1$ est impossible puisqu'alors on aurait
   $$\aleph_\beta < \kappa < \aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta{}^+.$$
   (c) α ordinal limite est impossible puisqu'alors il existerait $\gamma < \alpha$ tel que $\kappa \leq \aleph_\gamma$ contredisant la minimalité de α.

□

Remarque 7.52.

(1) On écrit très souvent ω_α pour $\aleph_\alpha$, avec la convention que $\omega_0 = \omega$. Plus précisément lorsqu'il est important de distinguer l'ordinal du cardinal on utilise ω_α pour parler de l'ordinal et $\aleph_\alpha$ pour parler du cardinal.

(2) L'**Hypothèse du Continu** est l'affirmation :
$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = \aleph_1. \qquad \textbf{(CH)}$$
L'**Hypothèse Généralisée du Continu** est : l'affirmation :
$$\forall \alpha \in \mathbf{On}\ \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\aleph_\alpha)\big) = \aleph_{\alpha+1}. \qquad \textbf{(GCH)}$$
En fait (pour autant que ZFC soit consistante) ni l'Hypothèse du Continu ni l'Hypothèse Généralisée du Continu ne sont prouvables ou réfutables par ZFC.

Kurt Gödel a montré[28] que l'ajout de l'Hypothèse Généralisée du Continu à la théorie des ensembles ne changeait nullement la consistance de cette dernière.
Paul Cohen a montré[29] que l'hypothèse du continu n'était pas prouvable à partir de ZFC[30]. Elle est donc indépendante de la théorie des ensembles.

28. Gödel, K. (1940). The Consistency of the Continuum-Hypothesis. Princeton University Press.
29. Cohen, Paul J. (December 15, 1963). "The Independence of the Continuum Hypothesis". Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 50 (6) : 1143-1148.
30. sauf si cette dernière est inconsistante !

Plus précisément on sait maintenant que les théories suivantes sont équiconsistantes [31] :

(a) **ZF**
(b) **ZF** + **CH**
(c) **ZF** + ¬**CH**
(d) **ZF** + **GCH**
(e) **ZF** + ¬**GCH**
(f) **ZF** + **AC**
(g) **ZF** + ¬**AC**
(h) **ZF** + **AC** + **CH**
(i) **ZF** + **AC** + **GCH**

Definition 7.53 ([AC] Arithmétique cardinale)**.** Pour λ, κ deux cardinaux, on définit les **opérations cardinales** suivantes :

Addition : $\lambda + \kappa = card(\{0\} \times \lambda \cup \{1\} \times \kappa)$

Multiplication : $\lambda \cdot \kappa = card(\lambda \times \kappa)$

Exponentiation : $\lambda^\kappa = card({}^\kappa\lambda)$; où ${}^\kappa\lambda$ désigne l'ensemble des fonctions (totales) de κ dans λ.

Remarque 7.54.

(1) Lorsque λ et κ sont des cardinaux finis, les opérations définies ne sont pas différentes de l'addition, de la multiplication et de l'exponentiation sur les entiers.

(2) $2^{\aleph_0}$ désigne la cardinalité de l'ensemble des fonctions des entiers dans $\{0, 1\}$; autrement dit la cardinalité de l'ensemble des parties d'entiers. Et plus généralement $2^{\aleph_\alpha}$ désigne la cardinalité de l'ensemble des parties de $\aleph_\alpha$.
Ainsi l'**Hypothèse du Continu** devient :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \qquad \textbf{(CH)}$$

L'**Hypothèse Généralisée du Continu** devient : l'affirmation :

$$\forall \alpha \in \mathbf{On}\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}. \qquad \textbf{(GCH)}$$

Les opérations arithmétiques sur les cardinaux se révèlent extrêmement simples puisqu'on a :

Lemme 7.55 (AC)**.** *Soient λ, κ deux cardinaux non nuls et dont l'un au moins est infini.*

$$\lambda + \kappa = \lambda \cdot \kappa = \max(\lambda, \kappa)$$

Démonstration. Posons $\kappa = \max(\lambda, \kappa)$. Il suffit de monter que pour tout cardinal infini κ, l'ensemble $\kappa \times \kappa$ s'injecte dans κ puisqu'alors

$$\kappa \hookrightarrow \{0\} \times \lambda \cup \{1\} \times \kappa \hookrightarrow \lambda \times \kappa \hookrightarrow \kappa \times \kappa \hookrightarrow \kappa$$

31. c'est-à-dire qu'elles sont toutes consistantes ou bien toutes inconsistantes.

L'hypothèse est évidente pour $\kappa = \aleph_0$. Supposons $\kappa > \aleph_0$ et procédons par récurrence : on suppose l'hypothèse vraie pour des cardinaux plus petits que κ. On définit le bon ordre strict suivant sur $\kappa \times \kappa$:

$$(\alpha, \beta) \lhd (\alpha', \beta')$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \max(\alpha, \beta) < \max(\alpha', \beta') \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \begin{cases} \max(\alpha, \beta) = \max(\alpha', \beta') \\ \qquad\qquad \text{et} \\ (\alpha, \beta) <_{\text{lexicog.}} (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

On considère alors l'ordinal θ qui représente le type d'ordre du bon ordre $(\kappa \times \kappa, \lhd)$, c'est-à-dire l'unique ordinal auquel ce bon ordre est isomorphe. Il nous suffit dès lors de montrer que le cardinal de θ est κ pour obtenir $\kappa \times \kappa \hookrightarrow \theta \hookrightarrow \kappa$.

Soit f l'unique isomorphisme entre $(\kappa \times \kappa, \lhd)$ et θ. Considérons un couple quelconque $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$ tel que α, β ne soient pas tous les deux finis, ainsi que son image $f(\alpha, \beta) = \gamma \in \theta$. On a que

$$\text{Card}\,(\gamma) \leq \text{Card}\Big(\big(\max(\alpha, \beta) + 1\big) \times \big(\max(\alpha, \beta) + 1\big)\Big).$$

Or si l'on pose $\lambda = \text{Card}\big(\max(\alpha, \beta) + 1\big)$, puisque $\lambda < \kappa$ est vérifié, en appliquant l'hypothèse d'induction on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Card}\,(\gamma) & \leq & \text{Card}\Big(\big(\max(\alpha, \beta) + 1\big) \times \big(\max(\alpha, \beta) + 1\big)\Big) \\ & \leq & \text{Card}\,(\lambda \times \lambda) \\ & \leq & \lambda \\ & < & \kappa. \end{array}$$

On en déduit que pour tout ordinal $\gamma < \theta$, $\text{Card}\,(\gamma) < \kappa$ d'où $\theta \leq \kappa$. Par ailleurs $\kappa \hookrightarrow \kappa \times \kappa \hookrightarrow \theta$, d'où $\kappa \leq \theta$. Ce qui donne au final $\theta = \kappa$, montrant que $\kappa \times \kappa$ s'injecte dans κ.

□

Proposition 7.56 (Propriétés des nombres cardinaux infinis)**.** *Soit A un ensemble de cardinalité infinie κ. Alors,*

(1) $A \times A$ est de cardinalité κ ;

(2) $A^{<\omega}$ (l'ensemble des suites finies sur A) est de cardinalité κ.

Démonstration. On montre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\mathrm{Card}\left(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}\right) = \kappa$$

en utilisant le fait que :

$$\mathrm{Card}\,(A \times A) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Card}\,(A) \times \mathrm{Card}\,(A)) = \mathrm{Card}\,(A)\cdot\mathrm{Card}\,(A) = \kappa\cdot\kappa = \kappa.$$

On montre ensuite que

$$\kappa \leq \mathrm{Card}\left(A^{<\omega}\right) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}\right) \leq \mathrm{Card}\,(A)\cdot\aleph_0 \leq \kappa\cdot\aleph_0 \leq \kappa.$$

□

Definition 7.57. Un cardinal infini κ est dit *régulier* si pour toute partie $X \subsetneq \kappa$ telle que $\mathrm{Card}\,(X) < \kappa$, on a $\sup(X) < \kappa$. Un cardinal qui n'est pas régulier est dit *singulier*.

Il est clair que $\aleph_0$ est régulier. Par contre, $\aleph_\omega$ est singulier, car l'ensemble $\{\aleph_n : n \in \omega\} \subseteq \aleph_\omega$ est de cardinalité $\aleph_0 < \aleph_\omega$ et vérifie $\sup\{\aleph_n : n \in \omega\} = \aleph_\omega$. De même

Definition 7.58. Soient α et β deux ordinaux non nuls.

(1) On dit que α est *cofinal* à β s'il existe une fonction $f : \beta \xrightarrow{cof.} \alpha$ qui soit *cofinale*, i.e., vérifiant que pour tout $\gamma \in \alpha$, il existe $\delta \in \beta$ tel que $f(\delta) \geq \gamma$.

(2) La *cofinalité* d'un ordinal α non nul est le plus petit ordinal β — noté $\beta = \mathrm{cof}(\alpha)$ — tel que α soit cofinal à β.

Proposition 7.59. *Soit α un nombre ordinal non nul.*

(1) Si α est un ordinal successeur, alors $\mathrm{cof}(\alpha) = 1$.

(2) Si α est un ordinal limite, alors $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un nombre cardinal.

Démonstration. (1) Si $\alpha = \beta + 1$, alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \{0\} & \xrightarrow{cof.} & \beta \cup \{\beta\} \\ & 0 & \mapsto & \beta \end{array}$$

telle que $f(0) = \beta$ est cofinale dans α.

(2) Soit β un ordinal tel qu'il existe une fonction cofinale $f : \beta \xrightarrow{cof.} \alpha$, et soit une bijection $h : \mathrm{Card}\,(\beta) \xrightarrow{bij.} \beta$. On a à la fois $\mathrm{Card}\,(\beta) \leq \beta$ et $f \circ h : \mathrm{Card}\,(\beta) \xrightarrow{cof.} \alpha$ est cofinale.

□

Exemples 7.60.

(1) $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$
(2) $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$
(3) $\mathrm{cof}(\omega^2) = \omega$
(4) $\mathrm{cof}(\omega^\omega) = \omega$
(5) $\mathrm{cof}\left(\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}}\right) = \omega$
(6) $\mathrm{cof}(\aleph_1) = \aleph_1$
(7) $\mathrm{cof}(\aleph_2) = \aleph_2$
(8) $\mathrm{cof}(\aleph_{38}) = \aleph_{38}$
(9) $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \omega$
(10) $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$
(11) $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$
(12) $\mathrm{cof}(\aleph_{\aleph_\omega}) = \omega$

Proposition 7.61. *Soit α, β deux ordinaux limites. S'il existe une fonction cofinale $f' : \beta \xrightarrow{cof.} \alpha$, alors il existe une fonction cofinale **strictement croissante** $f : \beta \xrightarrow{cof.} \alpha$.*

Démonstration. On construit f par récurrence transfinie en posant :

(1) $f(0) = f'(0)$;
(2) $f(\xi + 1) = \sup\{f'(\xi + 1), f(\xi) + 1\}$;
(3) $f(\lambda) = \sup\big(\{f'(\lambda)\} \cup \{f(\xi) \mid \xi < \lambda\}\big)$.

□

Proposition 7.62. *Soit α un ordinal limite. Alors* $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Démonstration. Découle directement du fait que la composition de deux fonctions cofinales strictement croissantes est elle même une fonction cofinale. □

Proposition 7.63. *Soit λ un cardinal infini. Alors λ est régulier si et seulement si* $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.

Démonstration.

(⇒) Supposons tout d'abord que $\mathrm{cof}(\lambda) = \kappa < \lambda$. Il existe donc une fonction cofinale $f : \kappa \xrightarrow{cof.} \lambda$. Mais par définition, cela implique que $\sup(\{f(\alpha) : \alpha \in \kappa\}) = \lambda$. Le cardinal λ n'est donc pas régulier, car $\mathrm{Card}(\{f(\alpha) : \alpha \in \kappa\}) = \kappa < \lambda$.

(⇐) Supposons que λ n'est pas régulier. Il existe alors un sous-ensemble $X \subsetneq \lambda$ tel que $\mathrm{Card}(X) = \kappa < \lambda$ et $\sup(X) = \lambda$. Comme X est un ensemble d'ordinaux, il est bien ordonné et est donc isomorphe à un unique ordinal $\xi < \lambda$. Soit l' (unique) isomorphisme $f : \xi \xrightarrow{isom.} X$, on a alors $f : \xi \xrightarrow{cof.} \lambda$, car $\sup(X) = \lambda$. On a donc $\mathrm{cof}(\lambda) = \mathrm{cof}(\xi) < \lambda$.

□

Proposition 7.64. *Tout cardinal successeur infini (de la forme κ^+) est régulier.*

Autrement dit, pour tout ordinal α, le nombre cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier.

Démonstration. Soit κ^+ un cardinal successeur, et supposons par l'absurde qu'il existe une fonction cofinale $f : \lambda \xrightarrow{cof.} \kappa^+$ pour un certain nombre cardinal $\lambda \leq \kappa$. Pour chaque $\alpha \in \lambda$, on a $\mathrm{Card}\big(f(\alpha)\big) \leq \kappa$ et on choisit alors une surjection $g_\alpha : \kappa \xrightarrow{surj.} f(\alpha)$ et on définit

$$\begin{aligned} g : \lambda \times \kappa &\to \kappa^+ \\ (\alpha, \beta) &\mapsto g_\alpha(\beta). \end{aligned}$$

Comme f est cofinale, g est une surjection. On a donc

$$\kappa = \mathrm{Card}\,(\lambda \times \kappa) \geq \kappa^+,$$

une contradiction. □

Definition 7.65. Un nombre cardinal κ est dit *faiblement inaccessible* s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) κ est un cardinal limite[32] et

(2) κ est régulier.

L'existence de cardinaux faiblement inaccessibles est indépendante de ZFC. Si l'on ajoute (comme axiome) à ZFC la formule close $\exists In.$ qui dit « il existe un cardinal faiblement inaccessible »alors la théorie obtenue ($ZFC + \exists$ *In.*) prouve la consistance de ZFC. Une conséquence du second théorème d'incomplétude de Gödel est que ZFC ne prouve pas sa propre consistance (à moins d'être inconsistante car nous verrons que toute théorie inconsistante prouve absolument n'importe quoi). Une formule close qui ajoutée à ZFC permet de prouver la consistance de ZFC est appelée une *hypothèse de grand cardinal*. Ainsi l'existence d'un cardinal faiblement inaccessible est une hypothèse de grand cardinal.

Lemme 7.66 (Lemme de König)**.** *Pour tout cardinal infini κ, on a*

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

Démonstration. On montre qu'il n'existe pas de bijection $g : \kappa \xrightarrow{bij.} \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$ pour la raison qu'il n'existe pas de surjection $g : \kappa \xrightarrow{surj.} {}^{\mathrm{cof}(\kappa)}\kappa$.

Pour cela, il suffit à partir de n'importe quelle fonction $g : \kappa \to {}^{\mathrm{cof}(\kappa)}\kappa$ et d'une fonction cofinale $f : \mathrm{cof}(\kappa) \xrightarrow{cof.} \kappa$, de construire (par un argument diagonal) une fonction $h : \mathrm{cof}(\kappa) \to \kappa$ qui n'appartienne pas à l'image de

32. Cela signifie que $\kappa = \aleph_\lambda$ pour un ordinal limite λ. On rappelle que 0 n'est pas un ordinal limite !

la fonction g (montrant ainsi que g n'est pas surjective). On définit ainsi la fonction $h : \mathrm{cof}(\kappa) \to \kappa$ en posant pour tout $\alpha < \mathrm{cof}(\kappa)$:

$$h(\alpha) = \textit{le plus petit ordinal dans } \big\{\beta \in \kappa \mid \forall \xi \leq f(\alpha) \;\; g(\xi)(\alpha) \neq \beta\big\}$$

Montrons que h est bien définie et pour cela montrons que l'ensemble

$$\big\{\beta \in \kappa \mid \forall \xi \leq f(\alpha) \;\; g(\xi)(\alpha) \neq \beta\big\}$$

est non vide. Pour cela il suffit de remarquer que pour $\alpha < \mathrm{cof}(\kappa)$ on a $f(\alpha) \in \kappa$ (autrement dit $f(\alpha) < \kappa$) et donc $\mathrm{Card}\big(f(\alpha)\big) < \kappa$. Par conséquent

$$\mathrm{Card}\Big(\big\{g(\xi)(\alpha) \mid \xi \leq f(\alpha)\big\}\Big) < \kappa$$

et donc l'ensemble suivant est non vide

$$\underbrace{\kappa \smallsetminus \underbrace{\big\{g(\xi)(\alpha) \mid \xi \leq f(\alpha)\big\}}_{\textit{cardinalité } <\kappa}}_{\textit{cardinalité } =\kappa} = \{\beta \in \kappa \mid \forall \xi \leq f(\alpha) \;\; g(\xi)(\alpha) \neq \beta\}$$

Supposons maintenant que h appartienne à l'image de g et donc qu'il existe un ordinal $\gamma < \kappa$ tel que $g(\gamma) = h$. Puisque $f : \mathrm{cof}(\kappa) \xrightarrow{cof.} \kappa$ est une fonction cofinale, il existe un ordinal $\theta < \mathrm{cof}(\kappa)$ tel que $f(\theta) > \gamma$. On obtient alors

$$h(\theta) = \textit{le plus petit ordinal dans } \big\{\beta \in \kappa \mid \forall \xi \leq f(\theta) \;\; g(\xi)(\theta) \neq \beta\big\}.$$

Or $\gamma < f(\theta)$ et $g(\gamma) = h$ entraine que

$$h(\theta) = g(\gamma)(\theta) \in \big\{g(\xi)(\theta) \mid \xi \leq f(\theta)\big\}$$

et par conséquent

$$h(\theta) \notin \kappa \smallsetminus \big\{g(\xi)(\theta) \mid \xi \leq f(\theta)\big\} = \{\beta \in \kappa \mid \forall \xi \leq f(\theta) \;\; g(\xi)(\theta) \neq \beta\}\,,$$

une contradiction. □

Une conséquence très importante du Lemme de König c'est que la puissance du continu (la cardinalité de $2^{\aleph_0}$) ne peut pas être un ordinal de la forme $\aleph_\alpha$ pour un α limite de cofinalité ω. En effet, on ne peut pas avoir $\mathrm{cof}\big(2^{\aleph_0}\big) = \aleph_0$ comme le montre le résultat suivant :

Corollaire 7.67. *Pour tout cardinal infini κ, on a*

$$\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa.$$

Démonstration. D'après ce qui précède et en utilisant le fait que $(\kappa^\mu)^\lambda = \kappa^{\mu\cdot\lambda}$ (cf. Série 9), on obtient :

$$2^\kappa < (2^\kappa)^{\mathrm{cof}(2^\kappa)} = 2^{\kappa\cdot\mathrm{cof}(2^\kappa)} = 2^{\max\{\kappa,\ \mathrm{cof}(2^\kappa)\}}.$$

Il y a alors deux possibilités pour $\max\{\kappa,\ \mathrm{cof}(2^\kappa)\}$:

- Si l'on suppose $\kappa = \max\{\kappa,\ \mathrm{cof}(2^\kappa)\}$, on obtient alors la contradiction qui suit montrant que ce cas n'est pas possible :

$$2^\kappa < (2^\kappa)^{\mathrm{cof}(2^\kappa)} = 2^{\max\{\kappa,\ \mathrm{cof}(2^\kappa)\}} = 2^\kappa.$$

- On a donc $\max\{\kappa,\ \mathrm{cof}(2^\kappa)\} = \mathrm{cof}(2^\kappa)$ et également $\mathrm{cof}(2^\kappa) \neq \kappa$, ce qui donne $\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.

□

On a ainsi que pour tout α ordinal limite de cofinalité dénombrable,

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha.$$

C'est l'unique restriction à (CH) prouvable dans ZFC. Cette restriction interdit par exemple d'avoir $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$ ou bien $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+\omega}$ ou bien $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega^\omega}$ ou bien $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1+\omega}$ ou encore $2^{\aleph_0} = \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}}}}}}}}}}}$.

Dans tous ce chapitre on a travaillé avec l'Axiome du Choix. Un certain nombre des résultats que l'on a énoncés ne sont plus vrais lorsqu'on ne peut pas utiliser l'Axiome du Choix.

8 Théorèmes de Löwenheim-Skolem

> *« Les escaliers encombrés ne suffisent plus ; l'ascenseur à la descente comme à la montée est toujours plein. »*
>
> Henri Michaux (*La nuit remue*, 1935)

Il y a deux manières de prendre l'ascenseur : l'une pour monter (↑), l'autre pour descendre (↓). Où l'on verra que si on ne peut pas descendre trop bas, on peut par contre parfois monter trop haut. Néanmoins, dans les cas où on sera monté trop haut, on pourra toujours, grace au Théorème de compacité, redescendre à l'étage désiré ...

8.1 Énoncés des théorèmes

Theorème 8.1 (Löwenheim-Skolem descendant **(LS↓)**)**.** *Soient $\mathscr{L}$ un langage égalitaire et T une théorie sur ce langage. Si $\mathscr{L}$ est infini, on pose $\kappa = \mathrm{Card}(\mathscr{L})$, sinon on pose $\kappa = \omega$ (où ω est la cardinalité de $\mathbb{N}$). S'il existe un modèle de T de cardinalité $\lambda > \kappa$, alors il existe un modèle de T de cardinalité κ.*

Theorème 8.2 (Löwenheim-Skolem montant **(LS↑)**)**.** *Soient $\mathscr{L}$ un langage égalitaire et T une théorie sur ce langage. Si $\mathscr{L}$ est infini, on pose $\kappa = \mathrm{Card}(\mathscr{L})$, sinon on pose $\kappa = \omega$(où ω est la cardinalité de $\mathbb{N}$). S'il existe un modèle de T de cardinalité κ, alors pour tout $\lambda > \kappa$ il existe un modèle de T de cardinalité λ.*

Remarque 8.3. On note respectivement, **(LS↓)** et **(LS↑)** pour référer aux théorèmes de Löwenheim-Skolem descendant et de Löwenheim-Skolem montant respectivement.

Avant de prouver les théorèmes, on introduit quelques outils dont on a besoin.

Definition 8.4 (Forme prénexe polie)**.** Une formule φ est sous *forme prénexe polie* si elle s'écrit $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_k x_k \Psi$ avec pour tout $1 \leq i < j \leq k$, $Q_i, Q_j \in \{\forall, \exists\}$, $x_i \neq x_j$ et si de plus Ψ est sans quantificateur.

Proposition 8.5. *Pour toute formule φ, il existe une formule Ψ sous forme prénexe polie universellement équivalente à φ, i.e. telle que $\varphi \leftrightarrow \Psi$ est universellement valide.*

Démonstration. Exercice. □

Un premier résultat facile sur la manière dont on obtient le plus petit ensemble clos par un ensemble de fonctions.

Lemme 8.6. *Si A et M sont des ensembles tels que $A \subseteq M$, et $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions telles que $f_i : M^{n_i} \longrightarrow M$ où $n_i \in \mathbb{N}$; alors le plus petit ensemble N qui vérifie $A \subseteq N \subseteq M$ et soit clos par chacune des fonctions f_i $(i \in I)$ est obtenu par récurrence par :*

(1) $A_0 = A$

(2) $A_{k+1} = A_k \cup \bigcup_{i\in I} \Big\{ f_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \mid (a_1, \ldots, a_{n_i}) \in A_k^{n_i} \Big\}$

(3) $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

De plus, si $|A| = \kappa \geq \aleph_0$ et $|I| \leq \kappa$, alors $|N| = \kappa$.

Démonstration. Exercise. □

8.2 Preuves des théorèmes

Preuve de Lowenheim-Skolem descendant ***(LS↓)*** *:*

Si $T = \emptyset$, le résultat est immédiat. Supposons donc $T \neq \emptyset$ et également que chaque formule de T est sous forme prénexe polie.

Soit $\mathscr{M}$ un modèle de T de cardinalité $\lambda > \kappa$. Pour chaque formule (close) $\varphi \in T$ on choisit σ_φ (**AC**) une stratégie gagnante pour le ***Vérificateur*** dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi)$. Chacune de ces stratégies induit un nombre fini de fonctions $(g_i^{\sigma_\varphi})_{i<n_{\varphi_\exists}}$ – où $n_{\varphi_\exists}$ désigne le nombre de quantificateurs existentiels dans φ – tel qu'indiqué dans l'exemple qui suit [33] :

$$\varphi := \forall x_1\ \exists x_2\ \forall x_3\ \exists x_4\ \exists x_5\ \forall x_6\ \exists x_7\ \psi$$

(1)
$$\begin{array}{rccc} g_0^{\sigma_\varphi} & : & M & \longrightarrow & M \\ & & x_1 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

où $g_0^{\sigma_\varphi}$ est définie, pour chaque $a \in M$ par $g_0^{\sigma_\varphi}(a) :=$ l'unique $b \in M$ que la stratégie σ_φ choisit pour x_2 lorsque le Falsificateur choisit a pour x_1.

(2)
$$\begin{array}{rccc} g_1^{\sigma_\varphi} & : & M^2 & \longrightarrow & M \\ & & (x_1, x_3) & \longmapsto & x_4 \end{array}$$

où $g_1^{\sigma_\varphi}$ est définie, pour chaque $a, b \in M$ par $g_1^{\sigma_\varphi}(a, b) :=$ l'unique $c \in M$ que la stratégie σ_φ choisit pour x_4 lorsque le Falsificateur choisit a pour x_1 et b pour x_3.

33. où ψ est une formule sans quantificateur.

(3)
$$\begin{array}{rccc} g_2^{\sigma_\varphi} & : & M^2 & \longrightarrow & M \\ & & (x_1, x_3) & \longmapsto & x_5 \end{array}$$
où $g_2^{\sigma_\varphi}$ est définie, pour chaque $a, b \in M$ par $g_2^{\sigma_\varphi}(a, b) :=$ l'unique $c \in M$ que la stratégie σ_φ choisit pour x_5 lorsque le Falsificateur choisit a pour x_1 et b pour x_3.

(4)
$$\begin{array}{rccc} g_3^{\sigma_\varphi} & : & M^3 & \longrightarrow & M \\ & & (x_1, x_3, x_6) & \longmapsto & x_7 \end{array}$$
où $g_3^{\sigma_\varphi}$ est définie, pour chaque $a, b, c \in M$ par $g_3^{\sigma_\varphi}(a, b, c) :=$ l'unique $d \in M$ que la stratégie σ_φ choisit pour x_7 lorsque le Falsificateur choisit a pour x_1, b pour x_3 et c pour x_6.

On considère alors n'importe quel sous-ensemble $A \subseteq M$ tel que

(1) pour tout symbole de constante c du langage $\mathscr{L}$, $c^{\mathscr{M}} \in A$;

(2) $|A| = \kappa$.

On considère alors N le plus petit ensemble tel que $A \subseteq N \subseteq M$ et N est clos pour l'ensemble des fonctions suivantes :

$$F = \{g_i^{\sigma_\varphi} \mid \varphi \in T \text{ et } i < n_{\varphi_\exists}\} \cup \{f^{\mathscr{M}} \mid f \text{ symbole de fonction de } \mathscr{L}\}.$$

On définit alors le modèle $\mathscr{N}$ comme étant la restriction de $\mathscr{M}$ au domaine N :

(1) $|\mathscr{N}| = N$;

(2) pour tout symbole de constante c de $\mathscr{L}$, $c^{\mathscr{N}} = c^{\mathscr{M}}$;

(3) pour tout symbole de fonction f de $\mathscr{L}$ d'arité n_f, $f^{\mathscr{N}} = f^{\mathscr{M}} \restriction N^{n_f}$;

(4) pour tout symbole de relation R de $\mathscr{L}$ d'arité n_R, $R^{\mathscr{N}} = R^{\mathscr{M}} \cap N^{n_R}$.

Il ressort que

- $|N| = \kappa$ par application du Lemme 8.6 en remarquant que l'on a $|F| \leq \kappa$;
- pour chaque $\varphi \in T$, la stratégie σ_φ est gagnante pour le ***V**érificateur* dans $\mathbb{EV}(\mathscr{N}, \varphi)$.

En conséquence $\mathscr{N}$ est un modèle de cardinalité κ satisfaisant T.

□

Preuve de Lowenheim-Skolem montant ***(LS↑)*** *:*

On enrichit le langage $\mathscr{L}$ avec un ensemble C de cardinalité λ composé de nouveaux symboles de constantes. On définit pour cela $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup C$, qui est de cardinalité λ, puisque $|\mathscr{L}| \leq \kappa < \lambda$. On considère de plus l'ensemble de formules sur $\mathscr{L}'$ suivant :

$$\Gamma = \{\neg c = c' \mid c \neq c' \text{ et } c, c' \in C\}$$

puis la théorie $T' = T \cup \Gamma$. On utilise maintenant le théorème de compacité pour construire un modèle de T'. Soit $\Delta \subseteq T'$, Δ fini. Par hypothèse, il existe un modèle $\mathscr{M}$ de T de cardinalité infinie κ. Or, $\Delta \cap \Gamma$ est fini, on peut donc étendre le modèle $\mathscr{M}$ en un modèle $\mathscr{M}'$ de Δ, en interprétant les symboles de constantes apparaissant dans $\Delta \cap \Gamma$ de façon appropriée. Par conséquent, T' est finiment satisfaisable, et par le théorème de compacité T' est satisfaisable. Or, un modèle de T' est en particulier un modèle de T de cardinalité supérieure ou égale à λ. On applique maintenant **(LS↓)** à ce modèle pour obtenir un modèle de T de cardinalité égale à λ.

□

9 Théorie de la démonstration

Nous allons étudier trois approches qui sont équivalentes :

(1) les systèmes axiomatiques (réalisés par différents mathématiciens, dont Hilbert) ;

(2) la déduction naturelle (Gentzen 1930) ;

(3) le calcul des séquents (Gentzen 1936).

Le but est d'obtenir le théorème de complétude, c'est-à-dire $\Gamma \models \varphi$ si et seulement si $\Gamma \vdash \varphi$. On rappelle tout de même la définition de conséquence sémantique vue aux exercices :

Definition 9.1 (Conséquence sémantique)**.** On dit que φ est *conséquence sémantique* de la théorie Γ, ce que l'on note $\Gamma \models \varphi$, si et seulement si tout modèle de Γ satisfait φ.

9.1 Systèmes axiomatiques

On se restreint aux formules avec uniquement les symboles $\to$, $\neg$ comme connecteurs et $\forall$ comme quantificateur. Voici l'un des systèmes d'axiomes possibles :

Axiomes 1. Pour toutes formules φ, ψ, θ et pour tout terme t,

(Ax 1) $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$;

(Ax 2) $\big((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))\big)$;

(Ax 3) $\big((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)\big)$;

(Ax 4) $\big(\forall x\varphi \to \varphi_{[t/x]}\big)$;

(Ax 5) $\big(\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)\big)$;

(Ax 6) $(\varphi \to \forall x\varphi)$ si x n'a pas d'occurrences libres dans φ.

Règle 9.2 (Modus ponens)**.** *Pour toutes formules φ et ψ, à partir de φ et de $\varphi \to \psi$ on déduit ψ.*

Definition 9.3 (Démonstration)**.** Une *démonstration* d'une formule φ à partir d'un ensemble de formules Γ est une suite finie de formules $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ telle que $\varphi_n = \varphi$ et que chaque formule φ_i vérifie l'une des trois conditions suivantes :

(i) la formule φ_i est un axiome ;

(ii) la formule φ_i est une hypothèse (c'est-à-dire $\varphi_i \in \Gamma$) ;

(iii) la formule φ_i est obtenue par modus ponens à partir de φ_j et φ_k avec $j, k < i$.

L'avantage de cette approche est que le nombre d'axiomes et de règles est relativement petit. Par contre, son gros défaut est que l'écriture d'une preuve est vraiment difficile et non intuitive, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 9.4. On va construire une preuve (assez courte !) de $\varphi \to \varphi$ avec $\Gamma = \emptyset$.

$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi))$	*(Ax 2)*
$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	*(Ax 1)*
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	*modus ponens (1,2)*
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	*(Ax 1)*
$\varphi \to \varphi$	*modus ponens (3,4)*

9.2 Déduction naturelle

On introduit maintenant une autre théorie de la démonstration qui est beaucoup plus naturelle. Le lecteur qui désirerait en savoir plus pourra se référer à [13, 22, 23, 51, 67, 67].

Definition 9.5 (Séquent)**.** Un *séquent* est un couple (Γ, φ) où Γ est un *ensemble fini* de formules et φ est une formule. On le note

$$\Gamma \vdash \varphi.$$

L'ensemble Γ représente l'ensemble des hypothèses et φ représente la conclusion.

Notation 9.6. On se place dans le cadre de la définition précédente. On introduit des notations alternatives à $\Gamma \vdash \varphi$ suivant l'écriture de Γ.

(i) Le symbole $\vdash$ se lit « démontre » ou « prouve ».

(ii) Cas où $\Gamma = \emptyset$: on notera

$$\text{« } \vdash \varphi \text{ » au lieu de « } \emptyset \vdash \varphi \text{ ».}$$

(iii) Cas où $\Gamma = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_k\}$: on notera

$$\text{« } \varphi_0, \ldots, \varphi_k \vdash \varphi \text{ » au lieu de « } \{\varphi_0, \ldots, \varphi_k\} \vdash \varphi \text{ ».}$$

(iv) Cas où $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i$: on notera

$$\text{« } \Gamma_0, \ldots, \Gamma_k \vdash \varphi \text{ » au lieu de « } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k \vdash \varphi \text{ ».}$$

(v) Cas où $\Gamma = \Delta \cup \{\psi\}$: on notera

$$\text{« } \Delta, \psi \vdash \varphi \text{ » au lieu de « } \Delta \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ ».}$$

(vi) Le symbole $\bot$ soit tient lieu d'une formule qui soit une contradiction [34], soit on le considère comme un symbole de relation 0-aire dont l'interprétation [35] dans tout modèle est l'ensemble vide (d'où le fait que la relation $\mathscr{M} \models \bot$ ne soit jamais vérifée).

34. Comme par exemple la formule $(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

35. L'interprétation d'un symbole de relation 0-aire R dans un modèle $\mathscr{M}$ quelconque est un sous ensemble de M^0. Or, M^0 est l'ensemble des fonctions de 0 (c'est-à-dire l'ensemble vide) dans M, cet ensemble ne contient donc qu'une unique fonction : la fonction vide dont le graphe est $\emptyset$. Puisque $M^0 = \{\emptyset\}$, il y a exactement deux interprétations possibles pour une relation 0-aire R dans $\mathscr{M}$: puisque par définition, on doit avoir $R^{\mathscr{M}} \subseteq M^0$, cela ne peut être que soit $R^{\mathscr{M}} = \emptyset$, soit $R^{\mathscr{M}} = \{\emptyset\}$. Autrement dit, soit $R^{\mathscr{M}} = 0$, soit $R^{\mathscr{M}} = 1$. Ainsi, on convient de noter $\bot$ le symbole de relation 0-aire qui s'interprète par 0 et $\top$ le symbole de relation 0-aire qui s'interprète par 1.

Nous détaillons maintenant les règles et axiomes de cette théorie.

9.2.1 Anatomie d'une règle

(1) Chaque règle est composée :
- D'un ensemble de *prémisses* (il peut y en avoir 0,1,2, ou 3). Chacune de ces prémisses étant un séquent.
- D'un séquent *conclusion* de la règle.
- D'une barre horizontale séparant les prémisses (en haut) de la conclusion (en bas). Et sur la droite de la barre, le nom de la règle est indiqué en abrégé.

(2) Une règle se lit de haut en bas : si on a prouvé les prémisses alors on a également prouvé la conclusion. Mais elle a également une signification si on la lit de bas en haut : afin de prouver la conclusion, il me suffit de chercher à prouver les prémisses.

(3) A chaque connecteur logique correspondent deux types de règles.
   (a) Les règles d'*introduction* qui permettent de prouver une formule dont ce connecteur est l'opérateur principal.
   (b) Les règles d'*élimination* qui permettent d'utiliser dans les prémisses une formule ayant ce connecteur comme opérateur principal.

(4) On ne considère que les seuls connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, étant entendu que les formules du genre $\phi \Leftrightarrow \psi$ correspondent à $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.

9.2.2 Les règles de la logique minimale

En dehors des axiomes représentés par le séquent $\phi \vdash \phi$, le système a deux sortes de règles : des règles logiques (subdivisées en règles d'introduction et en règles d'élimination des différents connecteurs) et des règles structurelles qui permettent de manipuler les hypothèses, d'en décrire précisément la gestion (l'affaiblissement permettant d'ajouter de nouvelles hypothèses et la contraction permet de confondre deux occurrences d'une même hypothèse). Vous pouvez retrouver toutes ces règles dans l'annexe B, dans les blocs axiomes, règles logiques et règles structurelles.

Déduction Naturelle Minimale

Axiome

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \wedge eg \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge ed$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee ig \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee id \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \varphi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}\ ^{1}}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ ^{2}}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ ^{2}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi \qquad \Gamma', \varphi_{[y/x]} \vdash \psi\ ^{3}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \exists e$$

$$\frac{}{\vdash t = t\ ^{2}}\ = i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \vdash t = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi_{[u/x]}}\ = e$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ aff \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ \text{ctr}$$

1. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, φ
2. t : un terme
3. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', φ, ψ

Axiome

$$\frac{}{\phi \vdash \phi}\ ax$$

Un séquent, dans lequel la conclusion est aussi l'hypothèse, est prouvable.

Introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

Si l'on a montré ϕ et par ailleurs ψ, alors on a montré $\phi \wedge \psi$.

Élimination de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge e_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge e_d$$

De $\phi \wedge \psi$, on peut déduire, d'une part, ϕ et, d'autre part, ψ.

Introduction de l'implication

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow i$$

Pour prouver $\phi \rightarrow \psi$, il suffit de prendre ϕ comme hypothèse et de prouver ψ.

Élimination de l'implication (*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \rightarrow e$$

Si l'on a prouvé ϕ, et, par ailleurs, $\phi \rightarrow \psi$, alors on a prouvé ψ. Ou encore, pour démontrer ψ, il suffit de montrer à la fois $\phi \rightarrow \psi$ et ϕ.

Introduction de la négation

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg i$$

Pour montrer $\neg\phi$, il suffit de montrer une contradiction en supposant ϕ.

Élimination de la négation

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\phi \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg e$$

Si on a montré à la fois ϕ et $\neg\phi$, alors on a montré une contradiction.

On verra plus loin que $\neg\phi$ est équivalent (au sens syntaxique comme au sens sémantique) à $\phi \rightarrow \bot$, on aurait donc pu se passer de ces deux règles concernant la négation.

Introduction de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee i_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee i_d$$

Cette règle peut paraitre très étrange car la conclusion est clairement plus faible que la prémisse. Pourtant il est de nombreux raisonnements dans lesquels on a besoin d'affaiblir la conclusion, ne serait-ce que pour la faire coïncider avec la prémisse d'une autre règle. Par exemple, il est courant d'avoir une propriété du type « si un nombre est supérieur ou égal à 0 alors ... » et de vouloir l'appliquer à un nombre dont vous avez montré qu'il est strictement positif. Vous êtes alors bien obligés de passer du fait que ce nombre est strictement positif au fait qu'il est positif ou nul pour montrer qu'il vérifie la propriété désirée.

Élimination de la disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \vee \phi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \phi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta} \vee e$$

Si on a montré $\phi \vee \psi$, alors pour montrer θ, il suffit de montrer θ en supposant ϕ et encore de le montrer en supposant ψ.

Introduction du quantificateur universel

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_{[y/x]}\ ^{36}}{\Gamma \vdash \forall x\ \phi} \forall i$$

C'est une manière de dire que l'on s'intéresse aux occurrences libres de la variable x dans ϕ et que l'on ne souhaite faire aucune hypothèse particulière sur cette variable x. Elle peut apparaitre dans Γ, mais si elle y apparait, alors c'est qu'elle y est liée. Tout se passe donc comme si cette variable n'apparaissait pas dans les hypothèses, puisqu'une variable liée peut tout à fait être renommée sans changer en rien la signification de la formule considérée.

Cette règle dit par conséquent que si l'on a prouvé ϕ sans hypothèse particulière sur x, alors on a prouvé ϕ pour tout x, donc on a prouvé $\forall x\ \phi$.

Élimination du quantificateur universel

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \phi}{\Gamma \vdash \phi_{[t/x]}\ ^{37}} \forall e$$

Si l'on a montré $\forall x\ \phi$, alors on a montré que ϕ valait lorsqu'on substituait n'importe quel terme aux occurrences libres de x. Intuitivement, les termes désignent les objets au sujet desquels parlent les formules. Si

36. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, ϕ
37. t : un terme

l'on a montré $\forall x\ \phi$, on a montré que la formule ϕ, en tant qu'elle parle de l'objet x, valait pour toute valeur que pouvait prendre cet objet x, donc en particulier, lorsque x prend la valeur t.

Introduction du quantificateur existentiel

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_{[t/x]}\ ^{38}}{\Gamma \vdash \exists x\ \phi}\ \exists i$$

Si l'on a montré que ϕ vaut pour un certain terme t (ce que l'on écrit $\phi_{[t/x]}$) alors on a montré qu'il existe un objet qui satisfait $\phi_{[x/x]}$, par conséquent $\exists x\ \phi$.

Élimination du quantificateur existentiel

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ \phi \qquad \Gamma', \phi_{[y/x]} \vdash \psi\ ^{39}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \exists e$$

Lorsqu'on a pu prouver $\exists x\ \phi$, on peut utiliser cette conclusion comme hypothèse en donnant un nom à cet x qui satisfait ϕ. Mais donner un nom à cet objet x signifie qu'il n'a aucune raison d'apparaître dans la démonstration par ailleurs. Cet objet x n'a aucune raison d'être l'un des autres objets apparaissant dans la démonstration, raison pour laquelle la condition x n'a pas d'occurrence libre dans Γ', ψ est réclamée.

Introduction de l'égalité

$$\frac{}{\vdash t = t\ ^{40}}\ = i$$

$t = t$ est démontrable sans hypothèse. Cette règle signifie que la relation d'égalité est réflexive.

Élimination de l'égalité

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \vdash t = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash \phi_{[u/x]}}\ = e$$

Lorsque, d'une part, on a prouvé $\phi(t)$, et d'autre part $t = u$, alors on a prouvé $\phi(u)$.

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}\ aff$$

38. t : un terme
39. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', ϕ, ψ
40. t : un terme

Si je peux prouver ψ avec les hypothèses Γ, alors je peux encore prouver ψ si j'ajoute d'autres hypothèses à Γ. Autrement dit, il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir dans une démonstration.

Contraction

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}\ \text{ctr}$$

Cette règle est une conséquence immédiate de la définition du séquent puisque lorsqu'on écrit $\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi$, on écrit en vérité $\Gamma \cup \{\phi, \phi\} \vdash \psi$. Or, $\{\phi, \phi\}$, par définition, n'est autre que l'ensemble qui contient un seul élément : ϕ. On a donc l'égalité suivante : $\{\phi, \phi\} = \{\phi\}$. Par conséquent $\Gamma \cup \{\phi, \phi\}$ et $\Gamma \cup \{\phi\}$ sont le même ensemble, d'où $\Gamma \cup \{\phi, \phi\} \vdash \psi$ et $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ sont la même chose. Pour utiliser les conventions d'écriture que nous avons : $\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi$ et $\Gamma \cup \phi \vdash \psi$ sont en fait le même séquent.

9.2.3 Les règles de la logique intuitionniste

La logique intuitionniste est un enrichissement de la logique minimale avec la règle supplémentaire :

Absurdité intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_e$$

Déduction Naturelle Intuitionniste

Axiome

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \wedge eg \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge ed$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee ig \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee id \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \varphi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}\ {}^{1}}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ {}^{2}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi \qquad \Gamma', \varphi_{[y/x]} \vdash \psi\ {}^{3}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \exists e$$

$$\frac{}{\vdash t = t\ {}^{2}}\ = i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \vdash t = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi_{[u/x]}}\ = e$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ aff \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ \text{ctr}$$

Règle de l'absurdité intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot e$$

1. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, φ
2. t : un terme
3. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', φ, ψ

9.2.4 Les règles de la logique classique

La logique classique est aussi un enrichissement de la logique minimale avec en plus la règle suivante :

Absurdité classique

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_c$$

Remarque 9.7. Chacune de ces règles, à l'exception de l'Axiome et de la règle $=_i$, fait intervenir un séquent conclusion et 1, 2 ou 3 prémisses. Ainsi chaque règle peut être regardée comme définissant une structure arborescente simple. Par exemple, la règle de l'élimination de l'implication peut être regardée comme un arbre de hauteur 1, avec une racine ($\Gamma, \Gamma' \vdash \psi$) et deux feuilles ($\Gamma \vdash \phi \to \psi$ et $\Gamma' \vdash \phi$).

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \to_e$$

De même la règle de l'élimination de la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \vee \phi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \phi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\ \vee_e$$

donne lieu, cette fois-ci, à un arbre avec une racine et trois feuilles.

Déduction Naturelle Classique

Axiome

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \wedge eg \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge ed$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee ig \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee id \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \varphi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}\ {}^{1}}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ {}^{2}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi \qquad \Gamma', \varphi_{[y/x]} \vdash \psi\ {}^{3}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \exists e$$

$$\frac{}{\vdash t = t\ {}^{2}}\ = i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \vdash t = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi_{[u/x]}}\ = e$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ aff \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ \text{ctr}$$

Règles de l'absurdité classique

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot c$$

1. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, φ
2. t : un terme
3. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', φ, ψ

9.2.5 Déduction

Dans le système de la déduction naturelle, une « déduction » — encore appelée « preuve » — est un arbre fini représenté avec la racine en bas et les feuilles en haut et dont les noeuds sont des séquents, et chaque relation entre un noeud quelconque et ses descendants immédiats est une instance de l'une des règles de la déduction naturelle.

Definition 9.8 (Déduction)**.** Dans une logique (minimale, intuitionniste ou classique) et dans le système de la déduction naturelle, une *déduction* est un arbre fini dont les noeuds sont des séquents $(S_i)_{i\leq k}$, et vérifiant les propriétés suivantes. Pour chaque noeud S_i de la déduction,

(i) S_i est une feuille si et seulement si S_i est un axiome ou la règle $=_i$;

(ii) si S_i n'est pas une feuille, alors le sous-arbre de hauteur un, dont S_i est la racine et les fils/filles de S_i sont les feuilles, est une instance de l'une des règles de la logique correspondante (voir respectivement 9.2.2, 9.2.3, 9.2.4, ou pour une version plus condensée, ce qui est présenté dans l'annexe B).

Une formule ϕ est *déductible* des hypothèses Γ — on dit aussi *prouvable* à partir des hypothèses Γ — dans une logique (minimale, intuitionniste ou classique) s'il existe une déduction dont la racine soit un séquent de la forme $\Delta \vdash \phi$, où $\Delta \subseteq \Gamma$.

Remarque 9.9. Puisque une déduction est un objet fini, ne faisant intervenir dans tout séquent qu'un ensemble fini de formules, une formule quelconque est prouvable à partir d'un nombre infini d'hypothèses si et seulement si il est possible d'extraire un nombre fini d'hypothèses à partir desquels cette formule est prouvable. En particulier, si l'on travaille avec un théorie infinie (comme l'axiomatique de Péano pour l'arithmétique ou bien la théorie des ensembles) alors pour tout théorème de cette théorie, il existe un nombre fini d'axiomes à partir desquels ce thèorème est obtenu.

Notation 9.10. On notera :

(i) $\Gamma \vdash_m \phi$, le fait que cette déduction s'effectue dans le cadre de la logique minimale ;

(ii) $\Gamma \vdash_i \phi$ lorsque cette déduction s'effectue dans le cadre de la logique intuitionniste ;

(iii) $\Gamma \vdash_c \phi$ lorsque cette déduction est du ressort de la logique classique.

Exemples 9.11. (i) On montre $\vdash_m \phi \to (\psi \to \phi)$ en donnant une preuve du séquent $\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$ qui ne fasse intervenir que les règles de la logique minimale :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,ax}{\phi, \psi \vdash \phi}\,aff}{\phi \vdash \psi \to \phi}\,{\to}\,i}{\vdash \phi \to (\psi \to \phi)}\,{\to}\,i$$

(ii) Une preuve de $\vdash_m \neg\exists x\ \phi \to \forall x\ \neg\phi$ est une preuve du séquent $\vdash \neg\exists x\ \phi \to \forall x\ \neg\phi$ en logique minimale :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\ \phi \vdash \neg\exists x\ \phi}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\phi_{[y/x]} \vdash \phi_{[y/x]}}\,ax}{\phi_{[y/x]} \vdash \exists x\ \phi}\,\exists i}{\neg\exists x\ \phi,\ \phi_{[y/x]} \vdash \bot}\,\neg e}{\neg\exists x\ \phi \vdash \neg\phi_{[y/x]}}\,\neg i}{\neg\exists x\ \phi \vdash \forall x\ \neg\phi}\,\forall i}{\vdash \neg\exists x\ \phi \to \forall x\ \neg\phi}\,{\to}\,i$$

(iii) On peut aussi prouver $\vdash_m \forall x\ \neg\phi \to \neg\exists x\ \phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\ \phi \vdash \exists x\ \phi}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ \neg\phi \vdash \forall x\ \neg\phi}\,ax}{\forall x\ \neg\phi \vdash \neg\phi_{[y/x]}}\,\forall e \qquad \dfrac{}{\phi_{[y/x]} \vdash \phi_{[y/x]}}\,ax}{\forall x\ \neg\phi,\ \phi_{[y/x]} \vdash \bot}\,\neg e}{\forall x\ \neg\phi,\ \exists x\ \phi \vdash \bot}\,\exists e}{\forall x\ \neg\phi \vdash \neg\exists x\ \phi}\,\neg i}{\vdash \forall x\ \neg\phi \to \neg\exists x\ \phi}\,{\to}\,i$$

Remarque 9.12. Les conditions du type « y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, ϕ » que ce soit pour la règle de l'élimination du quantificateur existentiel ou pour celle de l'introduction du quantificateur universel sont absolument primordiales. Sans le respect de celle-ci, on pourrait très bien construire la démonstration *fausse* suivante de la formule $\exists x\ \phi \to \forall x\ \phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\ \phi \vdash \exists x\ \phi}\,ax \qquad \dfrac{}{\phi_{[y/x]} \vdash \phi_{[y/x]}}\,ax}{\exists x\ \phi \vdash \phi_{[y/x]}}\,\exists e \text{ erroné}}{\exists x\ \phi \vdash \forall x\ \phi}\,\forall i}{\vdash \exists x\ \phi \to \forall x\ \phi.}\,{\to}\,i$$

9.2.6 Comparaison entre les différentes logiques

Nous comparons maintenant les différentes logiques. Pour prouver qu'une formule n'est pas prouvable dans une certaine logique, nous avons besoin des théorèmes de complétude. Nous énonçons donc pour l'instant les résultats de ce type sans les démontrer. Les preuves sont faites dans la partie 13.0.1.

Logique intuitionniste La règle de l'absurdité intuitionniste n'est pas démontrable dans le cadre de la logique minimale. Elle enrichit donc strictement cette dernière. Cela signifie il existe des déductions possibles en logique intuitionniste, qui ne le sont pas en logique minimal. Par conséquent, il existe des formules qui sont des théorèmes de la logique intuitionniste mais qui ne sont pas déductibles dans le cadre restreint de la logique minimale.

Par exemple, la formule $\neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$ n'est pas démontrable en logique minimale mais elle l'est en logique intuitionniste :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,ax}{\phi, \neg\neg\phi \vdash \phi}\,aff}{\phi \vdash \neg\neg\phi \to \phi}\,{\to}i \qquad \dfrac{}{\neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \neg(\neg\neg\phi \to \phi)}\,ax}{\neg(\neg\neg\phi \to \phi), \phi \vdash \bot}\,{\neg}e}{\neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \neg\phi}\,{\neg}i \qquad \dfrac{}{\neg\neg\phi \vdash \neg\neg\phi}\,ax}{\neg\neg\phi, \neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \bot}\,{\neg}e}{\neg\neg\phi, \neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \phi}\,{\bot}e}{\neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \neg\neg\phi \to \phi}\,{\to}i \qquad \dfrac{}{\neg(\neg\neg\phi \to \phi) \vdash \neg(\neg\neg\phi \to \phi)}\,ax}{\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)}\,{\neg}i$$

Remarque 9.13. La logique intuitionniste remonte aux constructivistes (dont Brouwer). En effet, en logique intuitionniste,

- si $\Gamma \vdash_i \Phi \vee \Psi$, alors une preuve de ceci fait apparaitre une preuve de $\Gamma \vdash_i \Phi$ ou de $\Gamma \vdash_i \Psi$;
- si $\Gamma \vdash_i \exists\Phi$, alors une preuve de ceci fait apparaitre une preuve de $\Gamma \vdash_i \Phi_{[t/x]}$ pour un certain terme t.

Ainsi, une preuve en logique intuitionniste est *constructive*.

Logique classique La règle de l'absurdité classique n'est pas démontrable dans le cadre de la logique minimale. Elle ne l'est pas non plus en logique intuitionniste. Elle constitue donc un enrichissement strict de la logique intuitionniste et, *à fortiori*, un enrichissement encore plus important de la logique minimale.

En effet, la règle de l'absurde intuitionniste est un cas particulier de la règle de l'absurde classique qui correspond au cas où l'hypothèse $\neg\phi$ n'apparait pas. Elle s'en déduit donc immédiatement par :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}\,aff}{\Gamma \vdash \phi}\,{\bot}c$$

Voici maintenant quelques exemples de formules démontrables en logique classique et non en logique intuitionniste.

Exemples 9.14. **Règle du tiers exclu** $\vdash \phi \vee \neg\phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\neg(\phi\vee\neg\phi)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\phi\vdash\phi}\,ax}{\phi\vdash\phi\vee\neg\phi}\,\vee ig}{\dfrac{\neg(\phi\vee\neg\phi),\phi\vdash\bot}{\neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\neg\phi}\,\neg i}\,\neg e}{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\neg(\phi\vee\neg\phi)}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\phi\vee\neg\phi}\,\vee id}{\dfrac{\neg(\phi\vee\neg\phi),\ \neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\bot}{\neg(\phi\vee\neg\phi)\vdash\bot}\,ctr.}\,\neg e}{\vdash\phi\vee\neg\phi}\,\bot c$$

Loi de Peirce $\vdash(\neg\phi\to\phi)\to\phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\phi\vdash\neg\phi}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\phi\to\phi\vdash\neg\phi\to\phi}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg\phi\vdash\neg\phi}\,ax}{\neg\phi\to\phi,\neg\phi\vdash\phi}\,\to e}{\neg\phi\to\phi,\neg\phi\vdash\bot}\,\neg e+\text{ctr}}{\neg\phi\to\phi\vdash\phi}\,\bot c}{\vdash(\neg\phi\to\phi)\to\phi}\,\to i$$

Élimination des doubles négations $\vdash\neg\neg\phi\to\phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\phi\vdash\neg\neg\phi}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg\phi\vdash\neg\phi}\,ax}{\neg\neg\phi,\neg\phi\vdash\bot}\,\neg e}{\neg\neg\phi\vdash\phi}\,\bot c}{\vdash\neg\neg\phi\to\phi}\,\to i$$

Contraposition $\vdash(\neg\psi\to\neg\phi)\to(\phi\to\psi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\psi\to\neg\phi\vdash\neg\psi\to\neg\phi}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg\psi\vdash\neg\psi}\,ax}{\neg\psi\to\neg\phi,\neg\psi\vdash\neg\phi}\,\to e \qquad \dfrac{}{\phi\vdash\phi}\,ax}{\neg\psi\to\neg\phi,\neg\psi,\phi\vdash\bot}\,\neg e}{\neg\psi\to\neg\phi,\phi\vdash\psi}\,\bot c}{\neg\psi\to\neg\phi\vdash\phi\to\psi}\,\to i}{\vdash(\neg\psi\to\neg\phi)\to(\phi\to\psi)}\,\to i$$

- $\vdash_c\neg\forall x\ \phi\to\exists x\ \neg\phi$:
  (comparer avec la preuve de $\vdash_m\forall x\ \neg\phi\to\neg\exists x\ \phi$ qui se trouve page 100)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\forall x\ \phi \vdash \neg\forall x\ \phi}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\ \neg\phi \vdash \neg\exists x\ \neg\phi}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\phi_{[y/x]} \vdash \neg\phi_{[y/x]}}\,ax}{\neg\phi_{[y/x]} \vdash \exists x\ \neg\phi}\,\exists i}{\neg\exists x\ \neg\phi, \neg\phi_{[y/x]} \vdash \bot}\,\neg e}{\neg\exists x\ \neg\phi \vdash \phi_{[y/x]}}\,\bot\, c}{\neg\exists x\ \neg\phi \vdash \forall x\ \phi}\,\forall i}{\neg\exists x\ \neg\phi, \neg\forall x\ \phi \vdash \bot}\,\forall i}{\neg\forall x\ \phi \vdash \exists x\ \neg\phi}\,\bot\, c}{\vdash \neg\forall x\ \phi \to \exists x\ \neg\phi}\,\to i$$

Remarque 9.15. Il y a plusieurs façon d'obtenir la logique classique à partir des logiques soit intuitionniste soit minimale en rajoutant des nouvelles règles prises comme axiomes, c'est-à-dire des règles qui se positionnent comme feuilles dans des déductions :

log. cl. = log. int. + $\dfrac{}{\vdash (\phi \vee \neg\phi)}\,tiers\ exclu$ (*principe du tiers exclu*)

= log. int. + $\dfrac{}{\vdash \big((\neg\phi \to \phi) \to \phi\big)}\,loi\ de\ Peirce$ (*loi de Peirce*)

= log. min. + $\dfrac{}{\vdash (\neg\neg\phi \to \phi)}\,dbles\ négations\ élim.$ (*élimination des doubles négations*)

= log. min. + $\dfrac{}{\vdash \big((\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)\big)}\,contraposition$ (*contraposition*)

9.3 Calcul des séquents

Certains résultats seront énoncés sans démonstration. Un lecteur qui voudrait trouver les preuves manquantes peut se référer aux livres [13, 22, 23, 67, 67].

Le calcul des séquents repose sur la notion de séquent. Mais contrairement à la déduction naturelle qui mettait en jeu des séquents de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, où φ était une formule et Γ un ensemble de formules, le calcul des séquents symétrise la notion de séquent qui prend la forme $\Gamma \vdash \Delta$, où Δ est également un ensemble de formules.

Definition 9.16 (Séquent)**.** Les *séquents* sont de la forme $\Gamma \vdash \Delta$, où Γ et Δ sont des ensembles finis, éventuellement vides, de formules. On nomme Γ la *partie gauche du séquent* et Δ la *partie droite du séquent.*

Remarque 9.17. Intuitivement, on peut interpréter le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ de la façon suivante : la conjonction (et) des formules de Γ prouve la disjonction (ou) des formules de Δ. De plus, on a :

(i) une conjonction vide « équivaut » à $\top$ (le vrai) ;

(ii) une disjonction vide « équivaut » à $\bot$ (le faux) ;

(iii) $\vdash$ s'interprète comme l'absurde au sens où sans hypothèse on prouve le faux (il correspond au séquent $\vdash \bot$ de la déduction naturelle).

9.3.1 Les règles du calcul des séquents

Les règles du calcul des séquents sont très proches de celles de la déduction naturelle. L'ensemble des règles du calcul des séquents se trouve dans l'annexe page 138. Elles conservent en particulier le fait que d'un ensemble de *prémisses* (il peut y en avoir 0,1 ou 2), on déduit un séquent *conclusion* et elles sont représentées avec les prémisses au-dessus d'une barre horizontale et la conclusion en dessous. De même, les règles d'introduction de la déduction naturelle sont conservées. Elles deviennent des règles d'*introduction à droite*. Les règles d'élimination sont remplacées par des règles d'*introduction à gauche*.

On retrouve également une règle pour les axiomes, des règles logiques et des règles structurelles. Mais, chose nouvelle, une règle de coupure est introduite :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ cut$$

Cette notion de coupure correspond à la partie non mécanique de l'activité démonstrative. C'est elle qui permet l'utilisation d'énoncés généraux, de principes que l'on démontre une fois pour toute et que l'on applique ensuite à des cas particuliers. Ceci est une pratique courante des mathématiques où l'on fait grand usage de ces démonstrations indirectes.

Calcul des Séquents

Axiomes

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ \bot_g$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge_{g1} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge_{g2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ \vee_{d1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ \vee_{d2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}\ \to_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ \neg_g \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\ \neg_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta\ ^1}{\Gamma, \forall x\ \varphi \vdash \Delta}\ \forall_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi, \Delta\ ^2}\ \forall_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_{[y/x]} \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ \varphi \vdash \Delta\ ^2}\ \exists_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}, \Delta\ ^1}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi, \Delta}\ \exists_d$$

$$\frac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ Ref \qquad \frac{\Gamma, t = s, \varphi_{[s/x]}, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta}{\Gamma, s = t, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta}\ Rep$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\ aff_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\ aff_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\ ctr_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\ ctr_d$$

Règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ cut$$

1. t : un terme
2. y n'a pas d'occurrence libre dans le séquent conclusion de la règle (dans $\Gamma, \exists x\ \varphi$ ou $\forall x\ \varphi$, et Δ)

9.3.2 Logique classique, intuitionniste et minimale

On définit la notion de déduction dans le système du calcul des séquents. C'est globalement la même que pour la déduction naturelle. (De manière équivalente on parlera de preuve ou de déduction.)

Definition 9.18 (Déduction)**.** Dans le système du calcul des séquents, une *déduction* est un arbre fini dont les noeuds sont des séquents $(S_i)_{i\leq k}$, et vérifiant les propositions suivantes. Pour chaque noeud S_i de la déduction,

(i) S_i est une feuille si et seulement si S_i est un axiome ;

(ii) si S_i n'est pas une feuille, alors le sous-arbre de hauteur un dont S_i est la racine et les fils/filles de S_i sont les feuilles, est une instance de l'une des règles du calcul des séquents.

Une formule φ est *déductible* des hypothèses Θ dans le calcul des séquents s'il existe une déduction dont la racine soit un séquent de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, avec $\Gamma \subseteq \Theta$.

On va chercher maintenant à identifier les équivalents de la logique minimale, intuitionniste et classique de la déduction naturelle dans le calcul des séquents.

Exemples 9.19. Voici quelques exemples de preuves en calcul des séquents :

(i) Élimination des doubles négations : $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,ax}{\vdash \varphi, \neg\varphi}\,\neg_d}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\,\neg_g}{\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to_d$$

(ii) Déduction de $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,ax}{\varphi, \neg\varphi \vdash}\,\neg_g}{\varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,\neg_d}{\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi}\,\to_d$$

On remarque que l'on peut prouver l'élimination des doubles négations en calcul des séquents. Cela suggère que celui-ci, avec aucune restriction sur les règles utilisées, correspond au moins à la logique classique en déduction naturelle (voir la Remarque 9.15). La Proposition 9.21 exprime cette correspondance.

Exemples 9.20. Voici encore comment on récupère l'absurdité intuitionniste et l'absurdité classique en calcul des séquents :

(i) Absurdité intuitionniste : $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot\, e$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \bot} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash}\ \bot_g}{\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}\ aff_d}\ cut$$

(ii) Absurdité classique : $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot\, c$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash}\ \bot_g}{\Gamma, \neg\varphi \vdash}\ cut}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ \neg_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax}{\vdash \varphi, \neg\varphi}\ \neg_d}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \neg_g}{\Gamma \vdash \varphi}\ cut$$

(iii) Tiers exclu : $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\vdash \varphi, \neg\varphi}\ \neg_d}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi), \neg\varphi}\ \vee_{d_1}}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi), (\varphi \vee \neg\varphi)}\ \vee_{d_2}}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)}\ ctr_d$$

Proposition 9.21. *Soient Γ un ensemble fini de formules et $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. On obtient que*

le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable en calcul des séquents
si et seulement si
le séquent $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ est prouvable en déduction naturelle.

Cette proposition motive la notation suivante.

Notation 9.22. On écrit $\Gamma \vdash_c \Delta$ lorsque le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable en calcul des séquents sans aucune restriction sur les règles utilisées.

Arrêtons nous un instant sur les deux derniers exemples. La différence majeure entre les deux formules $\varphi \to \neg\neg\varphi$ et $\neg\neg\varphi \to \varphi$ est que la première est prouvable en déduction naturelle intuitionniste alors que la seconde ne l'est pas. Si l'on regarde de près les deux preuves, nous devons bien admettre

que nous avons fait quasiment la même chose dans l'une et l'autre. A la petite différence que, dans la première preuve, nous avons d'abord effectué une introduction de la négation à droite avant d'effectuer la même introduction de la négation mais à gauche cette fois. Alors que, dans la seconde démonstration, nous avons d'abord effectué l'introduction de la négation à gauche avant celle de droite.

En fait, la logique intuitionniste a une caractérisation extrêmement simple en calcul des séquents.

Theorème 9.23. *La logique intuitionniste est la version du calcul des séquents dont les règles sont restreintes aux séquents ayant au plus une formule à droite, la contraction à droite étant considérée comme implicite.*

Autrement dit, si $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$*, on a que* $\Gamma \vdash_i (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ *en déduction naturelle si et seulement si le séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est prouvable dans la version du calcul des séquents où l'on se restreint aux règles ne faisant intervenir que des séquents ayant au plus une formule à droite, la contraction à droite étant considérée comme implicite.*

Theorème 9.24. *La logique minimale est la version du calcul des séquents intuitionniste dépourvue de la règle d'affaiblissement à droite.*

On peut remarquer que l'absurde intuitionniste est une instance de cette règle :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \bot} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash}\,\bot_g}{\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}\,aff_d}\,cut$$

9.3.3 L'élimination des coupures

On peut se demander si le séquent vide ($\vdash$) est prouvable. C'est une question grave, car si tel était le cas, nous nous retrouverions avec un système de démonstration qui prouverait l'absurde sans hypothèse, et donc prouverait n'importe quoi. Un tel système serait bon à jeter aux oubliettes et à nous renvoyer à nos chères études...Le théorème suivant répond à cette question.

Theorème 9.25 (Élimination des coupures)**.** *S'il existe, en calcul des séquents classique (resp. intuitionniste), une preuve du séquent* $\Gamma \vdash \Delta$*, alors il existe une preuve en calcul des séquents classique (resp. intuitionniste) de ce séquent sans utilisation de la règle de coupure.*

Ce théorème extrêmement important justifie à lui seul la mise sur pied du calcul des séquents. Il affirme que l'on peut toujours se passer de la règle de coupure pour obtenir un séquent prouvable en logique classique. Mais, si l'on peut faire fi de la règle de coupure, cela signifie que tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$

prouvable peut l'être par l'utilisation des seuls axiomes, règles logiques et règles structurelles. La preuve de ce théorème n'est pas vraiment difficile mais longue et fastidieuse puisqu'il faut remplacer dans une preuve donnée chaque utilisation de la règle de coupure par d'autres règles logiques.

Ce résultat a deux conséquences majeures :

Corollaire 9.26. *Le séquent* $\vdash$ *n'est pas prouvable en logique classique.*

Démonstration. La preuve est immédiate : s'il existait une preuve de ce séquent en calcul des séquents, il en existerait également une qui se ferait sans utilisation de la règle de coupure. Or, toutes les autres règles introduisent une formule soit à droite, soit à gauche, soit des deux côtés à la fois. La seule règle qui permet de faire disparaître une formule est la règle de contraction, mais celle-ci ne fait pas disparaître une formule, elle ne fait disparaître qu'une des occurrences multiples d'une formule. Il est donc immédiat qu'il n'y a pas de preuve sans coupure du séquent $\vdash$. Par application du théorème d'élimination des coupures, il n'y a donc pas de preuve (avec ou sans coupure) du séquent $\vdash$.

□

La théorie de la démonstration est donc sauve.

Nous allons maintenant utiliser une notion de sous-formule d'une formule plus étendue que celle donnée à la Définition 3.15 en autorisant les substitution des variables libres par des termes. Nous noterons *« sous-formule »* cette notion nouvelle. De la sorte, alors qu'une formule n'a qu'un nombre fini de sous-formules, elle peut maintenant avoir une infinité de *« sous-formules »*.

Definition 9.27 (*« Sous-formules »* d'une formule)**.** Une formule ψ est une *« sous-formule »* d'une formule φ si il existe une sous-formule (au sens usuel) ψ de φ dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_k$ et des termes $t_1, \ldots, t_k$ tels que

$$\psi = \psi_{[t_1/x_1,\ldots,t_k/x_k]}$$

Corollaire 9.28 (Propriété de la *« sous-formule »*)**.** *Si le séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est prouvable en logique classique (resp. en logique intuitionniste), alors il existe une preuve en logique classique (resp. en logique intuitionniste) de ce séquent dans laquelle n'apparaissent que des séquents constitués de « sous-formules » des formules de* Γ *et de* Δ*.*

Démonstration. Par application du théorème de l'élimination des coupures, il existe une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$. Or, une telle preuve satisfait les conditions souhaitées. Cela se vérifie immédiatement, règle par règle, par induction sur la hauteur d'une preuve sans coupure.

□

Une des conséquences de la propriété de la *« sous-formule »* est qu'une preuve d'une disjonction en logique intuitionniste passe nécessairement par une preuve d'un des termes de la disjonction :

$$\vdash_i \varphi \vee \psi \quad \text{si et seulement si} \quad \Big(\vdash_i \varphi \text{ ou } \vdash_i \psi \Big).$$

De même,

$$\vdash_i \exists x\, \varphi \text{ ssi il existe un terme } t \text{ tel que } \vdash_i \varphi_{[t/x]}.$$

Une conséquence majeure de la propriété de la *« sous-formule »*, qui elle-même repose directement sur l'élimination des coupures, est de permettre, tout particulièrement en logique intuitionniste, une recherche de preuve automatique. On peut ainsi mettre en place des « prouveurs automatiques » dont la tache est la production mécanique de preuves, comme par exemple les preuves de programmes. Le caractère nécessairement abstrait des preuves par coupure étant oublié, ces machines recherchent des preuves, certes plus longues, mais aussi plus simples dans le fait qu'elles ne font appel qu'aux *« sous-formules »* des formules du séquent qu'il s'agit de prouver.

10 Indécidabilité de la logique du premier ordre

10.1 Traduction de Gödel

10.1.1 Langages non égalitaires

Definition 10.1 (Traduction de Gödel (sans égalité))**.** Soit φ une formule ne contenant pas le symbole d'égalité. La *traduction de Gödel* de φ, notée φ^g, est la formule définie par induction de la façon suivante :

- $\bot^g = \bot$;
- $\varphi^g = \neg\neg\varphi$, si φ est atomique ;
- $(\neg\varphi)^g = \neg\varphi^g$;
- $(\varphi \wedge \psi)^g = \varphi^g \wedge \psi^g$;
- $(\varphi \vee \psi)^g = \neg\neg\,(\varphi^g \vee \psi^g)$;
- $(\varphi \to \psi)^g = \varphi^g \to \psi^g$;
- $(\forall x\,\varphi)^g = \forall x\,\varphi^g$;
- $(\exists x\,\varphi)^g = \neg\neg\exists x\,\varphi^g$.

Theorème 10.2. *Soient Γ un ensemble de formules dans lesquelles le symbole d'égalité n'apparaît pas et φ une formule dans laquelle le symbole d'égalité n'apparaît pas. Alors*

$$\Gamma \vdash_c \varphi \text{ ssi } \Gamma^g \vdash_m \varphi^g,$$

où Γ^g est l'ensemble des traductions de Gödel des formules de Γ.

Intuitivement, ce théorème nous dit que, pour prouver une formule en logique classique, on peut se restreindre à n'utiliser les raisonnements par l'absurde que sur les formules atomiques, disjonctives et existentielles.

10.1.2 Langages égalitaires

Definition 10.3 (Traduction de Gödel (avec égalité))**.** On rajoute à la définition précédente de la traduction de Gödel (sans égalité) une traduction de l'égalité :

$$(t_1 = t_2)^g = \neg\neg(t_1 = t_2).$$

Dans ce cas, le théorème devient :

Theorème 10.4. *Soient Γ un ensemble de formules et φ une formule. Alors*

$$\Gamma \vdash_c \varphi \text{ ssi } \Gamma^g, \forall x\,\forall y\,((\neg\neg x = y) \to x = y) \vdash_m \varphi^g,$$

où Γ^g est l'ensemble des traductions de Gödel des formules de Γ.

10.2 Décidabilité

Definition 10.5 (Décidabilité d'un problème)**.** Un problème est dit *décidable* s'il existe un algorithme qui, à partir de la donnée, travaille, s'arrête et répond oui ou non au problème posé. Dans le cas contraire, il est dit *indécidable.*

Definition 10.6 (Décidabilité d'une théorie)**.** Une théorie T est dite *décidable* si le problème suivant est décidable :

- donnée : une formule φ du langage de T ;
- question : $T \vdash_c \varphi$?

10.3 Indécidabilité de la logique du premier ordre

On énonce sans le démontrer un théorème qui est une conséquence du théorème d'incomplétude de Gödel.

Theorème 10.7. *Les théories de l'arithmétique de Robinson, de Peano et la théorie des ensembles avec ou sans l'axiome du choix (ZF ou ZFC) — voir l'annexe A — sont toutes indécidables.*

Corollaire 10.8 (Indécidabilité de la logique classique du premier ordre)**.** *La logique classique du premier ordre est indécidable.*

Démonstration. Soit φ_R la formule obtenue par conjonction de tous les axiomes de l'arithmétique de Robinson (qui est une théorie finie !). Alors pour toute formule ψ,

$$\varphi_R \vdash_c \psi \quad \text{si et seulement si} \quad \vdash_c \varphi_R \to \psi.$$

L'indécidabilité de la logique classique du premier ordre découle donc de l'indécidabilité de l'arithmétique de Robinson.

□

Corollaire 10.9 (Indécidabilité de la logique minimale du premier ordre)**.** *La logique minimale du premier ordre est indécidable.*

Démonstration. D'après le théorème sur la traduction de Gödel, pour toute formule ψ,

$$\vdash_c \psi \quad \text{si et seulement si} \quad \vdash_m \Big(\forall x\, \forall y\, \big(\neg\neg x = y \to x = y\big) \to \psi^g\Big).$$

L'indécidabilité de la logique minimale du premier ordre découle donc de l'indécidabilité de la logique classique du premier ordre.

□

11 Modèles de Kripke de la logique du 1er ordre

11.1 Logique intuitionniste

11.1.1 Langages non égalitaires et sans symbole de fonction

Definition 11.1 (Modèle de Kripke de la logique intuitionniste, 1965)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre non égalitaire et sans symbole de fonction (ni de constante). Un *modèle de Kripke*[41] *de la logique intuitionniste* sur le langage $\mathscr{L}$ est un quadruplet $\mathcal{K} = (|\mathcal{K}|, \leq, \mathscr{D}, \Vdash)$, où :

(i) $(|\mathcal{K}|, \leq)$ est un ensemble ordonné, les éléments de $|\mathcal{K}|$ sont appelés des *mondes*.

(ii) $\mathscr{D}$ est une fonction qui associe à tout élément $\alpha \in |\mathcal{K}|$ un ensemble $\mathscr{D}_\alpha \neq \emptyset$, que l'on appelle le *domaine du monde* α, tel que

$$\forall \alpha \, \forall \beta \, (\alpha \leq \beta \to \mathscr{D}_\alpha \subseteq \mathscr{D}_\beta).$$

(iii) $\Vdash$ est une relation binaire entre les éléments de $|\mathcal{K}|$ et les formules atomiques à paramètres dans $\bigcup_{\alpha \in |\mathcal{K}|} \mathscr{D}_\alpha$, dite de « forcing ». Le symbole $\Vdash$ se lit « force ». Soient $\alpha, \beta \in |\mathcal{K}|$ et $R \in \mathscr{L}$ un symbole de relation d'arité n. La relation $\Vdash$ est telle que : [42]

- $\alpha \nVdash \bot$;
- si $\alpha \Vdash R(a_1, \ldots, a_n)$ on a $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{D}_\alpha$;
- si $\alpha \Vdash R(a_1, \ldots, a_n)$ et $\alpha \leq \beta$, alors on a $\beta \Vdash R(a_1, \ldots, a_n)$.

On peut étendre $\Vdash$ en une relation binaire entre les éléments de $|\mathcal{K}|$ et les formules à paramètres dans $\bigcup_{\alpha \in |\mathcal{K}|} \mathscr{D}_\alpha$. Soient $\alpha \in |\mathcal{K}|$ et φ, ψ deux formules de $\mathscr{L}$. On étend $\Vdash$ par récurrence de la façon suivante :

- $\alpha \Vdash \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $\alpha \Vdash \varphi$ et $\alpha \Vdash \psi$;
- $\alpha \Vdash \varphi \vee \psi$ si et seulement si $\alpha \Vdash \varphi$ ou $\alpha \Vdash \psi$;
- $\alpha \Vdash \varphi \to \psi$ si et seulement si pour tout $\beta \in |\mathcal{K}|$ tel que $\alpha \leq \beta$, si $\beta \Vdash \varphi$ alors $\beta \Vdash \psi$;
- $\alpha \Vdash \neg\varphi$ si et seulement si $\alpha \Vdash \varphi \to \bot$;
- $\alpha \Vdash \forall x \, \varphi$ si et seulement si pour tout $\beta \in |\mathcal{K}|$ tel que $\alpha \leq \beta$ et $b \in \mathscr{D}_\beta$, on a $\beta \Vdash \varphi_{\left[b/x\right]}$;
- $\alpha \Vdash \exists x \, \varphi$ si et seulement s'il existe $a \in \mathscr{D}_\alpha$ tel que $\alpha \Vdash \varphi_{[a/x]}$.

41. Saul Aaron Kripke était un philosophe analytique et logicien américain (1940-2022) venant de Omaha dans le Nebraska. Il était professeur émérite à Princeton.

42. On peut aussi considérer pour tout $\alpha \in |\mathcal{K}|$ un sous-ensemble $R^\alpha \subseteq \mathscr{D}_\alpha^n$ (l'interprétation de R dans le monde α) avec la condition selon laquelle pour tout $\alpha \leq \beta$ $R^\alpha \subseteq R^\beta$. La relation de forcing est alors définie en disant que, pour $a_1, \ldots a_n \in \mathscr{D}_\alpha$, $\alpha \Vdash R(a_1, \ldots, a_n)$ si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^\alpha$. En logique minimale, on doit de plus spécifier si $\alpha \Vdash \bot$.

Remarque 11.2. (i) On va donner une condition nécessaire et suffisante un peu plus explicite pour $\alpha \Vdash \neg\varphi$. Au vu de la définition de $\alpha \Vdash \varphi \to \psi$, on a $\alpha \Vdash \neg\varphi$ si et seulement si pour tout $\beta \in |\mathcal{K}|$ tel que $\alpha \leq \beta$, on a $\beta \nVdash \varphi$. Attention : cette condition utilise le fait que pour tout $\beta \in |\mathcal{K}|$ $\beta \nVdash \bot$, ceci n'est pas le cas dans les modèles de Kripke de la logique minimale.

(ii) Si β est un élément maximal de $(|\mathcal{K}|, \leq)$, alors le monde en β est essentiellement une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$ et on a pour toute formule φ, $\mathscr{M} \models \varphi$ si et seulement si $\beta \Vdash \varphi$.

(iii) Intuitivement, on peut voir un modèle de Kripke comme un ensemble de mondes empilés les uns sur les autres. (On peut représenter le diagramme de Hasse du poset $(|\mathcal{K}|, \leq)$ pour bien voir comment les mondes s'emboitent.) Chaque monde pris seul est en soi un modèle de la logique du 1er ordre au sens classique. Par contre les formules ont des valeurs de vérité qui peuvent varier d'un montre à l'autre.

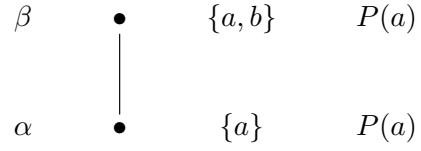
Néanmoins, si une formule est forcée dans un monde α, alors elle est également forcée dans tout monde supérieur β :

$$\text{si } \alpha \Vdash \phi \text{ et } \alpha \leq \beta, \text{ alors } \beta \Vdash \phi.$$

En sorte que l'on peut imaginer que "la connaissance" (c'est à dire l'ensemble des formules qui sont forcées à un nœud) ne fait que croître au fur et à mesure que l'on progresse vers le haut le long d'une chaîne de l'ordre partiel sous-jacent au modèle de Kripke.

Exemple 11.3.

Soit $\mathscr{L} = \{P^{(1)}\}$ un langage non-égalitaire du premier ordre et $\mathcal{K}$ le modèle de Kripke suivant :



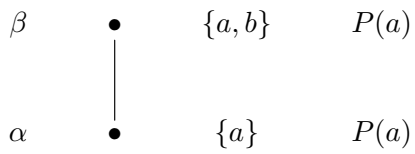
- On se donne deux mondes, α et β avec $\alpha \leq \beta$.
- Les domaines de ces mondes sont respectivement,

$$\mathscr{D}_\alpha = \{a\}, \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_\beta = \{a, b\}.$$

- On définit la relation de forcing par

$$\Vdash = \big\{\big(\alpha, P(a)\big), \big(\beta, P(a)\big)\big\}.$$

On a



(1) $\alpha \nVdash \forall x\ P(x)$
(2) $\alpha \nVdash \exists x\ \neg P(x)$
(3) $\alpha \nVdash \forall x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$
(4) $\beta \Vdash \exists x\ \neg P(x)$
(5) $\alpha \nVdash \neg\exists x\ \neg P(x)$
(6) $\alpha \nVdash \exists x\ \neg P(x) \vee \neg\exists x\ \neg P(x)$

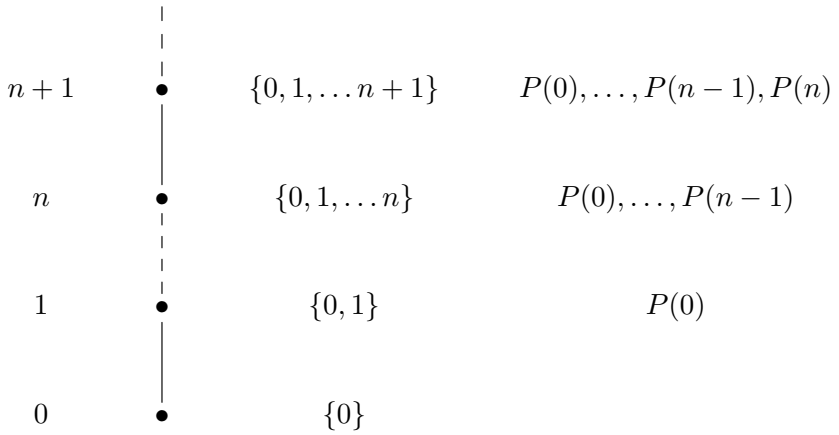
Exemple 11.4.

Soit $\mathscr{L} = \{P^{(1)}\}$ un langage non-égalitaire du premier ordre et $\mathcal{K}$ le modèle de Kripke suivant :

On se donne $\mathbb{N}$ pour ensemble des mondes, équipé de l'order usuel sur $\mathbb{N}$. On définit les domaines de ces mondes par $\mathscr{D}_n = \{0, \dots, n\}$ et la relation de forcing par

$$\Vdash = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \big(n, P(k)\big) : k < n \Big\}.$$

On peut résumer tout cela par le diagramme :



Voici quelques relations (que l'on peut à chaque fois déduire des précédentes) qui sont vérifiées pour tout entier n par ce modèle :

(1) $n \nVdash P(n)$
(2) $n \nVdash \neg P(n)$
(3) $n \nVdash P(n) \vee \neg P(n)$
(4) $n \nVdash \forall x\ \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$
(5) $0 \Vdash \neg\forall x\ \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$
(6) $0 \nVdash \neg\neg\forall x\ \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$.

11.1.2 Langages égalitaires avec symbole de fonction

On rappelle que les symboles de constantes sont assimilés à des symboles de fonctions d'arité 0.

Definition 11.5 (Modèle de Kripke de la logique intuitionniste)**.** Soit $\mathscr{L}$ un langage du premier ordre. Un *modèle de Kripke de la logique intuitionniste* sur le langage $\mathscr{L}$ est un sextuple $\mathcal{K} = (|\mathcal{K}|, \leq, \mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathscr{F}, \Vdash)$, où :

(i) $(|\mathcal{K}|, \leq, \mathscr{D}, \Vdash)$ est un modèle de Kripke au sens de la définition précédente.

(ii) $\mathscr{F}$ est la donnée, pour chaque symbole de fonction f d'arité n de $\mathscr{L}$ et chaque monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$, d'une fonction $f_\alpha : {\mathscr{D}_\alpha}^n \longrightarrow \mathscr{D}_\alpha$.

(iii) $\mathscr{E}$ est la donnée, pour chaque monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$, d'une relation d'équivalence E_α sur $\mathscr{D}_\alpha$ qui satisfait :

$$\forall \alpha, \beta \in |\mathcal{K}| \ (\alpha \leq \beta \rightarrow E_\alpha \subseteq E_\beta).$$

(iv) $\Vdash$ vérifie de plus, pour tout monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$:

Compatibilité entre $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et les relations de $\mathscr{L}$

Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{D}_\alpha$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $E_\alpha(a_i, b_i)$ (R, f sont des symboles d'arité n) :

- $\alpha \Vdash R(a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si $\alpha \Vdash R(b_1, \ldots, b_n)$;
- $E_\alpha\big(f_\alpha(a_1, \ldots a_n), f_\alpha(b_1, \ldots b_n)\big)$.

On ajoute maintenant quelques règles sur la réalisabilité des formules atomiques lorsqu'elles font intervenir des termes ou l'égalité.

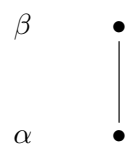
Réalisabilité des formules atomiques

On définit la valeur d'un terme t à paramètre dans $\mathscr{D}_\alpha$ (les variables libres de t sont remplacées par des éléments de $\mathscr{D}_\alpha$) par :
- si $t = a \in \mathscr{D}_\alpha$, alors $t_\alpha = a$;
- si $t = f(u^1, \ldots, u^n)$, alors $t_\alpha = f_\alpha({u^1}_\alpha, \ldots, {u^n}_\alpha)$.

On peut ajouter maintenant quelques règles sur la réalisabilité des formules atomiques lorsqu'elles font intervenir des termes ou l'égalité :
- $\alpha \Vdash u = v$ si et seulement si $E_\alpha(u_\alpha, v_\alpha)$;
- pour tout symbole de relation R d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ des termes, on a : $\alpha \Vdash R(t^1, \ldots, t^n)$ si et seulement si $\alpha \Vdash R({t^1}_\alpha, \ldots, {t^n}_\alpha)$.

On peut étendre $\Vdash$ en une relation binaire entre les éléments de $|\mathcal{K}|$ et les formules de la même façon que précédemment.

Exemple 11.6. On se donne le modèle de Kripke suivant :



β $\quad \{a,b\} \quad E_\beta = \{a,b\} \times \{a,b\}$

α $\quad \{a,b\} \quad E_\alpha = \{(a,a),(b,b)\}$

On peut voir que

(1) $\alpha \Vdash\!\!\!\!/\ a = b$

(2) $\alpha \Vdash\!\!\!\!/\ \neg a = b$

(3) $\alpha \Vdash\!\!\!\!/\ a = b \vee \neg a = b$

(4) $\alpha \Vdash\!\!\!\!/\ \forall x\ \forall y\ (x = y \vee \neg x = y)$.

11.1.3 Satisfaction et conséquence sémantique

Definition 11.7 (Satisfaction d'une formule dans un modèle de Kripke de la logique intuitionniste)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke de la logique intuitionniste sur $\mathscr{L}$ et φ une formule de $\mathscr{L}$. On dit que *$\mathcal{K}$ satisfait φ* que l'on note

$$\mathcal{K} \models_i \varphi$$

si pour tout monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$ on a $\alpha \Vdash \varphi$.

Definition 11.8 (Satisfaction d'une théorie dans un modèle de Kripke de la logique intuitionniste)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke de la logique intuitionniste sur $\mathscr{L}$ et T une théorie de $\mathscr{L}$. On dit que *$\mathcal{K}$ satisfait T* que l'on note

$$\mathcal{K} \models_i T$$

si pour toute formule $\varphi \in T$ on a $\mathcal{K} \models_i \varphi$.

Definition 11.9 (Conséquence sémantique en logique intuitionniste)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, T une théorie et φ une formule de $\mathscr{L}$. On dit que φ est *conséquence sémantique en logique intuitionniste* de T que l'on note

$$T \models_i \varphi$$

si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{K}$ de la logique intuitionniste tel que $\mathcal{K} \models_i T$ on a $\mathcal{K} \models_i \varphi$.

Un cas particulier est celui de la théorie vide :

$$\models_i \varphi$$

qui revient à dire que

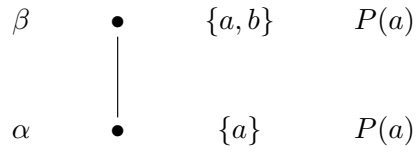
$$\mathcal{K} \models_i \varphi$$

est vérifié dans tout modèle de Kripke de la logique intuitionniste et par conséquent,

$$\alpha \Vdash \varphi$$

est vrai en tout nœud α de tout modèle de Kripke de la logique intuitionniste.

Exemple 11.10. Le modèle de Kripke $\mathcal{K}$ de l'exemple page 115 reproduit ci-dessous,



on a

- $\alpha \nVdash \forall x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$
- $\alpha \nVdash \exists x\ \neg P(x) \vee \neg\exists x\ \neg P(x)$.

On a donc également :

- $\mathcal{K} \not\models_i \forall x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$
- $\mathcal{K} \not\models_i \exists x\ \neg P(x) \vee \neg\exists x\ \neg P(x)$.

Et par conséquent, aucune de ces deux formules n'est conséquence de la théorie vide :

- $\not\models_i \forall x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$
- $\not\models_i \exists x\ \neg P(x) \vee \neg\exists x\ \neg P(x)$.

On verra plus loin que par application du Théorème de complétude de la logique intuitionniste (Théorème 12.2, page 121), qu'aucune de ces deux formules n'est prouvable en logique intuitionniste :

- $\not\vdash_i \forall x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$
- $\not\vdash_i \exists x\ \neg P(x) \vee \neg\exists x\ \neg P(x)$.

11.2 Logique minimale

Definition 11.11 (Modèle de Kripke de la logique minimale)**.** Les modèles de Kripke $\mathcal{K}$ de la logique minimale sont définis de façon analogue à ceux de la logique intuitionniste à la seule différence que l'on n'exige pas que pour tout monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$, on ait $\alpha \nVdash \bot$.

Les définitions d'évaluation d'une formule, d'une théorie et de la conséquence sémantique sont analogues à précédemment, seule la notation diffère.

Definition 11.12 (Satisfaction d'une formule dans un modèle de Kripke de la logique minimale)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke de la logique minimale sur $\mathscr{L}$ et φ une formule de $\mathscr{L}$. On dit que *$\mathcal{K}$ satisfait φ* que l'on note

$$\mathcal{K} \models_m \varphi$$

si pour tout monde $\alpha \in |\mathcal{K}|$ on a $\alpha \Vdash \varphi$.

Definition 11.13 (Satisfaction d'une théorie dans un modèle de Kripke de la logique minimale)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke de la

logique minimale sur $\mathscr{L}$ et T une théorie de $\mathscr{L}$. On dit que $\mathcal{K}$ *satisfait* T que l'on note

$$\mathcal{K} \models_m T$$

si pour toute formule $\varphi \in T$ on a $\mathcal{K} \models_m \varphi$.

Definition 11.14 (Conséquence sémantique en logique minimale)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage, T une théorie et φ une formule de $\mathscr{L}$. On dit que φ est *conséquence sémantique en logique minimale* de T que l'on note

$$T \models_m \varphi$$

si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{K}$ de la logique minimale tel que $\mathcal{K} \models_m T$ on a $\mathcal{K} \models_m \varphi$.

Exemple 11.15. On considère le langage $\mathscr{L}$ dont la signature ne contient que le symbole de relation unaire P. On construit le modèle de Kripke de la logique minimale $\mathscr{K}$ suivant.

On se donne un unique monde α dont le domaine est $\mathbb{D}_\alpha = \{a\}$ et la relation de forcing est simplement $\alpha \Vdash \bot$.

Les relations suivantes sont vérifiées :

(1) $\alpha \nVdash \exists x\ P(x)$

(2) $\alpha \Vdash \neg\exists x\ P(x)$

(3) $\alpha \Vdash \neg\neg\exists x\ P(x)$

(4) $\alpha \nVdash \neg\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)$.

Par ailleurs, nous avons également

(5) $\alpha \nVdash \neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)$

(6) $\alpha \Vdash \neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x)$

(7) $\alpha \nVdash \big(\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x)\big) \longrightarrow \big(\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)\big)$.

On verra plus loin que par application du Théorème de complétude de la logique minimale (Théorème 12.1, page 121), qu'aucune de ces deux formules n'est prouvable en logique minimale :

(8) $\nvdash_m \neg\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)$

(9) $\nvdash_m \big(\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x)\big) \longrightarrow \big(\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)\big)$.

Par contre, on a $\vdash_i \big(\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x)\big) \longrightarrow \big(\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)\big)$, comme le montre la preuve suivante en Calcul des Séquents :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\ P(x) \vdash \neg\exists x\ P(x)}\,ax}{\neg\neg\exists x\ P(x), \neg\exists x\ P(x) \vdash}\,\neg_g}{\neg\neg\exists x\ P(x), \neg\exists x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)}\,aff_d \qquad \dfrac{}{\exists x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)}\,ax}{\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x), \neg\exists x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)}\,\vee_g}{\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x) \vdash \neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)}\,\rightarrow_d}{\vdash \big(\neg\neg\exists x\ P(x) \vee \exists x\ P(x)\big) \longrightarrow \big(\neg\exists x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x)\big)}\,\rightarrow_d$$

Nous avons donc trouvé une formule démontrable sans hypothèse en logique intuitonniste mais pas en logique minimale. Parconséquent, la logique minimale est strictement moins expressive que la logique intuitionniste.

12 Théorèmes de complétude

Le théorème de complétude de la logique classique est dû à Gödel, c'est le sujet de sa thèse de doctorat. On énonce maintenant les théorèmes de complétude pour les différentes logiques ainsi que leurs conséquences, puis on prouvera le théorème de complétude de la logique classique.

12.1 Énoncés des théorèmes de complétude

De même que les relation de conséquence syntaxique sont notées $\vdash_m$,$\vdash_i$ et $\vdash_c$, on note respectivement $\models_m, \models_i, \models_c$ les relations de conséquence sémantique pour les logiques minimale, intuitionniste et classique.(Donc $\models_c$ n'est autre que la relation $\models$ du chapitre 4.)

Theorème 12.1 (Complétude de la logique minimale)**.** *Soient $\mathscr{L}$ un langage de la logique du premier ordre, T une théorie et φ une formule, toutes deux construites sur ce langage. Alors*

$$T \models_m \varphi \text{ si et seulement si } T \vdash_m \varphi.$$

Theorème 12.2 (Complétude de la logique intuitionniste)**.** *Soient $\mathscr{L}$ un langage de la logique du premier ordre, T une théorie et φ une formule, toutes deux construites sur ce langage. Alors*

$$T \models_i \varphi \text{ si et seulement si } T \vdash_i \varphi.$$

Theorème 12.3 (Complétude de la logique classique)**.** *Soient $\mathscr{L}$ un langage de la logique du premier ordre, T une théorie et φ une formule, toutes deux construites sur ce langage. Alors*

$$T \models_c \varphi \text{ si et seulement si } T \vdash_c \varphi.$$

(C'est-à-dire $T \models \varphi$ ssi $T \vdash_c \varphi$.)

12.2 Preuve du théorème de complétude de la logique classique

On rappelle les notions de théorie consistante et de théorie non-contradictoire.

Definition 12.4 (Non-contradiction)**.**

Une théorie T est dite *non-contradictoire* si $T \nvdash_c \bot$.

Definition 12.5 (Consistance)**.**

Une théorie T est dite *consistante* si elle admet un modèle.

On va prouver un énoncé qui est équivalent au théorème de complétude.

Theorème 12.6 (Théorème de complétude bis)**.** *Soit T une théorie quelconque.*

T est non-contradictoire si et seulement si T est consistante.

C'est-à-dire $T \nvdash_c \bot$ ssi $T \not\models \bot$. Ou encore pour le dire autrement, $T \vdash_c \bot$ ssi $T \models \bot$.

Proposition 12.7. *Le théorème de complétude de la logique classique et le théorème de complétude bis sont équivalents.*

Démonstration. on va montrer que dans le schéma ci-dessous on a $\Longleftrightarrow$ si et seulement si on a $\Longleftrightarrow$, simplement en montrant que l'on a les deux équivalences verticales $\Big(\Big\Updownarrow\Big)$.

$$\begin{array}{ccc} T \models \varphi & \Longleftrightarrow & T \vdash_c \varphi \\ \Big\Updownarrow & & \Big\Updownarrow \\ T, \neg\varphi \models \bot & \Longleftrightarrow & T, \neg\varphi \vdash_c \bot \end{array}$$

(1) L'équivalence $\begin{array}{c} T \models \varphi \\ \Big\Updownarrow \\ T, \neg\varphi \models \bot \end{array}$ a été vue page 23.

(2) Pour l'équivalence $\begin{array}{c} T \vdash_c \varphi \\ \Big\Updownarrow \\ T, \neg\varphi \vdash_c \bot \end{array}$ il suffit de montrer que pour un sous-ensemble fini de formule $\Gamma \subseteq T$, on a $\begin{array}{c} \Gamma \vdash_c \varphi \\ \Big\Updownarrow \\ \Gamma, \neg\varphi \vdash_c \bot \end{array}$

(a) $$\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \\ \Gamma \vdash \varphi & \dfrac{}{\neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,ax \end{array}}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}\,\neg e$$

(b) $$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot_c$$

□

12.2.1 Non-contradictoire $\Longleftarrow$ consistant

Démonstration du Théorème bis sens direct : On prouve T consistante $\Longrightarrow$ T non-contradictoire On procède par contraposition et on montre donc

$$T \text{ contradictoire } \Longrightarrow T \text{ inconsistante,}$$

c'est-à-dire

$$T \vdash_c \bot \Longrightarrow T \models \bot.$$

En fait, on va montrer un résultat plus général : pour toute théorie T et pour toute formule φ, on va montrer

$$T \vdash_c \varphi \Longrightarrow T \models \varphi.$$

On suppose donc que $T \vdash_c \varphi$. Par conséquent, il existe $\Gamma \subseteq T$ un sous-ensemble fini de la théorie tel que le séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable en logique classique. La preuve se fait par induction sur la hauteur d'une déduction du séquent $\Gamma \vdash \varphi$. Pour cela, convenons [43] de considérer les preuves effectuées en déduction naturelle et de définir la hauteur d'une preuve comme la longueur de sa (ses) plus longue(s) branche(s) — car après tout une preuve est un arbre.

(i) Si la hauteur de la preuve est 0, alors c'est un axiome ou une introduction de l'égalité. Par définition, on a bien que $\varphi \models \varphi$ et que $\models t = t$.

(ii) Si la hauteur de la preuve est $n+1$, on considère l'ensemble des prémisses de la dernière règle utilisée. Soit $\Gamma_i \vdash_c \psi_i$ une de ces prémisses. Alors par hypothèse de récurrence, on a que $\Gamma_i \models \psi_i$, puisque la hauteur de sa preuve est au plus n. Il faut maintenant vérifier règle par règle que l'on peut déduire $\Gamma \models \varphi$. Ceci étant un peu fastidieux sans être difficile, nous vérifions seulement quelques cas. La totalité de tous les cas est indiquée dans la page qui suit. Pour bien comprendre, il suffit de vérifier pour chacune des règles, que si l'on admet les conséquences sémantiques de la forme « $\models$ », alors on est en droit d'admettre celles de la forme « $\models$ ».

43. Ce n'est qu'une convention, on pourrait tout aussi bien considérer les preuves effectuées en calcul des séquents par exemple.

Axiome

$$\frac{}{\varphi \models \varphi}\ ax$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \models \varphi \qquad \Gamma' \models \psi}{\Gamma, \Gamma' \models \varphi \wedge \psi}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \models \varphi \wedge \psi}{\Gamma \models \varphi}\ \wedge eg \qquad \frac{\Gamma \models \varphi \wedge \psi}{\Gamma \models \psi}\ \wedge ed$$

$$\frac{\Gamma \models \varphi}{\Gamma \models \varphi \vee \psi}\ \vee ig \qquad \frac{\Gamma \models \psi}{\Gamma \models \varphi \vee \psi}\ \vee id \qquad \frac{\Gamma \models \psi \vee \varphi \qquad \Gamma', \psi \models \theta \qquad \Gamma'', \varphi \models \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \models \theta}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \models \psi}{\Gamma \models \varphi \to \psi}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \models \varphi \to \psi \qquad \Gamma' \models \varphi}{\Gamma, \Gamma' \models \psi}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \models \ \bot}{\Gamma \models \neg\varphi}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \models \neg\varphi \qquad \Gamma' \models \varphi}{\Gamma, \Gamma' \models \ \bot}\ \neg e$$

$$\frac{\Gamma \models \varphi_{[y/x]}\ {}^{1}}{\Gamma \models \forall x\ \varphi}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \models \forall x\ \varphi}{\Gamma \models \varphi_{[t/x]}\ {}^{2}}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \models \varphi_{[t/x]}\ {}^{2}}{\Gamma \models \exists x\ \varphi}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \models \exists x\ \varphi \qquad \Gamma', \varphi_{[y/x]} \models \psi\ {}^{3}}{\Gamma, \Gamma' \models \psi}\ \exists e$$

$$\frac{}{\models t = t\ {}^{2}}\ = i \qquad \frac{\Gamma \models \varphi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \models t = u}{\Gamma, \Gamma' \models \varphi_{[u/x]}}\ = e$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \models \psi}{\Gamma, \varphi \models \psi}\ aff \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \models \psi}{\Gamma, \varphi \models \psi}\ \text{ctr}$$

Règles de l'absurdité intuitionniste et classique

$$\frac{\Gamma \models \ \bot}{\Gamma \models \varphi}\ \bot e \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \models \ \bot}{\Gamma \models \varphi}\ \bot c$$

1. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, φ
2. t : un terme
3. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', φ, ψ

Introduction de la conjonction
On a $\Gamma_1 \models \varphi_1, \Gamma_2 \models \varphi_2$, on veut en déduire que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Pour cela, soit $\mathscr{M}$ un modèle de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Alors par définition, il existe pour le vérificateur des stratégies gagnantes σ_1, respectivement σ_2, dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$, respectivement $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_2)$. Construisons une stratégie gagnante pour le vérificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Dans ce jeu, c'est au falsificateur de commencer. Si le falsificateur choisit φ_1, alors le jeu devient $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_1)$, le vérificateur applique σ_1 et gagne. Si le falsificateur choisit φ_2, alors le jeu devient $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_2)$, le vérificateur applique σ_2 et gagne. Cette stratégie est clairement gagnante et donc $\mathscr{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Élimination de la disjonction
On a $\Gamma_1 \models \varphi_2 \vee \varphi_3$, $\Gamma_2, \varphi_2 \models \varphi$, $\Gamma_3, \varphi_3 \models \varphi$, on veut en déduire que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \models \varphi$. Pour cela, soit $\mathscr{M}$ un modèle de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Alors par définition, il existe une stratégie gagnante pour le vérificateur dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_2 \vee \varphi_3)$, ce qui veut dire que soit le vérificateur a une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_2)$, soit le vérificateur a une stratégie gagnante dans $\mathbb{EV}(\mathscr{M}, \varphi_3)$. Par conséquent, $\mathscr{M} \models \Gamma_2 \cup \{\varphi_2\}$ ou $\mathscr{M} \models \Gamma_3 \cup \{\varphi_3\}$. Ainsi, $\mathscr{M} \models \varphi$.

Absurde classique
On a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ n'a pas de modèle, ce qui est vrai si et seulement si tout modèle de Γ ne satisfait pas $\neg\varphi$. Cette dernière assertion est équivalente à $\Gamma \models \varphi$.

□

12.2.2 Non-contradictoire $\Longrightarrow$ consistant

Dans cette section, on prouve *T non-contradictoire $\Longrightarrow$ T consistante.* i.e.,

$$T \nvdash_c \bot \Longrightarrow T \not\models \bot.$$

Pour la preuve du sens direct, nous avons besoin de quelques lemmes préparatoires.

Lemme 12.8. *Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de théories non-contradictoires qui est totalement ordonnée par l'inclusion. Alors $\bigcup_{i\in I} T_i$ est non-contradictoire.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\bigcup_{i\in I} T_i$ n'est pas non-contradictoire. Alors il existe une déduction du séquent $\bigcup_{i\in I} T_i \vdash_c \bot$. Puisque une déduction est un objet fini, alors seulement un nombre fini d'hypothèses peut être utilisé (voir remarque 9.9). Il existe donc un sous-ensemble fini $F \subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$ tel que $F \vdash_c \bot$. Pour toute formule $\varphi \in F$, il existe $i_\varphi \in I$ tel que $\varphi \in T_{i_\varphi}$. Comme F est fini, il existe $j \in I$ tel que $T_j = \max\{T_{i_\varphi} : \varphi \in F\}$. Ainsi, $F \subseteq T_j$ et donc T_j n'est pas non-contradictoire, une contradiction. □

Definition 12.9 (Théorie complète)**.** Une théorie T sur un langage $\mathscr{L}$ est dite *complète* si elle est non-contradictoire et si pour toute formule close φ sur $\mathscr{L}$, on a $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$.

Lemme 12.10 (AC)**.** *Soit T une théorie sur un langage $\mathscr{L}$ qui soit non-contradictoire. Alors il existe une théorie T_c sur le même langage qui soit complète et telle que $T \subseteq T_c$.*

Démonstration. On considère l'ensemble des théories non-contradictoires sur $\mathscr{L}$ qui étendent T. Muni de l'inclusion, c'est un ordre partiel inductif. En effet, pour toute chaîne $(T_i)_{i\in I}$, la théorie $T_I = \bigcup_{i\in I} T_i$ est non-contradictoire (voir lemme 12.8) et c'est un majorant de la chaîne. On peut donc utiliser le lemme de Zorn pour obtenir l'existence d'une théorie T_c qui est un élément maximal de l'ordre partiel considéré. Il reste à montrer que c'est une théorie complète.
Par l'absurde, supposons qu'il existe une formule φ telle que $\varphi \notin T_c$ et $\neg\varphi \notin T_c$. Par maximalité de T_c, on obtient qu'aucune des deux théories $T_c \cup \{\varphi\}$ et $T_c \cup \{\neg\varphi\}$ n'est non-contradictoire. Autrement dit, elles sont toutes deux contradictoires, ce qui veut dire que l'on a $T_c, \varphi \vdash_c \bot$ et $T_c, \neg\varphi \vdash_c \bot$. Par conséquent, il existe deux ensembles finis $\Gamma \subseteq T_c$ et $\Gamma' \subseteq T_c$ tels que $\Gamma, \varphi \vdash_c \bot$ et $\Gamma', \neg\varphi \vdash_c \bot$. On obtient alors

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot_c \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma', \varphi \vdash \bot}}{\Gamma' \vdash \neg\varphi}\,\neg i}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\,\neg e$$

Comme $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq T_c$, il en résulte $T_c \vdash_c \bot$, une contradiction. □

Lemme 12.11. *Soient Γ un ensemble de formules, φ une formule et c un symbole de constante n'apparaissant ni dans Γ ni dans φ. Alors $\Gamma \vdash_c \varphi_{[c/x]}$ implique que $\Gamma \vdash_c \forall x\ \varphi$.*

Démonstration. On montre d'abord que pour tout ensemble de formule Δ et toute formule ψ, si $\Delta_{[c/x]} \vdash_c \psi_{[c/x]}$, alors pour tout terme t du langage, $\Delta_{[t/x]} \vdash_c \psi_{[t/x]}$. La preuve se fait par récurrence sur la hauteur de la démonstration en remplaçant partout c par t.
Puisque x est liée dans $\forall x\ \varphi$, alors sans perte de généralité, on peut supposer que x n'a pas d'occurrence libre dans Γ (sinon, il suffit de considérer la nouvelle formule $\forall y\ \varphi_{[y/x]}$ où y est une nouvelle variable). En choisissant pour terme z (une nouvelle variable) dans le résultat précédent, on obtient que, puisque $\Gamma = \Gamma_{[c/x]} \vdash_c \varphi_{[c/x]}$, on a $\Gamma = \Gamma_{[z/x]} \vdash_c \varphi_{[z/x]}$. Appliquant l'introduction du quantificateur universel, puisque z n'a d'occurrence libre ni dans Γ ni dans φ, alors $\Gamma \vdash_c \forall z\ \varphi_{[z/x]}$ et donc $\Gamma \vdash_c \forall x\ \varphi$. □

Lemme 12.12. *Soient* Γ *un ensemble de formules d'un langage* $\mathscr{L}$*,* $\mathscr{L}'$ *le langage* $\mathscr{L}$ *augmenté de nouveaux symboles de constantes et* Γ' *le même ensemble de formules* Γ *mais cette fois-ci vue comme ensemble de* $\mathscr{L}'$*-formules et non plus de* $\mathscr{L}$*-formules. Alors*

$$\Gamma \vdash_c \bot \text{ si et seulement si } \Gamma' \vdash_c \bot.$$

Il est clair qu'en ajoutant des constantes aux langages, on ajoute également de nouvelles formules et par conséquent de nouvelles preuves. Il s'agit dès lors de montrer que si une théorie était consistante dans le langage originel, elle le resterait également dans le langage augmenté.

Démonstration. Tout d'abord, si Γ est contradictoire, alors il en est de même de Γ' puisqu'une preuve de $\Gamma \vdash_c \bot$ est également une preuve de $\Gamma' \vdash_c \bot$. Ensuite il suffit de montrer que pour toute formule φ de $\mathscr{L}'$ et toute $\mathscr{L}'$-preuve de φ à partir de Γ', si l'on prend cette preuve (qui est un arbre composé de séquents) et que l'on remplace dans chaque formule de chaque séquent chaque *nouvelle constante* c_i par une *nouvelle variable* y_i, alors la preuve que l'on obtient est bien une $\mathscr{L}'$-preuve de $\varphi_{[y_0/c_0,\ldots,y_n/c_n]}$ à partir de Γ'.

Précisément, pour n'importe quelle $\mathscr{L}'$-preuve $\mathbf{P'}$ de $\Delta \vdash \varphi'$ (avec $\Delta \subseteq \Gamma'$ et Δ fini), ne faisant intervenir comme nouveaux symboles de constantes de $\mathscr{L}'$ que $c_0, \ldots, c_n$, on considère $y_0, \ldots, y_n$ des *nouvelles variables* n'apparaissant nulle part dans la preuve $\mathbf{P'}$ et l'on pose

$$\varphi' = \varphi_{[c_0/y_0,\ldots,c_n/y_n]} \quad et \quad \mathbf{P'} = \mathbf{P}_{[c_0/y_0,\ldots,c_n/y_n]}\,[44]$$

on montre alors très facilement par induction sur la hauteur de la preuve, que $\mathbf{P'}$ est une preuve du séquent $\Delta \vdash \varphi'$ si et seulement si $\mathbf{P}$ est une preuve du séquent $\Delta \vdash \varphi$.

Par conséquent, si $\Gamma' \vdash_c \bot$ il existe alors une $\mathscr{L}'$-preuve $\mathbf{P'}$ de $\Delta \vdash \bot$ et donc une $\mathscr{L}$-preuve de $\Delta \vdash \bot$ également.

□

Démonstration du Théorème bis sens direct :
(on prouve $\Gamma \nvdash_c \bot \Longrightarrow \Gamma \not\models \bot$).

Soit T une théorie sur un langage $\mathscr{L}$. On suppose que T est non-contradictoire et on cherche un modèle de T. La démonstration se fait en trois étapes.

Première étape : On construit une théorie T_h sur un langage $\mathscr{L}_h$ telle que :

(i) T_h est un théorie complète ;

44. où $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ ne se distingue qu'en ce que pour chaque $i \leq n$, tout symbole c_i de $\mathbf{P'}$ devient y_i dans $\mathbf{P}$ et inversement tout tout symbole y_i de $\mathbf{P}$ devient c_i dans $\mathbf{P'}$.

(ii) pour toute formule φ sur $\mathscr{L}_h$ ayant x pour seule variable libre, il existe un *témoin de Henkin* c_φ, c'est-à-dire un symbole de constante de $\mathscr{L}_h$ tel que :

$$T_h \vdash_c \exists x\ \varphi \to \varphi_{[c_\varphi/x]}.$$

Pour cela, définissons par récurrence des langages $\mathscr{L}_n$ et des théories T_n, pour tout entier n. On pose $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}$, $T_0 = T$ et

$$\mathscr{L}_{n+1} = \mathscr{L}_n \cup \{c_\varphi \mid \varphi_{[x]} \text{ formule avec une variable libre de } \mathscr{L}_n\},$$

$$T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x\ \varphi \to \varphi_{[c_\varphi/x]} \mid \varphi_{[x]} \textit{ formule de } \mathscr{L}_n \textit{ avec } x \textit{ libre}\}.$$

On considère maintenant

$$\mathscr{L}_h = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_n \quad \text{et} \quad T_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n.$$

Montrons que T_∞ est non-contradictoire. Par le lemme 12.8 et le lemme 12.12, il suffit de montrer que T_n est non-contradictoire pour tout entier n. On fait cela par récurrence. On a par hypothèse que $T_0 = T$ est non-contradictoire. Supposons par l'absurde que T_{n+1} n'est pas non-contradictoire – autrement dit, supposons que T_{n+1} est contradictoire – avec $T_0, \ldots, T_n$ toutes non-contradictoires. Alors, il existe des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $\mathscr{L}_n$ telles que :

$$T_n, \bigwedge_{1\le i\le k} \left(\exists x\ \varphi_i \to \varphi_{i[c_{\varphi_i}/x]}\right) \vdash_c \bot.$$

On en déduit que

$$T_n \vdash_c \bigwedge_{1\le i\le k} \left(\exists x\ \varphi_i \to \varphi_{i[c_{\varphi_i}/x]}\right) \to \bot$$

et par le lemme 12.11 appliqué k fois, on peut conclure que

$$T_n \vdash_c \forall y_1 \ldots \forall y_k \left[\bigwedge_{1\le i\le k} \left(\exists x\ \varphi_i \to \varphi_{i[y_i/x]}\right) \to \bot\right].$$

Or, on sait que $\vdash_c \forall y\ (\theta \to \psi) \iff (\exists y\ \theta \to \psi)$ si ψ n'a pas d'occurrence libre de y (par combinaison d'exercices des séries). Par conséquent,

$$T_n \vdash_c \left[\exists y_1 \ldots \exists y_k \bigwedge_{1\le i\le k} \left(\exists x\ \varphi_i \to \varphi_{i[y_i/x]}\right)\right] \to \bot.$$

Du fait que $\vdash_c \exists y\ (\varphi \wedge \psi) \iff (\exists y\ \varphi \wedge \psi)$ si ψ n 'a pas d'occurrence libre de y, on obtient que :

$$T_n \vdash_c \bigwedge_{1\leq i\leq k} \Big[\exists y_i \Big(\exists x\ \varphi_i \to \varphi_{i[y_i/x]}\Big)\Big] \to \bot.$$

On sait de plus que $\vdash_c \exists y\ (\theta \to \psi) \iff (\theta \to \exists y\ \psi)$, si θ n'a pas d'occurrence libre de y, ce qui donne

$$T_n \vdash_c \bigwedge_{1\leq i\leq k} \Big(\exists x\ \varphi_i \to \exists y_i\ \varphi_{i[y_i/x]}\Big) \to \bot.$$

Or, pour tout $1 \leq i \leq k$, on a que $\vdash_c \exists x\ \varphi_i \to \exists y_i\ \varphi_{i[y_i/x]}$, ce qui implique que :

$$\vdash_c \bigwedge_{1\leq i\leq k} \Big(\exists x\ \varphi_i \to \exists y_i\ \varphi_{i[y_i/x]}\Big).$$

Par élimination de l'implication, il vient que $T_n \vdash_c \bot$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

On utilise maintenant le lemme 12.10 pour étendre T_∞ en une théorie complète T_h.

Soit φ une formule de $\mathscr{L}_h$ avec une seule variable libre x. Il reste à vérifier que

$$T_h \vdash_c \exists x\ \varphi \to \varphi_{[c_\varphi/x]}.$$

Par définition, φ étant une suite finie, elle ne contient qu'un nombre fini de symboles de $\mathscr{L}_h$. Par construction, il existe donc un entier n tel que $\varphi \in \mathscr{L}_n$ et ainsi

$$\exists x\ \varphi \to \varphi_{[c_\varphi/x]} \in T_{n+1} \subseteq T_h.$$

Seconde étape : On construit maintenant un $\mathscr{L}_h$-modèle $\mathscr{M}$ de T_h, dont la restriction à $\mathscr{L}$ est un modèle de T.

On pose (voir définition 3.6)

$$\mathscr{T}_{\text{clos}}(\mathscr{L}_h) = \{t \in \mathscr{T}(\mathscr{L}_h) \mid t \text{ ne contient pas de variable}\}.$$

On définit le modèle $\mathscr{M}$ suivant :

(i)
$$|\mathscr{M}| = {}^{\mathscr{T}_{\text{clos}}(\mathscr{L}_h)}\Big/_{\sim},$$
où $t \sim t'$ si et seulement si $T_h \vdash_c t = t'$;

(ii) pour tout symbole de constante c, $c^{\mathscr{M}} = [\,c\,]_\sim$;

(iii) pour tout symbole de fonction f d'arité n,
$$f^{\mathscr{M}}\Big([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim\Big) = \Big[f(t_1, \ldots, t_n)\Big]_\sim ;$$

(iv) pour tout symbole de relation R d'arité n,

$$\Big([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim \Big) \in R^{\mathscr{M}} \iff T_h \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n).$$

Vérifions que c'est bien défini. C'est-à-dire que la définition ne dépend pas du choix des termes dans les classes d'équivalence données. Soient $t_1, \ldots t_n, t'_1, \ldots t'_n$ des termes tels que $t_i \sim t'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors on a $T_h \vdash_c t_i = t'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. L'élimination de l'égalité appliquée n fois sur le résultat de l'introduction de l'égalité avec $f(t_1, \ldots, t_n)$ nous donne que

$$T_h \vdash_c f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n).$$

L'élimination de l'égalité appliquée n fois sur l'axiome $R(t_1, \ldots, t_n) \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n)$ donne $T_h, R(t_1, \ldots, t_n) \vdash_c R(t'_1, \ldots, t'_n)$. Par conséquent,

$$T_h \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n) \to R(t'_1, \ldots, t'_n).$$

Par symétrie

$$T_h \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n) \longleftrightarrow R(t'_1, \ldots, t'_n)$$

et on obtient le résultat par modus ponens, $T_h \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement si $T_h \vdash_c R(t'_1, \ldots, t'_n)$.

Par ailleurs $|\mathscr{M}| \neq \emptyset$ car la formule avec une variable libre $\exists x\ x = x$ est une formule de $\mathscr{L}_h$ et donc la classe de son témoin de Henkin est un élément de $|\mathscr{M}|$.

Troisième étape : On vérifie que $\mathscr{M} \models T_h$. Pour cela, on prouve que pour toute formule de la forme $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dont les variables libres sont parmis $x_1, \ldots, x_n$, et tous *termes clos* $t_1, \ldots, t_n$,

$$T_h \vdash_c \varphi[t_1, \ldots, t_n] \text{ si et seulement si } \mathscr{M} \models \varphi[t_1, \ldots, t_n].$$

où $\varphi[t_1, \ldots, t_n]$ désigne la formule $\varphi[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$.

On suppose sans perte de généralité que φ ne comporte que le quantificateur $\exists$ et les connecteurs $\wedge, \neg$. On procède par récurrence sur la hauteur de φ :

Si $\mathbf{ht}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$:

(i) Si $\varphi = \bot$:
comme T_h est non-contradictoire, on a à la fois $T_h \nvdash_c \bot$ et $\mathscr{M} \not\models \bot$ et donc $T_h \vdash_c \bot \iff \mathscr{M} \models \bot$.

(ii) Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} \models \varphi &\iff (t_1{}^{\mathscr{M}}, \ldots, t_n{}^{\mathscr{M}}) \in R^{\mathscr{M}} && \textit{(par définition)} \\
&\iff ([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) \in R^{\mathscr{M}} && \textit{(par définition des } t_i{}^{\mathscr{M}}\textit{)} \\
&\iff T_h \vdash_c R(t_1, \ldots, t_n) && \textit{(par définition de } R^{\mathscr{M}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{ht}(\varphi) > 0$:

(i) Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} \models (\psi_1 \wedge \psi_2) &\iff \mathscr{M} \models \psi_1 \textit{ et } \mathscr{M} \models \psi_2 && \textit{(par définition)} \\
&\iff T_h \vdash_c \psi_1 \textit{ et } T_h \vdash_c \psi_2 && \textit{(par hypothèse d'induction)} \\
&\iff T_h \vdash_c (\psi_1 \wedge \psi_2) && \textit{(par les règles } \wedge i \textit{ et } \wedge e\textit{)}
\end{aligned}$$

(ii) Si $\varphi = \neg\psi$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} \models \neg\psi &\iff \mathscr{M} \not\models \psi && \textit{(par définition)} \\
&\iff T_h \nvdash_c \psi && \textit{(par hypothèse d'induction)} \\
&\iff T_h \vdash_c \neg\psi && \textit{(car } T_h \textit{ est complète)}
\end{aligned}$$

(iii) Si $\varphi = \exists x\ \psi$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} \models \exists x\ \psi &\iff \textit{il existe } [t]_\sim \in |\mathscr{M}|\ \ \mathscr{M},\ [t]_\sim /_x\ \models \psi[x] && \textit{(par définition)} \\
&\iff \textit{il existe un terme clos } t\ \ \mathscr{M}, t^{\mathscr{M}} /_x\ \models \psi[x] && \textit{(par définition de } t^{\mathscr{M}}\textit{)} \\
&\iff \textit{il existe un terme clos } t\ \ \mathscr{M} \models \psi[t] && \textit{(par définition)} \\
&\iff \textit{il existe un terme clos } t\ \ T_h \vdash_c \psi[t] && \textit{(par hyp. d'ind.)} \\
&\iff T_h \vdash_c \exists x\ \psi && \textit{(} (\Rightarrow) \textit{ par } \exists i\textit{ ; } (\Leftarrow) \quad \textit{par témoin de Henkin)}
\end{aligned}$$

Pour la dernière double implication, le sens ($\Rightarrow$) est une simple application de la règle d'introduction du quantificateur existentiel en déduction naturelle. Pour le sens ($\Leftarrow$), il suffit de remarquer que le témoin de Henkin c_ψ est le terme recherché. En effet, on a

$$T_h \vdash_c \exists x\ \psi$$

et

$$T_h \vdash_c \exists x\ \psi \to \psi[c_\psi /x]$$

Par *modus ponens* (élimination de l'implication), on obtient

$$T_h \vdash_c \psi[c_\psi / x].$$

Ainsi, on a montré qu'il existait une $\mathscr{L}_h$-structure satisfaisant la théorie complète T_h puisque $\mathscr{M} \models T_h$. Comme la théorie $T \subseteq T_h$, on a donc montré qu'il existait une $\mathscr{L}_h$-structure satisfaisant la théorie T. Pour obtenir une $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{N}$ satisfaisant T, il suffit de retirer les témoins de Henkin du langage et d'en oublier les interprétations dans la structure $\mathscr{M}$.

□

Remarque 12.13. Le choix de la relation d'équivalence employée pour construire le modèle $\mathscr{M}$ de la preuve précédente est en fait assez logique. En effet, si l'on veut que cela puisse fonctionner, il faut en tout cas que cela marche pour les formules du type $t = t'$ et $\neg t = t'$. Ainsi, il faut que $\mathscr{M} \models t = t'$ si et seulement si $T_h \vdash_c t = t'$. Par conséquent, il faut que $t^{\mathscr{M}} = t'^{\mathscr{M}}$ si et seulement si $T_h \vdash_c t = t'$.

13 Conséquences des théorèmes de complétude

Les théorèmes de complétude nous indiquent qu'une formule n'est pas démontrable dans une certaine logique si et seulement si il existe un modèle de la logique correspondante dans lequel la formule n'est pas satisfaite (c'est ce qu'on appelle généralement un *contre-exemple*).

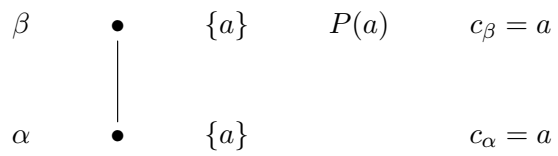
13.0.1 Quelques formules non démontrables en logique intuitionniste

Proposition 13.1. *Les formules suivantes ne sont pas démontrables en logique intuitionniste :*

(*i*) $(\varphi \vee \neg\varphi)$;

(*ii*) $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$.

Démonstration. On se donne $\mathcal{K}$ le modèle de Kripke de la logique intuitionniste suivant :



(i) On observe que dans le modèle $\mathcal{K}$, $\alpha \nVdash P(c)$ et $\alpha \nVdash \neg P(c)$.
Par conséquent, $\alpha \nVdash P(c) \vee \neg P(c)$ et donc $\mathcal{K} \not\models_i P(c) \vee \neg P(c)$.

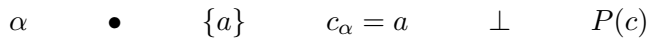
(ii) De même, on a $\alpha \nVdash P(c), \beta \Vdash P(c)$ et $\alpha \nVdash \neg P(c), \beta \nVdash \neg P(c)$. Par conséquent, on a $\alpha \Vdash \neg\neg P(c)$ et ainsi $\alpha \nVdash \big(\neg\neg P(c) \to P(c)\big)$. Pour conclure, $\mathcal{K} \not\models_i \big(\neg\neg P(c) \to P(c)\big)$.

□

13.0.2 Une formule non démontrable en logique minimale

Proposition 13.2. *La formule* $\big((\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)\big)$ *n'est pas démontrable en logique minimale, mais elle l'est en logique intuitionniste.*

Démonstration. On se donne $\mathcal{K}$ le modèle de Kripke de la logique minimale suivant :



On observe que dans le modèle $\mathcal{K}$, $\alpha \Vdash P(c)$, et donc $\alpha \Vdash \big(P(c) \vee P'(c)\big)$. Par ailleurs $\alpha \Vdash \big(P(c) \to \bot\big)$ et donc $\alpha \Vdash \neg P(c)$. On obtient alors que $\alpha \nVdash \big(\neg P(c) \to P'(c)\big)$ et donc $\mathcal{K} \not\models_m \Big(\big(P(c) \vee P'(c)\big) \to \big(\neg P(c) \to P'(c)\big)\Big)$. Ainsi, $\not\vdash_m \big(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)\big)$.

Montrons maintenant que $\vdash_i (\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi \vee \psi)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,\text{ax}}{\varphi, \neg\varphi \vdash \bot}\,\neg e}{\varphi, \neg\varphi \vdash \psi}\,\bot e \qquad \dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,\text{ax}}{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \vdash \psi}\,\vee e}{(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi)}\,\to i}{\vdash \big((\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)\big)}\,\to i$$

□

13.0.3 Théorème de compacité

Le théorème de compacité est en fait un corollaire du théorème de complétude.

Corollaire 13.3. *Une théorie est satisfaisable si et seulement si elle est finiment satisfaisable.*

Démonstration. Par le théorème de complétude bis (qui est équivalent au théorème de complétude, voir 12.6 et 12.7), l'énoncé du théorème de compacité est équivalent à l'énoncé suivant : une théorie est non-contradictoire si et seulement chaque sous-théorie finie est non-contradictoire. Ceci est en fait une trivialité du fait qu'une preuve est un objet fini. En effet, ceci qui implique que $T \vdash_c \bot$ si et seulement s'il existe une sous-théorie finie $\Delta \subseteq T$ telle que $\Delta \vdash_c \bot$. Ou pour le dire autrement, on remarque que l'énoncé suivant :

$$T \nvdash \bot \iff \text{pour chaque sous-théorie finie } \Delta \subseteq T,\ \Delta \nvdash \bot$$

est équivalent, via le théorème de complétude, à l'énoncé

$$T \nvdash_c \bot \iff \text{pour chaque sous-théorie finie } \Delta \subseteq T,\ \Delta \nvdash_c \bot$$

qui est équivalent à l'énoncé

$$T \vdash_c \bot \iff \text{il existe une sous-théorie finie } \Delta \subseteq T,\ \Delta \vdash_c \bot.$$

□

Appendices

Voici des documents fournis par le professeur lui-même durant le cours.

A Axiomatique : Peano, Robinson et ZFC

A.1 Arithmétique de Peano

Soit $\mathscr{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ où 0 est un symbole de constante, S est un symbole de fonction unaire et $+, \cdot$ sont des symboles de fonction binaires. La théorie de Peano $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est l'ensemble *infini* de formules contenant :

axiome 1. $\forall x\ Sx \neq 0$

axiome 2. $\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to Sy = x)$

axiome 3. $\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \to x = y)$

axiome 4. $\forall x\ x{+}0 = x$

axiome 5. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{+}Sy = S(x{+}y)\Big)$

axiome 6. $\forall x\ x{\cdot}0 = 0$

axiome 7. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{\cdot}Sy = (x{\cdot}y){+}x\Big)$

schema d'axiome (induction) pour chaque formule $\varphi_{[x_0,x_1,\ldots,x_n]}$ [45], l'axiome suivant :

$$\forall x_1\ \ldots\ \forall x_n\ \Big(\Big(\varphi_{[0/x_0]}\ \wedge\ \forall x_0\ \big(\varphi \to \varphi_{[Sx_0/x_0]}\big)\Big) \to \forall x_0\ \varphi\Big)$$

A.2 Arithmétique de Robinson

axiome 1. $\forall x\ Sx \neq 0$

axiome 2. $\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to Sy = x)$

axiome 3. $\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \to x = y)$

axiome 4. $\forall x\ x{+}0 = x$

axiome 5. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{+}Sy = S(x{+}y)\Big)$

axiome 6. $\forall x\ x{\cdot}0 = 0$

axiome 7. $\forall x\ \forall y\ \Big(x{\cdot}Sy = (x{\cdot}y){+}x\Big)$

On convient généralement de noter "$x < y$" pour la formule "$\exists z\ \ z + x = y$".

45. la notation $\varphi_{[x_0,x_1,\ldots,x_n]}$ signifie que les variables libres de φ sont parmis $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

A.3 Les axiomes de Zermelo-Fraenkel

(1) Extensionnalité :

$$\forall x\,\forall y\,\big(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big).$$

(2) Le schéma d'axiomes de compréhension :

$$\forall z\,\forall w_1 \ldots \forall w_n\,\exists y\,\forall x\,\big(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi)\big),$$

où $\varphi := \varphi(x, z, \overline{w})$ est une formule dont toutes les variables libres figurent parmi $x, z, w_1, ..., w_n$.

(3) Paire :

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x \in z \wedge y \in z).$$

(4) Union :

$$\forall a\,\exists b\,\forall x\,\forall y\,\big((x \in y \wedge y \in a) \to x \in b\big),$$

on note $b = \bigcup a$.

(5) Infini :

$$\exists x\,\big(\exists y\, y \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)\big).$$

(6) Parties :

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big(\forall u\,(u \in z \to u \in x) \to z \in y\big).$$

(7) Le schéma de remplacement :

$$\forall A\,\forall w_1\,\ldots\,\forall w_n\,\Big(\forall x\,(x \in A \to \exists! y\,\varphi) \to \exists Y\,\forall x\,\big(x \in A \to \exists y\,(y \in Y \wedge \varphi)\big)\Big),$$

où $\varphi := \varphi(x, y, A, \overline{w})$ est une formule dont toutes les variables libres figurent parmis $x, y, A, w_1, ..., w_n$, et où $\exists! y\varphi$ est une abréviation de

$$\exists y\,\Big(\varphi(x, y, A, \overline{w}) \wedge \forall z\,\big(\varphi(x, z, A, \overline{w}) \to z = y\big)\Big).$$

(8) Fondation :

$$\forall x\,\Big(\exists y\, y \in x \to \exists y\,\big(y \in x \wedge \neg\exists z\,(z \in x \wedge z \in y)\big)\Big).$$

(9) Choix :

$$\forall x\,\exists c\,\forall z\,\exists y\,\forall u\,\Big(z \in x \to \big((u \in z \wedge u \in c) \to u = y\big)\Big).$$

B Déduction naturelle et calcul des séquents

Déduction Naturelle

Axiome

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \wedge eg \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge ed$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee ig \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \vee id \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi \qquad \Gamma', \psi \vdash \theta \qquad \Gamma'', \varphi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}\ ^{1}}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ ^{2}}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}\ ^{2}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi \qquad \Gamma', \varphi_{[y/x]} \vdash \psi\ ^{3}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\ \exists e$$

$$\frac{}{\vdash t = t\ ^{2}}\ = i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]} \qquad \Gamma' \vdash t = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi_{[u/x]}}\ = e$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ aff \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ \text{ctr}$$

Règles de l'absurdité intuitionniste et classique

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot e \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \bot c$$

1. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ, φ
2. t : un terme
3. y n'a pas d'occurrence libre dans Γ', φ, ψ

Calcul des Séquents

Axiomes

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ ax \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ \bot_g$$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge_{g1} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge_{g2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ \vee_{d1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\ \vee_{d2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ \to_g \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}\ \to_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ \neg_g \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\ \neg_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta\ ^{1}}{\Gamma, \forall x\ \varphi \vdash \Delta}\ \forall_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[y/x]}, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi, \Delta\ ^{2}}\ \forall_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_{[y/x]} \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ \varphi \vdash \Delta\ ^{2}}\ \exists_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_{[t/x]}, \Delta\ ^{1}}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi, \Delta}\ \exists_d$$

$$\frac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ Ref \qquad \frac{\Gamma, t = s, \varphi_{[s/x]}, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta}{\Gamma, s = t, \varphi_{[t/x]} \vdash \Delta}\ Rep$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\ aff_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\ aff_d$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\ ctr_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\ ctr_d$$

Règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ cut$$

1. t : un terme
2. y n'a pas d'occurrence libre dans le séquent conclusion de la règle (dans $\Gamma, \exists x\ \varphi$ ou $\forall x\ \varphi$, et Δ)

C Compilation de certains résultats importants vus dans les séries d'exercices

Theorème C.1 (Critère de Vaught)**.** *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage $\mathscr{L}$ dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents, alors T est complète.*

Corollaire C.2. *Soit T une théorie du premier ordre sur un langage dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors T est complète.*

Theorème C.3 (Compacité bis)**.** *Soit T une théorie. On a $T \models \Phi$ si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T_0 de T tels que $T_0 \models \Phi$.*

Proposition C.4. *Le théorème de compacité et le théorème de compacité bis sont équivalents.*

Definition C.5 (Axiomatisabilité)**.** Soient $\mathscr{L}$ un langage égalitaire et C une classe de $\mathscr{L}$-structures. La classe C est dite *axiomatisable* (resp. *finiment axiomatisable*) s'il existe une théorie T_C (resp. une théorie finie T_C) de $\mathscr{L}$ telle que, pour toute $\mathscr{L}$-structure $\mathscr{M}$, on ait :

$$\mathscr{M} \in C \Leftrightarrow \mathscr{M} \models T_C.$$

Proposition C.6. *Soient $\mathscr{L}$ un langage égalitaire et C une classe de $\mathscr{L}$-structures axiomatisée par la théorie T_C. Alors C est finiment axiomatisable si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T de T_C telle que T axiomatise C.*

Références

[1] Sergei N. Artemov and Lev D. Beklemishev. Provability logic. In *Handbook of Philosophical Logic, 2nd Edition*, volume 13, pages 189–360. Springer, 2005.

[2] George Boole. *An investigation of the laws of thought : on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, volume 2. Walton and Maberly, 1854.

[3] George Boolos. *Logic, logic, and logic.* Harvard University Press, 1999.

[4] Samuel R. Buss. *Handbook of proof theory.* Elsevier Science, 1998.

[5] Lewis Carroll. *Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking Glass and What Alice Found There ; edited with an introduction and notes by Hugh Haughton.* Penguin Classics, 2003.

[6] Chen C. Chang and H. Jerome Keisler. *Model theory.* North Holland, 1990.

[7] Ian Chiswell and Wilfrid Hodges. *Mathematical logic.* Oxford University Press, 2007.

[8] Alonzo Church. *Introduction to Mathematical Logic.* (Princeton Landmark in Mathematics. Princeton University Press, 1996.

[9] R Cori and D Lascar. *Mathematical Logic, Part 2, Recursion Theory, Gödel Theorems, Set Theory, Model Theory.* Oxford University Press, 2000.

[10] René Cori and Daniel Lascar. *Mathematical Logic : Part 1 : Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems.* Oxford University Press, 2000.

[11] René Cori, Daniel Lascar, and Jean-Louis Préf Krivine. *Logique mathématique, tome 1 : Calcul propositionnel ; algèbre de Boole ; calcul des prédicats*, volume 1. Dunod, Paris, 2003.

[12] René Cori, Daniel Lascar, and Jean-Louis Préf Krivine. *Logique mathématique, tome 2 : Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles*, volume 2. Dunod, Paris, 2003.

[13] René David, Karim Nour, and Christophe Raffalli. *Introduction à la logique : théorie de la démonstration : cours et exercices corrigés, (2nd édition).* Dunod, 2004.

[14] Martin Davis. *Engines of Logic : Mathematicians and the Origin of the Computer.* WW Norton & Company, 2001.

[15] André Delessert. *Introduction à la logique.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1988.

[16] Heinz-Dieter Ebbinghaus and Jörg Flum. *Finite model theory.* springer, 2005.

[17] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1978.

[18] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 1972.

[19] Leonhard Euler. *Lettres a une princesse d'allemagne : sur divers sujets de physique et de philosophie*. PPUR presses polytechniques, 2003.

[20] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press, 1995.

[21] Jean-Yves Girard. Proof theory and logical complexity vol. i. *Studies in Proof Theory. Bibliopolis (Napoli) and Elsevier Science Publishers (Amsterdam)*, 1987.

[22] Jean-Yves Girard. *Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection*. Hermann, 2006.

[23] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and types*, volume 7. Cambridge University Press Cambridge, 1989.

[24] Jean-Blaise Grize. *Logique et langage*. Editions Ophrys, 1990.

[25] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1979.

[26] Shawn Hedman. *A first course in logic : an introduction to model theory, proof theory, computability, and complexity*. Oxford University Press Oxford, 2004.

[27] Horst Herrlich. *Axiom of choice*. Springer, 2006.

[28] David Hilbert and Wilhelm Ackermann. Grundzüge der theoretischen logik. *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, 27, 1928.

[29] David Hilbert, Wilhelm Ackermann, and Robert E. Luce. *Principles of mathematical logic*. Chelsea Publishing Company New York, 1950.

[30] Jaakko Hintikka and Esa Saarinen. *Game-theoretical semantics : Essays on semantics*, volume 5. Springer, 1979.

[31] Wilfrid Hodges. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.

[32] Wilfrid Hodges. *An introduction to elementary logic*. Penguin Books, 2001.

[33] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. Crc Press, 1999.

[34] Thomas Jech. *The axiom of choice*. DoverPublications. com, 2008.

[35] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering Modern Set Theory : Set-theoretic tools for every mathematician. 2*, volume 1. American mathematical society, 1997.

[36] Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1952.

[37] Stephen C. Kleene. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, 1967.

[38] Georg Kreisel and Jean-Louis Krivine. *Éléments de logique mathématique : théorie des modèles*, volume 3. Dunod, 1967. VIII, 212 p. : ill. ; 25 cm.

[39] Jean-Louis Krivine. *Théorie des ensembles*. Cassini, 2007.

[40] Kenneth Kunen. *Set theory*. College Publications, 2011.

[41] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for mathematics*. Cambridge University Press, 2003.

[42] Christopher C. Leary. *A friendly introduction to mathematical logic*. Prentice Hall PTR, 1999.

[43] Azriel Levy. *Basic set theory*. Courier Dover Publications, 2012.

[44] Leonid Libkin. *Elements of finite model theory*. Springer, 2004.

[45] David Marker. *Model theory : an introduction*. Springer, 2002.

[46] Elliot Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. CRC press, 1997.

[47] Yannis N. Moschovakis. *Notes on set theory*. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.

[48] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles : une introduction à la Logique mathématique contemporaine*. Bruno Poizat, 1985.

[49] Bruno Poizat. *A course in model theory : an introduction to contemporary mathematical logic*. Springer, 2000.

[50] Sally Popkorn. *First steps in modal logic*. Cambridge University Press, 1994.

[51] Dag Prawitz. *Natural Deduction : A Proof-Theoretical Study*. Dover, 2006.

[52] Joel W. Robbin. *Mathematical logic : a first course*. WA Benjamin New York and Amsterdam, 1969.

[53] Ernest Schimmerling. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 2011.

[54] Maurice Sendak. *Where the wild things are*. Harper & Row, 1963.

[55] Stewart Shapiro. *Foundations without Foundationalism : A Case for Second-Order Logic*. Oxford University Press, 1991.

[56] Alexander Shen and Nikolai K. Vereshchagin. *Basic set theory*. American Mathematical Society, 2002.

[57] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic*, volume 21. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1967.

[58] Raymond M. Smullyan. *This book needs no title : a budget of living paradoxes*. Simon and Schuster, 1986.

[59] Raymond M. Smullyan. *Diagonalization and self-reference*. Clarendon press Oxford, 1994.

[60] Raymond M. Smullyan. *First-order logic*. Courier Dover Publications, 1995.

[61] Raymond M. Smullyan. *To Mock a Mockingbird : and other logic puzzles including an amazing adventure in combinatory logic*. Oxford University Press, 2000.

[62] Raymond M. Smullyan. *Logical labyrinths*. A K Peters Ltd., 2009.

[63] Raymond M. Smullyan. *Alice in puzzle-land : A Carrollian tale for children under eighty*. Courier Dover Publications, 2011.

[64] Raymond M. Smullyan. *What is The Name of This Book ?(The Riddle of Dracula and Other Logic Puzzles)*. Courier Dover Publications, 2011.

[65] Raymond M. Smullyan. *Forever Undecided*. Knopf, 2012.

[66] Raymond M. Smullyan. *Satan, Cantor, And Infinity And Other Mind-Boggling Puzzles*. Random House LLC, 2012.

[67] Gaisi Takeuti. *Proof Theory*. Courier Dover Publications, 2013.

[68] Alfred Tarski. *Introduction à la logique*. Gauthier-Villars, 1969.

[69] George Tourlakis. *Mathematical logic*. John Wiley & Sons, 2011.

[70] Anne S. Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 2000.

[71] Johan van Benthem. *Modal Logic for Open Minds*. Center for the Study of Language and Information, 2010.

[72] Jacques Zahnd. *Logique élémentaire : cours de base pour informaticiens*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998. XII, 430 p. : fig. ; 24 cm + 1 cahier.