Solutions de la série n°8

Solution de l'exercice 1 : Dans ce corrigé, $<$ signifiera l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$. Parmi les sept premiers points, nous ne donnons une réponse que pour deux points, les autres étant similaires.

4. $\omega + \omega + 17$; Nous définissons l'ordre suivant sur $\mathbb{N}$

$$i \prec j \text{ ssi } \begin{cases} i,j > 16 \text{ et } i,j \text{ pairs et } i < j, \text{ ou} \\ i,j > 16 \text{ et } i,j \text{ impairs et } i < j, \text{ ou} \\ i,j > 16 \text{ et } i \text{ impair et } j \text{ pair, ou} \\ i,j \leqslant 16 \text{ et } i < j, \text{ ou} \\ i > 16 \text{ et } j \leqslant 16. \end{cases}$$

6. ω^2 ; En utilisant une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ (voir par exemple Série 1) il suffit de définir un ordre sur $\mathbb{N}^2$. L'ordre lexicographique

$$(i,j) \prec (k,l) \quad \text{ssi} \quad i < k \text{ ou } (i = k \text{ et } j < l)$$

convient.

Pour les cinq points suivants, on utilise une autre technique.

8. Soit $b_{1'} : \mathbb{N} \times \{0,1,2,3\} \to \mathbb{N}$ une bijection. On munit $\mathbb{N} \times \{0,1,2,3\}$ du bon ordre suivant (l'ordre lexicographique) :

$$(i,j) \prec_{1'} (k,l) \text{ ssi } \begin{cases} j < l, \text{ ou} \\ j = l \text{ et } i < k. \end{cases}$$

On munit alors $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$$i \prec_1 j \text{ ssi } b_{1'}^{-1}(i) \prec_{1'} b_{1'}^{-1}(j).$$

9. Soit $b_{2'} : \mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0,1,2,3,4,5,6\} \times \{1\} \to \mathbb{N}$ une bijection. On munit $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0,1,2,3,4,5,6\} \times \{1\}$ du bon ordre suivant :

$$(i,j) \prec_{2'} (k,l) \text{ ssi } \begin{cases} j < l, \text{ ou} \\ j = l = 0 \text{ et } i \prec_1 k, \text{ ou} \\ j = l = 1 \text{ et } i < k. \end{cases}$$

On munit alors $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$$i \prec_2 j \text{ ssi } b_{2'}^{-1}(i) \prec_{2'} b_{2'}^{-1}(j).$$

10. Soit $b_{3'} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ une bijection. On munit $\mathbb{N}^3$ du bon ordre suivant :

$$(i,j,k) \prec_{3'} (l,m,n) \text{ ssi } \begin{cases} k < n, \text{ ou} \\ k = n \text{ et } j < m, \text{ ou} \\ k = n, j = m \text{ et } i < l. \end{cases}$$

On munit alors $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$$i \prec_3 j \text{ ssi } b_{3'}^{-1}(i) \prec_{3'} b_{3'}^{-1}(j).$$

11. Soit $b_{4'} : \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N}$ une bijection. On munit $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ du bon ordre suivant :

$$(i,j) \prec_{4'} (k,l) \text{ ssi } \begin{cases} j < l, \text{ ou} \\ j = l = 0 \text{ et } i \prec_3 k, \text{ ou} \\ j = l = 1 \text{ et } i \prec_2 k. \end{cases}$$

On munit alors $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$$i \prec_4 j \text{ ssi } b_{4'}^{-1}(i) \prec_{4'} b_{4'}^{-1}(j).$$

12. Soit $b_{5'} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ une bijection (Série 1). On munit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ du bon ordre suivant :

$$\alpha \prec_{5'} \beta \text{ ssi } \begin{cases} l(\alpha) < l(\beta), \text{ ou} \\ l(\alpha) = l(\beta) \text{ et } \alpha \prec_{lex.}^{l(\alpha)} \beta, \end{cases}$$

où $l(\alpha)$ désigne la longueur de la suite α, i.e., $\alpha \in \mathbb{N}^{l(\alpha)}$, et $\prec_{lex.}^{k}$ désigne l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^k$. On munit alors $\mathbb{N}$ de l'ordre suivant :

$$i \prec_5 j \text{ ssi } b_{5'}^{-1}(i) \prec_{5'} b_{5'}^{-1}(j).$$

Solution de l'exercice 2 :

1. $3 + \omega = \sup\{3 + n \mid n \in \omega\} = \omega$
2. $\omega + 3$ ne se simplifie pas.
3. $\omega + 15 + \omega + 9 + 3 + \omega = \omega + (15 + \omega) + (12 + \omega) = \omega + \omega + \omega = \omega \cdot (1 + 1 + 1) = \omega \cdot 3$.
4. $\omega \cdot 3$ ne se simplifie pas.
5. $3 \cdot \omega = \sup\{3 \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega$.

6. $(\omega \cdot 3) \cdot (\omega \cdot 5) = \omega \cdot (3 \cdot \omega) \cdot 5 = \omega^2 \cdot 5$.
7. $\omega^2 \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega = \omega^3$.
8. $\omega \cdot \omega^2 = \omega \cdot \omega \cdot \omega = \omega^3$.
9. $(\omega + 3) \cdot 4 = \omega + 3 + \omega + 3 + \omega + 3 + \omega + 3 = \omega \cdot 4 + 3$.
10. $4 \cdot (\omega + 3) = 4 \cdot \omega + 4 \cdot 3 = \omega + 12$
11. $(\omega+3)\cdot\omega = \sup\{(\omega+3)\cdot n \mid n \in \omega\} = \sup\{\omega\cdot n+3 \mid n \in \omega\} = \sup\{\omega\cdot(n+1) \mid n \in \omega\} = \omega^2$, où l'avant dernière égalité, à savoir $\bigcup\{\omega \cdot n + 3 \mid n \in \omega\} = \bigcup\{\omega \cdot (n + 1) \mid n \in \omega\}$, découle du fait que pour tout $n \in \omega$, d'une part $\omega \cdot n + 3 < \omega \cdot (n + 1)$ et donc $\omega \cdot n + 3 \subseteq \omega \cdot (n + 1)$ et d'autre part $\omega \cdot (n + 1) < \omega \cdot (n + 1) + 3$ et donc $\omega \cdot (n + 1) \subseteq \omega \cdot (n + 1) + 3$.
12. $\omega \cdot (\omega + 3) = \omega \cdot \omega + \omega \cdot 3 = \omega^2 + \omega \cdot 3$.
13. $10 \cdot \omega \cdot 7 \cdot 3 \cdot \omega = \omega^2$ par associativité de la multiplication.
14. $\omega^3 \cdot \omega^2 \cdot 9 \cdot \omega + 7 \cdot \omega^4 + 3 \cdot (\omega + 2) = \omega^6 + \omega^4 + \omega + 6$.
15. $2 \cdot \omega^3 \cdot 3 + \omega^6 + (\omega + 3) \cdot 12 = (\omega^3 \cdot 3 + \omega^6) + \omega \cdot 12 + 3 = \omega^6 + \omega \cdot 12 + 3$.

Solution de l'exercice 3 :

1. La relation $<_{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}} = <$ est irréfléxive car $<_A$ et $<_B$ sont irréfléxives et pour tout $(x, i) \in (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ nous avons $(x, i) < (x, i)$ ssi $i = 0$ et $x <_A x$, ou $i = 1$ et $x <_B x$. La relation $<$ est transitive car si $(x, i) < (y, j)$ et $(y, j) < (z, k)$, trois cas se présentent à nous :
   — $i = k = 0$, alors nécessairement $i = j = k = 0$ et par transitivité de $<_A$ nous avons $x <_A z$ et donc $(x, 0) < (z, 0)$;
   — $i = k = 1$, comme ci-avant, par transitivité de $<_B$;
   — $i \neq k$, alors nécessairement $i = 0$ et $k = 1$ et donc $(x, 0) < (z, 1)$ par définition de $<$.

   Finalement, soit $E \subseteq \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ non vide, deux cas se présentent :
   a) si $E \cap A \times \{0\} \neq \varnothing$, alors $\{a \in A \mid (a, 0) \in E\}$ admet un élément minimal a_0 pour $<_A$ et $(a_0, 0)$ est un élément minimal de E pour $<$.
   b) si $E \subseteq B \times \{1\}$, alors $\{b \in B \mid (b, 1) \in E\}$ admet un élément minimal b_0 pour $<_B$ et $(b_0, 1)$ est un élément minimal de E pour $<$.

   La fonction $f : \big(((A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})) \times \{0\}\big) \cup (C \times \{1\}) \to (A \times \{0\}) \cup \big(((B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})) \times \{1\}\big)$ définie par

$$\begin{aligned} ((a,0),0) &\longmapsto (a,0) \\ ((b,1),0) &\longmapsto ((b,0),1) \\ (c,1) &\longmapsto ((c,1),1), \end{aligned}$$

est un isomorphisme de bons ordres.

2. Nous définissons le produit $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ comme l'ensemble $A \times B$ muni de la relation

$$(a, b) <_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}} (a', b') \text{ ssi } \begin{cases} b <_B b', \text{ ou} \\ b = b' \text{ et } a <_A a' \end{cases}$$

Montrer que $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ est un bon ordre. Donner un isomorphisme entre $\mathfrak{A} \otimes (\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C})$ et $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) \oplus (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C})$.

La vérification du fait que $<_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}$ est un ordre strict est routinière. Nous montrons que tout sous-ensemble non vide admet un élément minimal. Soit $E \subseteq A \times B$ non vide. Considérons l'image de E par projection sur B, i.e. l'ensemble $E_B = \{b \in B \mid \text{il existe } a \in A \ (a, b) \in E\}$. Comme B est un bon ordre, E_B, qui est non vide, admet un élément minimal b_0 pour $<_B$. Puisque A est un bon ordre, l'ensemble $\{a \in A \mid (a, b_0) \in E\}$ qui est non vide admet un élément minimal a_0. Il reste à argumenter que le couple (a_0, b_0) est un élément minimal de E.

La fonction $f : A \times \big((B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})\big) \to (A \times B \times \{0\}) \cup (A \times C \times \{1\})$ définie par

$$\begin{aligned} (a, (b, 0)) &\longmapsto ((a, b), 0) \\ (a, (c, 1)) &\longmapsto ((a, c), 1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de bons ordres.

3. Comme au point précédent, la vérification de l'irréflexivité et de la transitivité de la relation $<_S$ est routinière. Pour voir que tout sous-ensemble non vide E de S admet un élément minimal, observons que l'élément $<_A$-minimal a_0 de l'ensemble non vide $\{a \in A \mid \exists b \in B_a \ (b, a) \in E\}$ et l'élément $<_{B_a}$-minimal b_0 de l'ensemble non vide $\{b \in B_a \mid (b, a_0)\}$ forment un couple (b_0, a_0) qui est $<_S$-minimal pour E.

La fonction identité de $B \times A = \bigcup_{a\in A} B \times \{a\}$ est un isomorphisme de bons ordres.