

Solutions de la série n°3

Solution de l'exercice 1 :

1. Par exemple,
 - a) $\varphi_1 : \exists x \exists y \neg x = y$;
 - b) $\varphi_2 : \exists x \forall y x = y$;
 - c) $\varphi_3 : \exists x \exists y (\neg x = y \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ définissons la formule

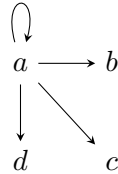
$$\psi_n = \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \neg x_i = x_j \right).$$

Il suffit alors de poser $T = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3. Non, $\{\varphi_1\} \not\models \varphi_3$ car la $\mathcal{L}$ -structure $3 = \langle \{0, 1, 2\} \rangle$ est telle que $3 \models \varphi_1$ mais $3 \not\models \varphi_3$.
 Oui, $\{\neg \varphi_1\} \models \varphi_3$ car toute $\mathcal{L}$ -structure qui n'a pas au moins deux éléments n'en possède qu'un seul et donc satisfait φ_2 .
4. La relation $T \models \varphi_i$ n'est vérifiée que lorsque $i = 1$.

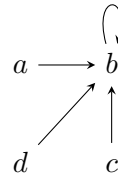
Solution de l'exercice 2 :

1. Par exemple, la $\mathcal{L}$ -structure donnée par



satisfait $\exists x \forall y R(x, y)$, mais ne satisfait pas $\forall x \exists y R(x, y)$;

2. Par exemple, la $\mathcal{L}$ -structure donnée par



satisfait $\exists x \forall y \neg R(y, x)$ (considérer a), mais ne satisfait pas $\forall x \neg \forall y R(y, x)$ (considérer b).

3. Nous pouvons par exemple considérer les formules suivantes

$$\begin{aligned}\varphi_1 &: \forall x R(x, x) \\ \varphi_2 &: \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)) \\ \varphi_3 &: \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \\ \varphi_4 &: \exists x \forall y R(x, y)\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 :

1. Par exemple, $\psi_{<}(x, y) : \exists z (\neg z \simeq \underline{0} \wedge y \simeq (x \underline{+} z))$.
2. Par exemple,

$$\psi_{\text{prime}}(x) : \left(\psi_{<}(\underline{1}, x) \wedge \neg \exists y \exists z ((x \simeq (y \underline{-} z)) \wedge \neg (y \simeq \underline{1}) \wedge \neg (z \simeq \underline{1})) \right).$$

3. Par exemple,

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{Goldbach}} &: \forall x \left(\exists y (\psi_{<}(\underline{1}, y) \wedge x \simeq (\underline{1} \underline{+} \underline{1}) \underline{-} y) \rightarrow \right. \\ &\quad \left. \exists z_1 \exists z_2 (\psi_{\text{prime}}(z_1) \wedge \psi_{\text{prime}}(z_2) \wedge x \simeq z_1 \underline{+} z_2) \right).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 :

1. a) Considérons le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ contenant
 - deux symboles de constante 0 et p ,
 - un symbole de relation binaire R ,
 - un symbole de fonction unaire **Vabs**,
 - un symbole de fonction unaire f ,
 - un symbole de fonction binaire **Soustr**.

Dans ce langage du premier ordre, nous pouvons écrire la formule

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{CP}} &: \forall x \left(R(0, x) \rightarrow \exists y \left(R(0, y) \wedge \forall z \left(R(\text{Vabs}(\text{Soustr}(p, z)), y) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \rightarrow R(\text{Vabs}(\text{Soustr}(f(p), f(z))), x) \right) \right) \right)\end{aligned}$$

qui est une façon d'écrire la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point $p \in \mathbb{R}$, généralement écrite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|p - x| < \delta \rightarrow |f(p) - f(x)| < \varepsilon)$$

lorsque le champ des quantificateurs est sous-entendu.

- b) Soit, par exemple, la $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}_1$ avec $|\mathcal{M}_1| = \mathbb{R}$ où l'on fait les interprétations $0^{\mathcal{M}_1} = 0$, $p^{\mathcal{M}_1} = \frac{\pi}{2}$, $R^{\mathcal{M}_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$, $\text{Vabs}^{\mathcal{M}_1}$ est la valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{\mathcal{M}_1}(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\text{Soustr}^{\mathcal{M}_1}$ est la soustraction usuelle $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Alors, on $\mathcal{M}_1 \models \varphi_{\text{CP}}$.
 - c) Soit, par exemple, la $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}_2$ avec $|\mathcal{M}_2| = \mathbb{N}$ où l'on fait les interprétations $0^{\mathcal{M}_2} = 0$, $p^{\mathcal{M}_2} = 10^5$, $R^{\mathcal{M}_2} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$, $\text{Vabs}^{\mathcal{M}_2}$ est l'identité sur $\mathbb{N}$, $f^{\mathcal{M}_2}(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\text{Soustr}^{\mathcal{M}_2}$ est la fonction constante égale à 0. Alors, on $\mathcal{M}_2 \models \varphi_{\text{CP}}$.
2. a) Nous pouvons considérer la formule

$$\begin{aligned} \varphi_C : \forall z_1 \forall x \Big(R(0, x) \rightarrow \exists y \Big(R(0, y) \wedge \forall z_2 (R(\text{Vabs}(\text{Soustr}(z_1, z_2))), y) \\ \rightarrow R(\text{Vabs}(\text{Soustr}(f(z_1), f(z_2)))), x) \Big) \Big). \end{aligned}$$

- b) Pour les $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ définies au point précédent, nous avons $\mathcal{M}_1 \models \varphi_C$ et $\mathcal{M}_2 \models \varphi_C$.

Solution de l'exercice 5 :

1. Considérer par exemple les formules suivantes
 - a) $\varphi_1 : (\forall x f(f(x)) = g(x) \wedge \exists y \forall x g(x) = y)$.
 - b) $\varphi_2 : \forall x \exists y f(x) = g(y)$.
 - c) $\varphi_3 : \exists x \Big((f(x) = x \wedge \forall y (f(y) = y \rightarrow x = y)) \wedge \exists y g(y) = x \Big)$.
 - d) $\varphi_4 : (\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \forall y \exists x (g(x) = y))$.
2. Nous choisissons pour domaine de chacune des $\mathcal{L}$ -structures l'ensemble $\mathbb{N}$ et nous interprétons les symboles de fonction unaire f et g comme suit :
 - a) $f^{\mathcal{M}_1} = g^{\mathcal{M}_1} : n \mapsto n + 1$;
 - b) $f^{\mathcal{M}_2} : n \mapsto n + 1$ et $g^{\mathcal{M}_2} = \text{id}_{\mathbb{N}}$;
 - c) $f^{\mathcal{M}_3} = \text{id}_{\mathbb{N}}$ et $g^{\mathcal{M}_3} : n \mapsto 0$;
 - d) $f^{\mathcal{M}_4} : n \mapsto 2n$ et $g^{\mathcal{M}_4} : n \mapsto n^2$;

$$e) \quad f^{\mathcal{M}_5} : n \mapsto 2n \text{ et } g^{\mathcal{M}_5} : n \mapsto 2n + 1.$$

Solution de l'exercice 6 :

1. $\mathcal{M} \not\models \phi_1$, car $\mathcal{M} \models R(\emptyset, \emptyset)$;
2. $\mathcal{M} \models \phi_2$ car pour tout $E \subseteq \mathbb{N}$ si $E \neq \emptyset$ alors $\neg R(E, E)$;
3. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge I(x, z) \wedge I(z, y)) \rightarrow \Omega(z))$, car si $E, F, E^c, F^c \subseteq \mathbb{N}$ sont infinis et $E \subseteq G \subseteq F$, alors d'une part $E \subseteq G$ implique G infini, et d'autre part, $G \subseteq F$ implique $F^c \subseteq G^c$ et donc G^c est infini.
4. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge \Omega(z) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$. En effet, si $E \subseteq F \subseteq G$ et $F \setminus E$ infini et $G \setminus F$ infini, alors $E \subseteq G$ et comme $G \setminus F \subseteq G \setminus E$, $G \setminus E$ est infini.
5. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y ((\Omega(x) \wedge \Omega(y)) \rightarrow (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, x)))$. Car de façon générale, si $E, F \subseteq \mathbb{N}$ sont non vides alors $R(E, F)$ implique $\neg R(F, E)$.
6. $\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y ((\Omega(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow \Omega(y))$. Penser à l'inclusion des nombres pairs dans les nombres naturels.
7. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y ((\Omega(x) \wedge R(y, x)) \rightarrow \Omega(y))$. En effet, soit $E, F \subseteq \mathbb{N}$ avec F et F^c infinis, et $E \subseteq F$, et $\text{Card}(F \setminus E) = \text{Card}(E)$. Comme $F^c \subseteq E^c$, E^c est infini. De plus, supposons E est fini, alors $F \setminus E$ est fini et donc $F = E \cup F \setminus E$ est fini, ce qui est une contradiction puisque F est infini. Donc E est infini.
8. $\mathcal{M} \not\models \forall x \exists y \exists z (R(y, x) \wedge R(x, z))$, car pour tout $E \subseteq \mathbb{N}$ fini non vide de cardinalité impaire, nous avons que pour tout $F \subseteq \mathbb{N}$, $\neg R(F, E)$.