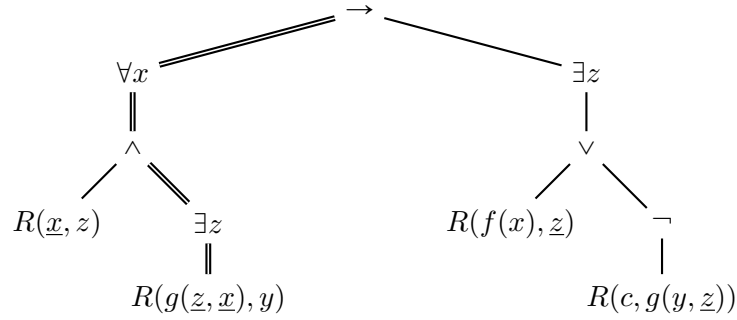


Solutions de la série n°2

Solution de l'exercice 1 : L'arbre de décomposition de φ est le suivant. Une branche de longueur maximale est indiquée par les doubles lignes. Les occurrences liées des variables de φ sont soulignées.



Afin d'effectuer les substitutions demandées, nous commençons par substituer aux occurrences liées des variables de φ des variables n'apparaissant pas dans le terme u :

$$\varphi = \left(\forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

Nous pouvons alors substituer le terme u :

$$\varphi_{[u/x]} : \left(\forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \right. \\ \left. \exists z_1 (R(f(g(f(x), g(z, c))), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

$$\varphi_{[u/y]} : \left(\forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), g(f(x), g(z, c)))) \rightarrow \right. \\ \left. \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(g(f(x), g(z, c)), z_1))) \right)$$

$$\varphi_{[u/z]} : \left(\forall x_1 (R(x_1, g(f(x), g(z, c))) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \right. \\ \left. \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

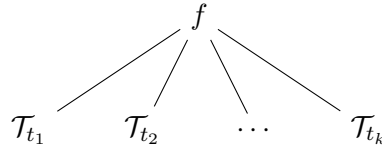
Solution de l'exercice 2 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. On définit pour tout terme t de $\mathcal{L}$ l'arbre de décomposition $\mathcal{T}_t$ de t par induction sur la hauteur de t de sorte que la hauteur de t égale la longueur de la plus longue branche de son arbre de décomposition.

- si t est de hauteur nulle, alors t est une variable ou une constante. Nous définissons $\mathcal{T}_t$ par

$$t$$

La longueur de la plus longue branche est bien nulle comme la hauteur de t .

- si t est de hauteur $n > 0$, alors il existe un naturel k , il existe un symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité k et il existe des termes $t_1, \dots, t_k$ de hauteur respectivement $h_1, \dots, h_k < n$ de sorte que $t = f(t_1, \dots, t_k)$ (par définition d'un terme de hauteur $k > 0$). Nous définissons alors $\mathcal{T}_t$ par



Par hypothèse d'induction, nous avons que la hauteur de t_i égale la longueur de la plus longue branche de $\mathcal{T}_{t_i}$ et ceci pour chaque $i = 1, \dots, k$. Il s'ensuit que la hauteur de t qui égale $1 + \max\{h_i \mid i = 1, \dots, k\}$ est égale à la plus longue branche de $\mathcal{T}_t$.

Solution de l'exercice 3 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Notons P le sous-ensemble de $\mathcal{L}^{<\omega}$ des mots sur $\mathcal{L}$ possédant autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.

Nous commençons par montrer par induction sur la hauteur des termes, que l'ensemble des termes de $\mathcal{L}$ est inclus dans P . Si t est un terme de hauteur nulle, alors t ne contient pas de parenthèses. Si t est de hauteur non nulle, alors il existe un naturel n , un symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité n , et $t_1, \dots, t_n$ des termes de hauteur strictement inférieure à la hauteur de t avec $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Par hypothèse d'induction, $t_1, \dots, t_n \in P$ et donc $t \in P$.

Nous montrons maintenant par induction sur la hauteur d'une formule, que l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$ est inclus dans P . Si φ est de hauteur nulle, alors il existe un naturel n , un symbole de relation $R \in \mathcal{L}$ d'arité n , et $t_1, \dots, t_n$ des termes de $\mathcal{L}$ avec $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$. Par ce qui précède, $t_1, \dots, t_n \in P$. Il en

découle que $\varphi \in P$. Si φ est de hauteur non nulle h , alors nous sommes dans l'un des trois cas suivants :

- $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$ avec $\star \in \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ et ψ_1, ψ_2 des formules de hauteur strictement inférieure à h . Par hypothèse d'induction, $\psi_1, \psi_2 \in P$ et donc $\varphi \in P$.
- $\varphi = \neg\psi$ avec ψ de hauteur strictement inférieure à h . Alors, par hypothèse d'induction $\psi \in P$.
- $\varphi = Qx\psi$ avec ψ de hauteur strictement inférieure à h . Alors, par hypothèse d'induction $\psi \in P$.

Solution de l'exercice 4 : Dans les notations de la Série 1, nous avons $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^{<\omega}$. Ainsi, par les résultats de la Série 1 il s'ensuit qu'il existe une injection de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{L}$ est un langage égalitaire, il contient le symbole d'égalité $=$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous avons la formule suivante

$$\varphi_n = \underbrace{\exists x \cdots \exists x}_{n+1 \text{ fois}}(x = x) \in \mathcal{F}.$$

L'application $n \mapsto \varphi_n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$. On conclut par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

Solution de l'exercice 5 :

1. Notons $[r]$ la partie entière d'un nombre réel r . L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{Z} \times [0, 1[$ via $r \mapsto ([r], r - [r])$. De plus, nous avons vu dans la série 1 que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times (\mathbb{Z} \times [0, 1]) \cong (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \times [0, 1] \cong \mathbb{Z} \times [0, 1] \cong \mathbb{R}.$$

2. Supposons par l'absurde que $n \mapsto x_n$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $2^{\mathbb{N}}$. Définissons alors la suite diagonale $y \in 2^{\mathbb{N}}$ par $y(n) = 1 - x_n(n)$. Nous avons alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ que $y \neq x_n$ et donc l'application $n \mapsto x_n$ n'est pas surjective contrairement à l'hypothèse.