

Solutions de la série n°1

Solution de l'exercice 1 : Voici des bijections parmi d'autres qui établissent l'équipotence des ensembles proposés.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$: On peut considérer la fonction

$$f_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \longmapsto n + \sum_{i=0}^{m+n} i = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

dont l'inverse est donné par

$$g_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$n \longmapsto \left(\mu(n) - \left(n - \frac{\mu(n)(\mu(n)+1)}{2} \right), n - \frac{\mu(n)(\mu(n)+1)}{2} \right)$$

où $\mu(n) = \max\{i \leq n \mid \frac{i(i+1)}{2} \leq n\}$.

2. $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$: La fonction

$$f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

a pour inverse la fonction

$$g_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} t & \text{si } n = 2t \\ -t & \text{si } n = 2t - 1. \end{cases}$$

3. $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$: Observons tout d'abord que $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, car on peut prendre la fonction $n \mapsto n + 1$. Ensuite, on a que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \cong \mathbb{N}$ en prenant la fonction $f_3(z, n) = f_0(f_1(z), n-1)$ pour tout $(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$, notons son inverse $h(n) = (h^1(n), h^2(n))$. Observons aussi que la fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ vers $\mathbb{Q}$ qui envoie (z, n) sur $\frac{z}{n}$ est une surjection, mais qu'elle n'est pas injective. On définit donc par induction la fonction de $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ par

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(n+1) = \frac{h^1(\mu(n))}{h^2(\mu(n))}$$

où $\mu(n) = \min\{k \mid \frac{h^1(k)}{h^2(k)} \neq \psi(i) \text{ pour tout } i \leq n\}$. Il reste à montrer que ψ est bien définie et surjective, le premier point découle du fait que $\mathbb{Q}$ est infini et le second de la surjectivité de $(z, n) \mapsto \frac{z}{n}$. La fonction ψ est injective par définition.

Solution de l'exercice 2 : On montre à l'aide du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein que les ensembles suivants sont équipotents à $\mathbb{N}$:

1. $\{0, 1\}^{<\omega}$: On a d'une part une injection

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\longrightarrow \{0, 1\}^{<\omega} \\ n &\longmapsto \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ fois}}, \end{aligned}$$

et d'autre part une injection

$$\begin{aligned} j : \{0, 1\}^{<\omega} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (s_0, s_1, \dots, s_n) &\longmapsto 10^{n+1} + \sum_{i=0}^n s_i \cdot 10^{n-i}, \end{aligned}$$

il s'ensuit du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein que $\mathbb{N}$ et $\{0, 1\}^{<\omega}$ sont équipotents.

2. $\mathbb{N}^{<\omega}$: Nous montrons que $\mathbb{N}^{<\omega}$ et $\{0, 1\}^{<\omega}$ sont équipotents, il s'ensuivra que $\mathbb{N}^{<\omega}$ est équipotent à $\mathbb{N}$. D'une part, $\{0, 1\}^{<\omega}$ est inclus dans $\mathbb{N}^{<\omega}$. D'autre part, nous pouvons par exemple considérer l'injection

$$\begin{aligned} j : \mathbb{N}^{<\omega} &\longrightarrow \{0, 1\}^{<\omega} \\ (n_0, n_1, \dots, n_k) &\longmapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_0 \text{ fois}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_1 \text{ fois}}, 1, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_k \text{ fois}}, 1). \end{aligned}$$

3. $A^{<\omega}$, avec A un ensemble dénombrable non vide : Pour $a \in A$ nous pouvons d'une part considérer l'injection $n \mapsto \underbrace{a, \dots, a}_{n \text{ fois}}$. D'autre part, comme A est dénombrable, il existe une injection $i : A \rightarrow \mathbb{N}$ et nous pouvons définir

$$\begin{aligned} j : A^{<\omega} &\longrightarrow \mathbb{N}^{<\omega} \\ (a_0, \dots, a_k) &\longmapsto (i(a_0), \dots, i(a_k)). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 :

1. Soit $\{A_i \mid i \in I\}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. Il existe donc une injection $j : I \rightarrow \mathbb{N}$. De plus, pour tout $i \in I$ notons $\mathcal{J}_i = \{f : A_i \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ est une fonction injective}\}$. Par hypothèse, chaque $\mathcal{J}_i$ est non vide. Par l'axiome du choix dénombrable, il existe une fonction $\gamma : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{J}_i$ telle que pour tout $i \in I$, $\gamma_i = \gamma(i) \in \mathcal{J}_i$, i.e. $\gamma_i : A_i \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction injective. Nous définissons alors la fonction suivante

$$\begin{aligned} \psi : \bigcup_{i \in I} A_i &\longrightarrow \mathbb{N} \\ a &\longmapsto f(j(i_a), \gamma_{i_a}(a)) \end{aligned}$$

où $i_a = j^{-1}(\min\{j(i) \mid a \in A_i\})$ et où f est une injection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (par exemple $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$). Il reste à argumenter (facile) que ψ est injective.

2. Puisque A est dénombrable et que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est dénombrable. Il découle alors du point précédent que $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ est dénombrable.

Solution de l'exercice 4 : Puisque A est infini, il existe une injection $j : \mathbb{N} \rightarrow A$. Notons $C = j(\mathbb{N})$ le sous-ensemble de A équipotent à $\mathbb{N}$ par le truchement de j . Puisque B est dénombrable par hypothèse et C est infini dénombrable, leur union est infinie dénombrable, i.e. équipotente à $\mathbb{N}$. Il existe donc une bijection $\varphi : C \cup B \rightarrow \mathbb{N}$. On définit alors simplement la bijection suivante :

$$\begin{aligned} \psi : A \cup B &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in C \cup B \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 :

1. Posons $S = \{X \subseteq E \mid X \subseteq G(X)\}$ et montrons que $M = \bigcup_{X \in S} X$ satisfait $G(M) = M$. Premièrement, pour tout $X \in S$, comme $X \subseteq M$, nous avons $G(X) \subseteq G(M)$ car G est monotone. Par conséquent,

$$M = \bigcup_{X \in S} X \subseteq \bigcup_{X \in S} G(X) \subseteq G(M).$$

Ainsi, $M \subseteq G(M)$. Deuxièmement, $M \subseteq G(M)$ implique $G(M) \subseteq G(G(M))$ et donc $G(M) \in S$. Il s'ensuit que $G(M) \subseteq M$. Nous avons donc obtenu que $G(M) = M$.

2. Considérons la fonction $G : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ définie par

$$G(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$$

pour tout $X \subseteq A$. Cette fonction est monotone pour l'inclusion. En effet, si pour $X, Y \subseteq A$ nous avons $X \subseteq Y$, alors $f(X) \subseteq f(Y)$ et donc $B \setminus f(Y) \subseteq B \setminus f(X)$. Il s'ensuit que $g(B \setminus f(Y)) \subseteq g(B \setminus f(X))$ et donc finalement

$$A \setminus g(B \setminus f(X)) \subseteq A \setminus g(B \setminus f(Y)).$$

Le point précédent s'applique donc et nous assure l'existence d'un $M \subseteq A$ tel que $A \setminus g(B \setminus f(M)) = M$. En particulier, nous avons pour tout $a \in A$ que $a \notin M$ ssi $a \in g(B \setminus f(M))$. Il reste alors à vérifier (facile) que l'application $\psi : A \longrightarrow B$ définie par

$$\psi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in M \\ g^{-1}(a) & \text{si } a \in g(B \setminus f(M)) \end{cases}$$

est bien définie et bijective.