

## Solutions de la série n°13

### Solution de l'exercice 1 :

1.
  - a)  $\alpha \Vdash \forall x P(x)$  : Non car  $\alpha \nVdash P(a)$ .
  - b)  $\alpha \Vdash \neg \forall x P(x)$  : Oui, car  $\beta \nVdash P(b)$  et donc  $\beta \nVdash \forall x P(x)$  et par le point précédent  $\alpha \Vdash \forall x P(x)$ .
  - c)  $\beta \Vdash \neg P(b)$  : Oui car  $\beta \nVdash P(b)$  et  $\beta$  est maximal.
  - d)  $\beta \Vdash \exists x \neg P(x)$  : Oui, car comme on vient de le voir,  $\beta \Vdash \neg P(b)$ .
  - e)  $\alpha \Vdash \neg P(a)$  : Non, car  $\beta \geq \alpha$  et  $\beta \Vdash P(a)$ .
  - f)  $\alpha \Vdash \exists x \neg P(x)$  : Non, car  $a$  est le seul membre du domaine du monde  $\alpha$  or, comme on vient de le voir,  $\alpha \nVdash \neg P(a)$ .
  - g)  $\beta \Vdash \forall x P(x)$  : Non, car  $\beta \nVdash P(b)$ .
  - h)  $\alpha \Vdash (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))$  : Non, car par (b)  $\alpha \Vdash \neg \forall x P(x)$  or, par (f)  $\alpha \nVdash \exists x \neg P(x)$ .
- $\mathcal{K} \models_i (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))$  : Non, car on vient de voir que  $\alpha$  ne force pas cette formule. On remarquera toutefois que cette formule est universellement valide en logique classique.
2.
  - a)  $\mathcal{K} \models_i \exists x P(x)$  : Non, car  $0 \nVdash P(0)$  et  $0$  est le seul membre du monde  $0$  donc  $0 \nVdash \exists x P(x)$ .
  - b)  $\mathcal{K} \models_i \neg \exists x P(x)$  : Non, car  $1 \Vdash P(0)$  et donc  $1 \Vdash \exists x P(x)$  et ainsi  $1 \nVdash \neg \exists x P(x)$ . En fait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  nous avons  $n \nVdash \neg \exists x P(x)$ .
  - c)  $\mathcal{K} \models_i \exists x \neg P(x)$  : Non, car  $1 \Vdash P(0)$  donc  $0 \nVdash \neg P(0)$  et ainsi  $0 \nVdash \exists x \neg P(x)$ .
  - d)  $\mathcal{K} \models_i \exists x \neg (P(x) \vee \neg P(x))$  : Non, car  $1 \Vdash P(0)$  donc  $1 \Vdash (P(0) \vee \neg P(0))$  et ainsi  $0 \nVdash \neg (P(0) \vee \neg P(0))$ . Or  $0$  est le seul membre du domaine du monde  $0$ , par conséquent  $0 \nVdash \exists x \neg (P(x) \vee \neg P(x))$ .
  - e)  $\mathcal{K} \models_i \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  : Oui, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  nous avons  $n \nVdash P(n)$  et  $n \nVdash \neg P(n)$  (car  $n+1 \Vdash P(n)$ ) et donc  $n \nVdash P(n) \vee \neg P(n)$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \nVdash \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  et donc  $n \Vdash \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalement  $\neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \not\models_i \exists x \neg (P(x) \vee \neg P(x))$ . En effet, le modèle de Kripke de la logique intuitionniste  $\mathcal{K}$  ci-dessus est tel que  $\mathcal{K} \models_i \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  et  $\mathcal{K} \models_i \exists x \neg (P(x) \vee \neg P(x))$ . Nous avons donc que  $\neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \models_i \exists x \neg (P(x) \vee \neg P(x))$  et l'assertion découle alors du théorème de complétude pour la logique intuitionniste.

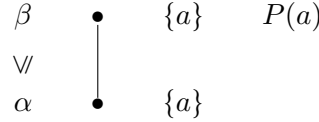
**Solution de l'exercice 2 :**

1. La déduction ci-contre en calcul des séquents ne fait intervenir que des séquents ayant au plus une formule à droite et témoigne ainsi du fait que  $\vdash_i (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\varphi \vdash \varphi} \text{ax} \\
 \frac{}{\varphi, \neg\varphi \vdash} \neg_g \\
 \frac{}{(\varphi \wedge \neg\varphi), \neg\varphi \vdash} \wedge_{g1} \\
 \frac{}{(\varphi \wedge \neg\varphi), (\varphi \wedge \neg\varphi) \vdash} \wedge_{g2} \\
 \frac{}{(\varphi \wedge \neg\varphi) \vdash} \text{contr g} \\
 \frac{}{(\varphi \wedge \neg\varphi) \vdash \psi} \text{aff d} \\
 \frac{}{\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi} \rightarrow d
 \end{array}$$

Pour montrer que le séquent considéré n'est pas prouvable en logique minimale, on exhibe un modèle de Kripke de la logique minimale qui ne satisfait pas la formule  $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ . On considère le langage comportant deux symboles de relation unaire  $P$  et  $Q$  ainsi qu'un symbole de constante  $c$ . Soit  $\mathcal{K}$  le modèle constitué d'un seul monde  $\alpha$  dont le domaine est le singleton  $\{a\}$  avec  $c^\alpha = a$ ,  $P^\alpha = \{a\}$ ,  $Q^\alpha = \emptyset$  et  $\alpha \Vdash \perp$ . Nous avons  $\alpha \Vdash P(a) \rightarrow \perp$ , donc  $\alpha \Vdash \neg P(a)$  et ainsi  $\alpha \Vdash P(c) \wedge \neg P(c)$ . Cependant  $\alpha \nVdash Q(c)$  par conséquent  $\alpha \nVdash (P(c) \wedge \neg P(c)) \rightarrow Q(c)$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{K} \nVdash_m (P(c) \wedge \neg P(c)) \rightarrow Q(c)$  et par le théorème de complétude pour la logique minimale nous avons  $\nVdash_m (P(c) \wedge \neg P(c)) \rightarrow Q(c)$ .

2. a) Pour le modèle de Kripke de la logique intuitionniste  $\mathcal{K}$  ci-dessous, nous avons d'une part que  $\alpha, \beta \nVdash \neg P(a)$  et donc  $\alpha \Vdash \neg\neg P(a)$  et d'autre part que  $\alpha \nVdash P(a)$ . Par conséquent,  $\alpha \nVdash \forall x(\neg\neg Px \rightarrow Px)$  et  $\mathcal{K} \nVdash_i \forall x(\neg\neg Px \rightarrow Px)$ . On conclut par le théorème de complétude de la logique intuitionniste que  $\nVdash_i \forall x(\neg\neg Px \rightarrow Px)$



Cependant, en voici une déduction en calcul des séquents (sans restriction sur les règles) :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{Px \vdash Px} \text{ax} \\
 \frac{}{\vdash \neg Px, Px} \neg_d \\
 \frac{}{\neg\neg Px \vdash Px} \neg_g \\
 \frac{}{\vdash (\neg\neg Px \rightarrow Px)} \rightarrow d \\
 \frac{}{\vdash \forall x(\neg\neg Px \rightarrow Px)} \forall d
 \end{array}$$

qui nous assure que  $\vdash_c \forall x(\neg\neg Px \rightarrow Px)$ .

- b) La formule  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(x)))$  est universellement valide en logique classique comme le montre la déduction suivante en calcul des séquents.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{Px \vdash Px} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash Px, \neg Px} \neg d \quad \frac{}{Qx \vdash Qx} \text{ ax} \\
 \frac{}{(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Px, Qx} \rightarrow g \\
 \frac{}{(Px \rightarrow Qx) \vdash (\neg Px \vee Qx), (\neg Px \vee Qx)} \vee d1, \vee d2 \\
 \frac{}{(Px \rightarrow Qx) \vdash (\neg Px \vee Qx)} \text{ctr}_d \\
 \frac{}{\vdash ((Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\neg Px \vee Qx))} \rightarrow d \\
 \frac{}{\vdash \forall x((Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\neg Px \vee Qx))} \forall d
 \end{array}$$

Toutefois, cette formule n'est pas démontrable sans hypothèses en logique intuitionniste. Pour voir cela, par le théorème de complétude de la logique intuitionniste, il suffit d'exhiber un modèle de Kripke de la logique intuitionniste qui ne satisfait pas cette formule. On peut par exemple prendre le modèle suivant.

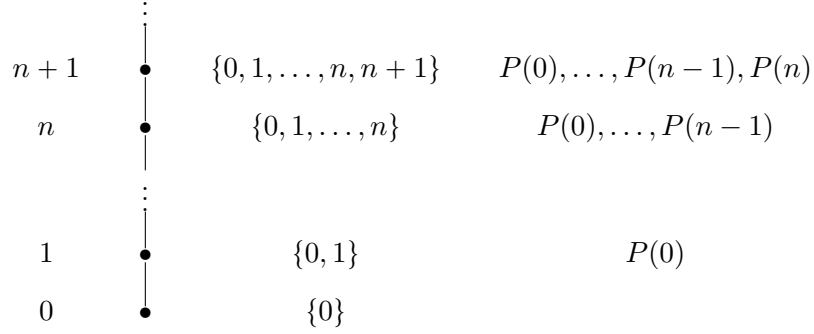
$$\begin{array}{ccc}
 \beta & \bullet & \{a\} \quad P(a), Q(a) \\
 \vee/ & \downarrow & \\
 \alpha & \bullet & \{a\}
 \end{array}$$

En effet, dans ce modèle, d'une part  $\alpha \not\models P(a)$  et d'autre part  $\beta \models P(a)$  et  $\beta \models Q(a)$ . Ainsi,  $\alpha \models P(a) \rightarrow Q(a)$ . Par ailleurs,  $\alpha \not\models Q(a)$  et  $\alpha \not\models \neg P(a)$  (car  $\beta \geq \alpha$  et  $\beta \models P(a)$ ) et donc  $\alpha \not\models \neg P(a) \vee Q(a)$ . Par conséquent,  $\alpha \not\models \forall x((Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\neg Px \vee Qx))$  et le modèle ne satisfait pas cette formule.

- c) La déduction en calcul des séquents :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{Px \vdash Px} \text{ ax} \\
 \frac{}{\vdash \neg Px, Px} \neg d \\
 \frac{}{\neg \neg Px \vdash Px} \neg g \\
 \frac{}{\forall x \neg \neg Px \vdash Px} \forall g \\
 \frac{}{\forall x \neg \neg Px \vdash \forall x Px} \forall d \\
 \frac{}{\forall x \neg \neg Px, \neg \forall x Px \vdash} \neg g \\
 \frac{}{\forall x \neg \neg Px \vdash \neg \neg \forall x Px} \neg d \\
 \frac{}{\vdash (\forall x \neg \neg Px \rightarrow \neg \neg \forall x Px)} \rightarrow d
 \end{array}$$

Et le contre-modèle de Kripke de la logique intuitionniste :  $\mathcal{K} = \langle \mathbb{N}, \leq, \mathcal{D}_n = \{0, \dots, n\}, \models = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n, P(k)) : k < n\} \rangle$  que l'on peut représenter comme suit.



On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \not\models \forall x \neg \neg P(x) \rightarrow \neg \neg \forall x P(x)$ .

Tout d'abord, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq i < n$ ,  $n \models P(i)$ , et donc  $n \not\models \neg P(i)$ . Comme  $n + 1 \models P(n)$ , on obtient  $n \not\models \neg P(n)$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n \models \forall x \neg \neg P(x)$ .

D'autre part, comme  $n \not\models P(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a également  $n \not\models \forall x P(x)$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \models \neg \forall x P(x)$ . Ce qui implique que  $n \not\models \neg \neg \forall x P(x)$ .

Ainsi, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \not\models \forall x \neg \neg P(x) \rightarrow \neg \neg \forall x P(x)$ , et donc le modèle ne satisfait pas cette formule.

### Solution de l'exercice 3 :

1. La règle de l'absurdité intuitionniste en déduction naturelle correspond à la règle d'affaiblissement droit en calcul des séquents. La règle de l'absurdité classique s'obtient comme suit en calcul des séquents.

$$\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{\text{ax}}}{\vdash \varphi, \neg \varphi}^{\neg_d} \quad \Gamma, \neg \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}^{\text{cut}}$$

2. La règle de coupure (sous la forme proposée) est dérivable en déduction naturelle comme suit.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \frac{\Gamma', \varphi \vdash \psi'}{\Gamma', \varphi \vdash \psi \vee \psi'}^{\vee_{id}} \quad \frac{\overline{\psi \vdash \psi}^{\text{ax}}}{\psi \vdash \psi \vee \psi'}^{\vee_{ig}}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi \vee \psi'}^{\vee_e}$$