

Solutions de la série n°12

Solution de l'exercice 1 :

1.

$$\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{ax}}{\vdash \neg \varphi, \varphi} \neg_d}{\vdash \varphi \vee \neg \varphi} \text{ctr}_d + \vee_{d_1} + \vee_{d_2}$$

2.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{ax}}{\varphi, \psi \vdash \varphi} \text{aff}_g}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi} \rightarrow_d}{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \rightarrow_d$$

3.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\psi \vdash \psi}^{ax}}{\varphi, \psi \vdash \psi} \text{aff}_g}{\varphi \vdash \neg \psi, \psi} \neg_d \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{ax}}{\varphi \vdash \varphi, \psi} \text{aff}_d}{\varphi, \neg \varphi \vdash \psi} \neg_g}{\frac{\varphi, \neg \psi \rightarrow \neg \varphi \vdash \psi}{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_d} \rightarrow_g$$

4.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\psi \vdash \psi}^{ax}}{\varphi, \psi \vdash \psi} \text{aff}_g \quad \frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{ax}}{\varphi, \psi \vdash \varphi} \text{aff}_g}{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge_d}{\frac{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash}{\varphi, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg \psi} \neg_g}{\frac{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg \varphi, \neg \psi}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg \varphi \vee \neg \psi} \neg_d} \neg_d$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg \varphi \vee \neg \psi}{\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)} \text{ctr}_d + \vee_{d_1} + \vee_{d_2}$$

5.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi}^{ax}}{\vdash \neg \varphi, \varphi} \neg_d}{\neg \neg \varphi \vdash \varphi} \neg_g}{\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow_d$$

$$\frac{\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi}{\neg(\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi) \vdash} \neg_g$$

$$\frac{\neg(\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi) \vdash}{\vdash \neg \neg(\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi)} \neg_d$$

La preuve 2. est faite en logique minimale et les preuves 1., 3., 4. et 5. sont faites en logique classique. Nous précisons qu'il existe une autre preuve pour 5. en logique intuitionniste.

Solution de l'exercice 2 :

1. a) $\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$; e) $\varphi_5 : \forall x (f(x) = x)$.
b) $\varphi_2 : \forall x \neg Rxx$; f) $\varphi_6 : \forall x Rxf(x)$.
c) $\varphi_3 : \exists x \forall y \neg Ryx$; g) $\varphi_7 : \forall x Rxx$.
d) $\varphi_4 : \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$.
2. a) Voici une déduction dans le système de déduction naturelle du séquent proposé, où $\phi = \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\varphi_1 \vdash \varphi_1}{\varphi_1 \vdash \phi} \forall e}{\varphi_1 \vdash \exists x \phi} \exists i \quad \frac{\frac{\phi \vdash \phi}{\phi_{[z/x]} \vdash ((Ruv \wedge Rvu) \rightarrow Ruu)} \forall e \quad 2x}{\varphi_1 \vdash ((Ruv \wedge Rvu) \rightarrow Ruu)} \exists e \quad \frac{\frac{Ruv \vdash Ruv}{Ruv, Rvu \vdash Ruv \wedge Rvu} \wedge i}{\frac{Ruv \vdash Ruv}{Ruv, Rvu \vdash Ruv \wedge Rvu} \rightarrow e} \rightarrow e \\
\frac{\frac{\varphi_2 \vdash \varphi_2}{\varphi_2 \vdash \neg Ruu} \forall i}{\varphi_1, Ruv, Rvu \vdash Ruu} \neg e \\
\frac{\frac{\frac{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx, Ruv, Rvu \vdash \perp}{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx, Ruv \vdash \neg Rvu} \neg i}{\frac{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash Ruv \rightarrow \neg Rvu}{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)} \forall i \quad 2x} \rightarrow i \\
\frac{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)}{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)} \forall i \quad 2x
\end{array}$$

- b) Non $\varphi_1, \varphi_2 \not\vdash_c \varphi_3$. Par le théorème de complétude, il suffit de montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$ -structure qui satisfait φ_1 et φ_2 mais pas φ_3 . Car dans ce cas $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$ et par le théorème de complétude nous avons le résultat souhaité. La $\mathcal{L}$ -structure $(\mathbb{Z}, <)$ des entiers relatifs avec l'ordre strict convient.
- c) Voici une déduction en déduction naturelle du séquent proposé :

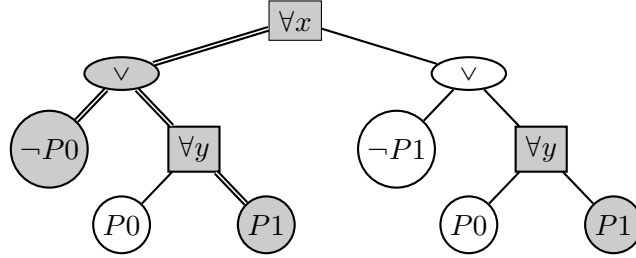
$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\forall x f x = x \vdash \forall x f x = x}{\forall x f x = x \vdash f v = v} \forall e}{\frac{\forall x f x = x, \forall x R x f x \vdash R v v}{\forall x f x = x, \forall x R x f x \vdash \forall x R x x} \forall i} \forall e \quad \frac{\frac{\frac{\forall x R x f x \vdash \forall x R x f x}{\forall x R x f x \vdash R v f v} \forall e}{\forall x R x f x \vdash \forall x R x x} \forall e \\
\frac{\frac{\varphi(x) = R v x}{u = v}{t = f(v)} \quad \frac{\forall x f x = x, \forall x R x f x \vdash R v v}{\forall x f x = x, \forall x R x f x \vdash \forall x R x x} \forall i
\end{array}$$

- d) Au vu du point précédent, on se doute que la théorie $\{\varphi_5, \varphi_6, \varphi_2\}$ est inconsistante. Le séquent proposé est en effet déductible en logique classique :

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\forall x \neg R x x \vdash \forall x \neg R x x}{\forall x \neg R x x \vdash \neg R v v} \forall e}{\forall x \neg R x x \vdash \neg R v v} \forall e \quad \frac{\text{Nous avons déjà fait cette preuve au point précédent!}}{\forall x f x = x, \forall x R x f x \vdash R v v} \neg e \\
\frac{\frac{\forall x f x = x, \forall x R x f x, \forall x \neg R x x \vdash \perp}{\forall x f x = x, \forall x R x f x, \forall x \neg R x x, \neg \varphi_3 \vdash \perp} \text{aff}}{\forall x f x = x, \forall x R x f x, \forall x \neg R x x \vdash \varphi_3} \perp c
\end{array}$$

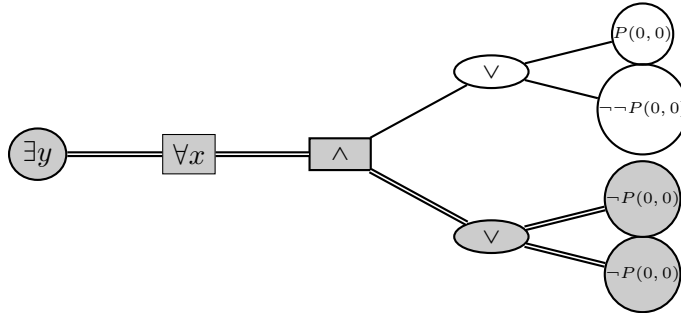
Solution de l'exercice 3 :

1. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$: On considère la structure $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}} = \{0\} \rangle$. Nous avons $\mathcal{M} \not\models \forall x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$. En effet, l'unique stratégie gagnante pour le falsificateur dans le jeu d'évaluation de $\varphi_1 : \forall x(P(x) \rightarrow \forall yP(y)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall yP(y))$ dans $\mathcal{M}$ consiste à choisir 0 pour x , puis, dans le cas où le vérificateur choisit le second membre de la disjonction, à choisir 1 pour y .



Puisqu'il existe une structure dans laquelle φ_1 n'est pas satisfaite, nous avons $\not\models \varphi_1$. Par le théorème de complétude, ceci est équivalent à $\not\models_c \varphi_1$.

2. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists yP(y) \rightarrow \forall zQ(z))$: La structure $\mathcal{M}$ de domaine $\{0, 1\}$ avec $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}} = \{0\}$ convient. En effet, $\mathcal{M} \not\models \forall zQ(z)$ mais $\mathcal{M} \models \exists yP(y)$. Ainsi $\mathcal{M} \not\models (\exists yP(y) \rightarrow \forall zQ(z))$. Or $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ et donc l'affirmation en découle.
3. $\vdash \exists y \forall x ((P(x, y) \rightarrow \neg P(x, x)) \wedge (\neg P(x, x) \rightarrow P(x, y)))$: Pour $\mathcal{M} = \langle \{0\}, P^{\mathcal{M}} = \{(0, 0)\} \rangle$ le falsificateur possède une stratégie dans le jeu d'évaluation de la formule considérée.



4. $\vdash \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$: Nous pouvons considérer la structure $\mathcal{M}$ donnée par $\langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}} = \{(0, 1), (1, 0)\} \rangle$. D'une part, la prémisse de l'implication est satisfaite dans $\mathcal{M}$, i.e. $\mathcal{M} \models \forall x \exists y P(x, y)$ car le vérificateur choisit $1 - b$ lorsque le falsificateur choisit $b \in \{0, 1\}$ et on a bien $(b, 1 - b) \in P^{\mathcal{M}}$ pour tout $b \in \{0, 1\}$. D'autre part, la conclusion n'est pas satisfaite dans $\mathcal{M}$, i.e. $\mathcal{M} \not\models \exists y P(y, y)$ car ni $(0, 0)$ ni $(1, 1)$ n'appartiennent à $P^{\mathcal{M}}$.
5. $\vdash \forall x(\neg x \simeq c \rightarrow \exists y x \simeq s(y))$. Considérons la structure $\mathcal{M}$ donnée par $\langle \{0, 1\}, c^{\mathcal{M}} = 0, s^{\mathcal{M}} = \{(0, 0), (1, 0)\} \rangle$. Une stratégie gagnante pour le falsificateur dans le jeu d'évaluation correspondant consiste à choisir 1 pour x , de sorte que la prémisse de l'implication est vérifiée mais pas sa conclusion. En effet, ni $s^{\mathcal{M}}(0) = 1$ ni $s^{\mathcal{M}}(1) = 1$.