

Solutions de la série n°10

Solution de l'exercice 1 :

1. On étend le langage $\mathcal{L}$ en en langage $\mathcal{L}_d = \mathcal{L} \cup \{d\}$ où d est symbole de constante. Nous considérons alors la théorie sur $\mathcal{L}_d$ donnée par :

$$T = T_{\text{arith}} \cup \{R(\underline{n}, d) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Cette théorie est finiment satisfaisable.

Pour voir ceci, soit $F \subseteq T$ une sous-théorie finie. Puisque F est fini il existe $M = \max\{n \mid R(\underline{n}, d) \in F\} \in \mathbb{N}$. Considérons la $\mathcal{L}_d$ -structure $\mathcal{N}_F$ obtenue de la $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{N}$ en définissant l'interprétation du symbole de constante d par $M + 1 \in |\mathcal{N}| = \mathbb{N}$. D'une part, $\mathcal{N}_F \models T_{\text{arith}}$ car T_{arith} est une $\mathcal{L}$ -théorie et par hypothèse $\mathcal{N} \models T_{\text{arith}}$. D'autre part, pour toute formule atomique de la forme $R(\underline{n}, d)$ appartenant à F , nous avons $\mathcal{N}_F \models R(\underline{n}, d)$ car $(\underline{n}^{\mathcal{N}_F}, d^{\mathcal{N}_F}) = (n, M + 1) \in R^{\mathcal{N}_F} = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid k < l\}$ par définition de $\mathcal{N}_F$. Par conséquent $\mathcal{N}_F \models F$ et T est finiment satisfaisable.

Par le théorème de compacité, il existe une $\mathcal{L}_d$ -structure $\mathcal{M}'$ telle que $\mathcal{M}' \models T$. Cette $\mathcal{L}_d$ -structure est infinie puisque elle contient l'interprétation de tous les termes $\underline{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ distincts $\mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m}$.

Puisque $\mathcal{L}_d$ est fini et que T admet un modèle infini (p.ex. $\mathcal{M}'$) il existe par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant une $\mathcal{L}_d$ -structure $\mathcal{M}''$ de domaine dénombrable et telle que $\mathcal{M}'' \models T$. En oubliant l'interprétation du symbole de constante d , on transforme $\mathcal{M}''$ en une $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et pour $a = d^{\mathcal{M}''} \in |\mathcal{M}|$ nous avons $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$ -structure satisfaisant les hypothèses du point précédent.

Si f est un homomorphisme de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}$, alors nécessairement $f(0) = c_0^{\mathcal{M}} = \underline{0}^{\mathcal{M}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) = f(n) \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n}^{\mathcal{M}} \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n+1}^{\mathcal{M}}.$$

Or il existe $a \in |\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc en particulier $\mathcal{M} \models \neg \underline{n} = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\mathcal{N} \models \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg x = y)$. Par conséquent f n'est pas surjective et ne peut donc être un isomorphisme.

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = |\mathcal{M}| \setminus \{\underline{n}^{\mathcal{M}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ muni de la relation d'ordre $R^{\mathcal{M}} \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Soit $a \in \mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{N} \models \forall x (\neg x = c_0 \rightarrow \exists y y \oplus c_1 = x)$ et que $a \neq c_0^{\mathcal{M}} = \underline{0}^{\mathcal{M}}$, il s'ensuit qu'il existe $b \in |\mathcal{M}|$ tel que $b \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = a$. Nous avons $b \in \mathcal{C}$ et donc a n'est pas minimal. En effet, si $b = \underline{n}^{\mathcal{M}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $a = b \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n+1}$ et donc $a \notin \mathcal{C}$, contradiction.

3. On étend le langage $\mathcal{L}$ en un langage $\mathcal{L}_E$ en lui ajoutant un ensemble de nouveaux symboles de constante $\{d_e \mid e \in E\}$. Puisque E est dénombrable, $\mathcal{L}_E$ l'est aussi. On considère alors la théorie sur $\mathcal{L}_E$ donnée par

$$T_E = T_{\text{arith}} \cup \{\neg d_e = d_{e'} \mid e, e' \in E \text{ et } e \neq e'\} \cup \{R(d_e, d_{e'}) \mid e, e' \in E \text{ et } e < e'\}.$$

On vérifie en prouvant par induction sur la cardinalité que tout ordre strict total fini est un bon ordre fini et donc isomorphe à un ordinal fini. Ainsi, pour toute sous-théorie finie $F \subseteq T_E$ l'ensemble $E_F = \{e \in E \mid d_e \text{ apparaît dans une formule de } F\}$ muni de la restriction de $<$ est un bon ordre fini isomorphe à un certain entier n via $\phi : E_F \rightarrow n$. Considérons alors la $\mathcal{L}_E$ structure $\mathcal{N}_F$ obtenue de $\mathcal{N}$ en interprétant les symboles de constante ajoutés de la façon suivante :

$$d_e^{\mathcal{N}_F} = \begin{cases} \phi(e) & \text{si } e \in E_F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors $\mathcal{N}_F \models F$ et donc T_E est finiment satisfaisable. Par le Théorème de compacité et le Théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}'$ de T_E . En oubliant les interprétations des symboles de constante ajoutés, on obtient une $\mathcal{L}$ -structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et telle que la fonction $f : E \rightarrow |\mathcal{M}|$ donnée par $e \mapsto d_e^{\mathcal{M}'}$ est un plongement.

4. Dans l'argument donné au point précédent, on n'utilise le fait que E est dénombrable seulement pour dire que $\mathcal{L}_E$ est dénombrable et qu'ainsi une théorie sur $\mathcal{L}_E$ qui admet un modèle infini admet un modèle dénombrable par le Théorème de Löwenheim-Skolem. Si E est de cardinalité fini, alors on a vu qu'il se plonge dans $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Si E est de cardinalité infinie quelconque κ , alors le langage $\mathcal{L}_E$ est de cardinalité κ et donc le théorème de Löwenheim-Skolem nous permet d'assurer que la théorie T_E , qui admet un modèle infini, possède un modèle de cardinalité κ . Il s'ensuit que tout ordre strict total de cardinalité infinie κ se plonge dans un modèle de T_{arith} de cardinalité κ .

Solution de l'exercice 2 :

1. On montre le théorème suivant :

Théorème. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage $\mathcal{L}$ dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents, alors T est complète.*

Démonstration. Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage $\mathcal{L}$ dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Nous montrons la contraposée : si T n'est pas complète, alors elle admet deux modèles dénombrables non élémentairement équivalents. Supposons donc que T n'est pas complète. Comme T est consistante, elle admet donc au moins deux modèles non élémentairement équivalents. Il existe donc une formule close Φ de $\mathcal{L}$ et deux $\mathcal{L}$ -structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{N} \models T$, $\mathcal{M} \models \Phi$ et $\mathcal{N} \models \neg\Phi$. Puisque T n'admet pas de modèles finis, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont infinis. Considérons les théories $\text{Th}(\mathcal{M})$ et $\text{Th}(\mathcal{N})$ des modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Ces théories sont sur un langage dénombrable et elles possèdent chacune un modèle infini. Par Löwenheim-Skolem descendant elles admettent respectivement des modèles $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ dénombrables. Or $\Phi \in \text{Th}(\mathcal{M})$ et $\neg\Phi \in \text{Th}(\mathcal{N})$ et donc $\mathcal{M}' \models \Phi$ et $\mathcal{N}' \models \neg\Phi$. Les $\mathcal{L}$ -structures dénombrables $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ ne sont donc pas élémentairement équivalentes. Toutefois elles satisfont la théorie T car $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{M})$ et $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{N})$. Ceci conclut la preuve. $\square$

2. En déduire le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors T est complète.*

Démonstration. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors ils sont tous élémentairement équivalents. $\square$

3. Voici une axiomatisation des ordres denses sans premier ni dernier élément dans le langage du premier ordre égalitaire contenant le symbole de relation R :

$$\varphi_1 : \forall x \neg Rxx$$

$$\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

$$\varphi_3 : \forall x \forall y (\neg x = y \rightarrow \exists z ((Rxz \wedge Rzy) \vee (Ryz \wedge Rzx))$$

$$\varphi_4 : (\forall x \exists y Ryx \wedge \forall x \exists y Rxy)$$

$$\varphi_5 : \exists x \exists y (\neg x = y)$$

$$\varphi_6 : \forall x \forall y ((\neg x = y) \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$$

Montrons qu'une structure qui satisfait ces formules est nécessairement infinie. Soit $\langle M, < \rangle$ une telle structure et soit $a_0 \in M$. Par φ_4 il existe $a_1 \in M$ tel que $a_0 < a_1$. Par φ_1 nous avons $a_0 \neq a_1$. Par induction, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que $a_k < a_{k+1}$ pour tout $0 \leq k < n$. Ces éléments sont nécessairement distincts par φ_1 et donc on conclut que $\mathbb{N}$ s'injecte dans M . Ainsi M est infini.

En utilisant le fait que tous les modèles dénombrables de cette théorie sont isomorphes, le corollaire ci-dessus nous permet de conclure que la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète.

Solution de l'exercice 3 : Nous notons κ la cardinalité de l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles dénombrables de T_{arithm} .

1. Observons que à isomorphisme près toute $\mathcal{L}_0$ -structure dénombrable est la donnée d'un élément de $\mathbb{N}$, d'une fonction unaire et de deux fonctions de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\kappa \leq |\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^3) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)| \leq 2^{\aleph_0}.$$

2. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. Notons $x|y$ la formule de $\mathcal{L}_0$ donnée par $\exists z(x \times z = y)$. Pour tout modèle dénombrable $\mathfrak{M}$ de T_{arithm} et tout élément $a \in |\mathfrak{M}|$ notons $\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent a dans $\mathfrak{M}$, formellement

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathfrak{M} \models p|a\}$$

où p désigne $\overbrace{S \cdots S}^{p \text{ fois}}(0)$. Nous posons ensuite

$$D = \left\{ P \subseteq \mathbb{P} \mid \begin{array}{l} \text{il existe un modèle dénombrable } \mathfrak{M} \text{ de } T_{\text{arithm}} \\ \text{et } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) \end{array} \right\}.$$

Nous montrons que $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$. Soit P un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{P}$. Désignons par $\underline{c}$ un nouveau symbole de constante et notons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{\underline{c}\}$ le langage étendu. Nous définissons la $\mathcal{L}$ -théorie

$$T_P = T_{\text{arithm}} \cup \{p|\underline{c} \mid p \in P\} \cup \{\neg p|\underline{c} \mid p \in \mathbb{P} \setminus P\},$$

La théorie T_P est finiment satisfaisable car pour tout sous-ensemble fini F de P , nous pouvons interpréter $\underline{c}$ dans $\mathbb{N}$ comme le produit (fini) des

nombres premiers appartenant à F . Par le théorème de compacité, T_P est satisfaisable. De plus, par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant il existe une $\mathcal{L}$ -structure dénombrable $\mathfrak{M}_P$ qui est modèle de T_P . Pour l'interprétation du symbole de constante $\underline{c}^{\mathfrak{M}_P}$ dans la $\mathcal{L}_0$ -structure $\widetilde{\mathfrak{M}}_P$ obtenue de $\mathfrak{M}_P$ en oubliant l'interprétation de $\underline{c}$ nous avons que

$$\text{Div}_{\widetilde{\mathfrak{M}}_P}(\underline{c}^{\mathfrak{M}_P}) = P.$$

Puisque $\widetilde{\mathfrak{M}}_P$ est une $\mathcal{L}_0$ -structure dénombrable modèle de T_{arithm} , nous avons montré que $P \in D$. Par conséquent $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$.

3. Nous notons

$$D_{\mathfrak{M}} = \{P \subseteq \mathbb{P} \mid \text{il existe } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)\}$$

la contribution à D d'un modèle dénombrable $\mathfrak{M}$ de T_{arithm} . Nous montrons à présent que deux modèles isomorphes contribuent de façon identique à l'ensemble D . Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ deux modèles dénombrables de T_{arithm} et f un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$. Par définition d'un homomorphisme, f envoie $\underline{0}^{\mathfrak{M}}$ sur $\underline{0}^{\mathfrak{M}'}$ et on montre alors par induction que f envoie $\underline{n}^{\mathfrak{M}}$ sur $\underline{n}^{\mathfrak{M}'}$ pour tout nombre naturel n . Ainsi, nous avons pour tout $a \in |\mathfrak{M}|$ et tout $p \in \mathbb{P}$ que

$$\mathfrak{M} \models p \mid a \quad \text{iff} \quad \mathfrak{M}' \models p \mid f(a)$$

car si $\mathfrak{M} \models p \mid a$ alors il existe $b \in |\mathfrak{M}|$ tel que $\underline{p}^{\mathfrak{M}} \otimes^{\mathfrak{M}} b = a$ et comme f est un homomorphisme, $f(\underline{p}^{\mathfrak{M}}) \otimes^{\mathfrak{M}'} f(b) = f(a)$ et donc $\mathfrak{M}' \models p \mid f(a)$. Par conséquent,

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \text{Div}_{\mathfrak{M}'}(f(a)).$$

Puisque f est une bijection, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ contribuent à D de façon identique, i.e. $D_{\mathfrak{M}} = D_{\mathfrak{M}'}$. Par ailleurs, pour tout modèle dénombrable de T_{arithm} , $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$ implique $D_{\mathfrak{M}} \leq \aleph_0$. Ainsi, $|D| \leq \kappa \cdot \aleph_0$.

4. Nous avons

$$2^{\aleph_0} = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{P})) = \text{Card}(D) \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \max\{\kappa, \aleph_0\},$$

ce qui, avec $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, implique $\kappa = 2^{\aleph_0}$. Ceci achève la preuve.