

1. Soit une suite orthonormée totale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace préhilbertien X . Soit aussi $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que chaque e_n est un vecteur propre de T et notons par $\lambda_n \in \mathbb{F}$ la valeur propre correspondante. Prouver que

$$\forall x \in X \quad Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

en précisant la signification de la somme infinie.

Indication: exercice 3 de la série 7.

2. Soit $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ satisfaisant $\min_{t \in [0, 1]} p(t) > 0$ et $\int_0^1 p^{-1}(t) dt = 1$.

Posons $q(t) = \int_0^t p^{-1}(s) ds$ et définissons l'opérateur intégral $K : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ par $(Kf)(s) := \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$, où

$$k(s, t) = \begin{cases} \{1 - q(s)\}q(t) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \{1 - q(t)\}q(s) & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que, pour tous $u, f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $u = Kf$ ssi

$$\begin{cases} -\{p(s)u'(s)\}' = f(s) & \text{sur } [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}). \end{cases}$$

3. A partir du théorème d'approximation de Weierstrass (voir le corrigé de l'exercice 4 de la série 2), expliquer pourquoi

$$\{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$$

est dense dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

4. Soit $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\min_{t \in [0, 1]} p(t) > 0$ et $\int_0^1 p^{-1}(t) dt = 1$. Montrer l'existence d'une suite $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ et d'une suite orthonormée totale $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telles que

$$\begin{cases} -\{p(s)e'_n(s)\}' = \mu_n e_n(s) & \text{sur } [0, 1], \\ e_n(0) = e_n(1) = 0, \\ e_n \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), \end{cases}$$

et $\mu_n \rightarrow +\infty$. Discuter le cas $p = 1$ sur $[0, 1]$.

Indication: appliquer le Corollaire IV.8 et le problème 2 ci-dessus.

5. Soient un espace de Banach $X \neq \{0\}$ et $T \in \mathcal{L}(X)$. Pour $\lambda, \mu \in \rho(T)$, montrer l'«équation de la résolvante»

$$(T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1}$$

6. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Prouver qu'il existe un opérateur linéaire bijectif $T : H \rightarrow l^2$ tel que

$$\forall x \in H \quad \forall \alpha \in l^2 \quad \langle x, T^{-1}\alpha \rangle = \langle Tx, \alpha \rangle,$$

où le produit scalaire de l^2 apparaît à droite de l'égalité. En déduire que

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$