

1. Soient des evn X et Y , et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Prouver que T est compact si $T|_Z$ est compact pour un certain sous-espace vectoriel dense $Z \subset X$.
2. Soit $X = C[0, 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Prouver que l'opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(C[0, 1], l^1)$ défini pour tout $f \in C[0, 1]$ par

$$Tf = \left(\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt \right)_{k \geq 1}$$

est compact.

Indication: appliquer le Théorème III.13 et le problème 5 de la série 4.

3. Soit l'opérateur linéaire $T : l^2 \rightarrow l^2$ défini par $T\xi = \eta$ si $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l} \xi_l$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où les $\lambda_{k,l} \in \mathbb{F}$ satisfont $\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 < \infty$.

Prouver que T est compact.

Indication: appliquer le Théorème III.13 et les problèmes 1 et 5 de la série 4.

4. Montrer que l'opérateur intégral $K : (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ défini au paragraphe III.2 est symétrique si $k(s, t) = \overline{k(t, s)}$ pour tous $s, t \in [a, b]$.

5. Si X est un espace préhilbertien et $A \in \mathcal{L}(X)$ est symétrique, montrer que

$$N(A) = R(A)^\perp := \{x \in X : \langle x, z \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in R(A)\}.$$

6. Soit un evn X sur $\mathbb{F}$, un opérateur linéaire compact $T : X \rightarrow X$, $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ et $T_\lambda := T - \lambda I$, où $I : X \rightarrow X$ est l'opérateur identité. Prouver que

$$N(T_\lambda) = \{0\} \Rightarrow R(T_\lambda) = X.$$

7. Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1}) \Leftrightarrow R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1}).$$