EPFL - automne 2024

ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**

Série 2 19 septembre 2024

1. Soient un espace métrique (M, d) et $A \subset M$. On définit l'*adhérence* ou *fermeture* de A, notée $\overline{A}$, comme l'intersection de tous les fermés contenant A (observons que M lui-même est un fermé contenant A). Vérifier que $\overline{A}$ est fermé. Pour $x \in M$, prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

   (a) $x \in \overline{A}$,

   (b) $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$,

   (c) il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \to x$.

   On dit que A est *dense* (dans M) si $\overline{A} = M$.
   Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

   (i) A est dense,

   (ii) $\forall x \in M \ \forall r > 0 \ \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$,

   (iii) pour tout $x \in M$, il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \to x$.

2. **Complétion d'un espace métrique.**

   Soient deux espaces métriques (X, d) et (X', d'). Une application $\Phi : X \to X'$ est une *isométrie* si, par définition,
   $$\forall a \in X \ \forall b \in X \ \ d'(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b).$$
   Si, de plus, Φ est bijective, (X, d) et (X', d') sont dits *isométriques*.

   Soit un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe un espace métrique complet (X^*, d^*) et un sous-ensemble $D \subset X^*$ dense dans X^* tel que (X, d) et le sous-espace métrique (D, d^*_D) sont isométriques.

   Indication. Voir l'exercice 4 de la série 1.

   Remarques. On dit que (X^*, d^*) est un *complété* de (X, d). On peut montrer que deux complétés (X^*, d^*) et $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ quelconques de (X, d) sont isométriques. Ainsi le complété de (X, d) est unique si l'on considère deux espaces isométriques comme identiques.

3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On appelle *série* une suite $\{s_n\}_{n\geq 1}$ du type $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ pour une certaine suite $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset E$. On dit que s_n est la $n$ième *somme partielle*. La série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ est dite *convergente* si la suite $\{s_n\}$ converge. La série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ est dite *absolument convergente* si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.

   Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série dans E qui converge absolument est convergente.

4. A l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que $(C[a, b], ||\cdot||_\infty)$ et $(C[a, b], <\cdot, \cdot>)$ sont séparables.

   Rappel. Un espace métrique (M, d) est dit *séparable* s'il admet un sous-ensemble D à la fois dense ($\overline{D} = M$) et dénombrable.

5. Soit $A = \{\xi \in l^\infty : \xi_n$ vaut 0 ou 1 pour tout $n\}$. Prouver que A n'est pas dénombrable et que $||\xi - \eta||_\infty = 1$ pour $\xi \neq \eta$ dans A. En déduire que l^∞ n'est pas séparable.

6. Prouver qu'un evn admettant une base de Schauder est (a) séparable et (b) de dimension infinie.