

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

1. Soit une limite de Banach $F : l_{\mathbb{R}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$. Par définition d'une limite de Banach, F est linéaire, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$, où $Sx = (x_2, x_3, \dots)$.

Montrer que, pour tout $x \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$, $F(x) \leq \inf \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{j+n_i}$, où l'infimum est pris sur $k \in \mathbb{N}$ et tous les choix d'entiers $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

En déduire que $F(x) \geq \sup \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{j+n_i}$

2. Soit un espace métrique (M, d) .

Un sous-ensemble $F \subset M$ est dit *fermé* si $M \setminus F$ est ouvert, et il est dit *séquentiellement fermé* si toute suite $(a_n) \subset F$ qui converge dans M a sa limite dans F .

Prouver que F est séquentiellement fermé ssi il est fermé.

3. Soit un espace métrique (M, d) et un sous-ensemble non vide $A \subset M$. La restriction de d à $A \times A$, notée $d_A := d|_{A \times A}$, est une distance sur A . On dit que l'espace métrique (A, d_A) est un *sous-espace métrique* de (M, d) .

i) Si (A, d_A) est complet, prouver que A est fermé.

ii) Si (M, d) est complet et A est fermé, prouver que (A, d_A) est complet.

4. Soit un espace métrique (X, d) . Une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *bornée* si $f(X)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. On note par $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et on définit $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ pour $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ est un espace métrique.

(b) Soit une suite de Cauchy $\{f_n\}_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Montrer ensuite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} = 0$. En déduire que f est bornée et que $f_n \rightarrow f$ dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$.

Indication: vous pouvez utiliser sans preuve la complétude de la droite euclidienne.

(c) Soit $x_0 \in X$ fixé. Pour $a \in X$, on définit l'application $\phi_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Montrer que $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ et que

$$\forall a \in X \quad \forall b \in X \quad \rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

Indication: $|d(u, v) - d(u, w)| \leq d(v, w)$ pour tous $u, v, w \in X$.