

1. Soit c_0 , le sous-espace vectoriel de l^∞ consistant en toutes les suites qui convergent vers 0. Montrer que le dual de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est congruent à l^1 .

Indication: s'inspirer de la preuve du §5.3.

2. **Théorème de la projection.** Soient un espace hilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et un sous-espace vectoriel fermé $M \subset H$. Fixons $x_0 \in H$, posons $d = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in M\}$ et considérons une suite $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset M$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - y_n\| = d$.

- (a) Montrer que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, qu'elle converge vers un certain $y_0 \in M$ et que $\|x_0 - y_0\| = d$.

Indication: $\|(y_n - x_0) - (y_m - x_0)\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - \|(y_n - x_0) + (y_m - x_0)\|^2$ et donc $\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\|x_0 - (y_n + y_m)/2\|^2$

- (b) Vérifier que y_0 est uniquement déterminé.

Indication: $\|\tilde{y}_0 - y_0\|^2 = 2\|\tilde{y}_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - 4\|x_0 - (\tilde{y}_0 + y_0)/2\|^2$

- (c) Montrer que $\langle v, x_0 - y_0 \rangle = 0$ pour tout $v \in M$.

Indication: si $\|v\| = 1$, alors $|\langle v, x_0 - y_0 \rangle|^2 = d^2 - \|x_0 - y_0 - \langle x_0 - y_0, v \rangle v\|^2$

3. **Théorème de représentation de Riesz.** Soient un espace hilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $f \in H^*$. Montrer qu'il existe un unique $a \in H$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$. Montrer aussi que $\|a\|_H = \|f\|_{H^*}$.

Indication. Si $f \neq 0$, choisir $x_0 \in H \setminus N(f)$ tel que $f(x_0) = 1$, et considérer

$$a = \|x_0 - y_0\|^{-2}(x_0 - y_0),$$

où $y_0 \in N(f)$ est donné par l'exercice précédent appliqué à $M = N(f)$ et à x_0 . Remarquer aussi que $x - f(x)(x_0 - y_0) \in N(f)$ pour tout $x \in H$.

4. Prouver que tout espace hilbertien réel est congruent à son dual (en tant qu'espaces vectoriels normés).
5. Soit la fonctionnelle sous-linéaire $p : l_\mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Donner explicitement une suite $x \in l_\mathbb{R}^\infty$ telle que

$$p(x) + p(-x) \neq 0 = p(x + (-x)).$$

6. Soit une limite de Banach $F : l_\mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une suite $x = (x_n) \in l_\mathbb{R}^\infty$ telle que, pour toute sous-suite convergente $(x_{n_k}) \in l_\mathbb{R}^\infty$, $F((x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}) \neq F(x)$. Justifiez votre réponse.