

1. On sait déjà que toute valeur propre de A est dans $\sigma(A)$ (cf la fin du chapitre IV). Par IV.10, il existe une suite orthonormée totale $\{f_n\}_{n \geq 1}$ de H faite de vecteurs propres de A et la suite $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ des valeurs propres correspondantes satisfait $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$. De plus

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu_k \langle x, f_k \rangle f_k$$

pour tout $x \in H$. Supposons que $\lambda \neq 0$ n'est pas une valeur propre de A . Alors, pour tous $x, y \in H$,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle y, f_k \rangle f_k$$

(voir IV.9) et

$$Ax - \lambda x = y$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\mu_k - \lambda) \langle x, f_k \rangle f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle y, f_k \rangle f_k$$

$$\Leftrightarrow \langle x, f_k \rangle = \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour $y \in H$ donné, si $x \in H$ vérifie $Ax - \lambda x = y$, alors nécessairement $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} f_k$.

D'autre part, pour $y \in H$, $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} f_k \right\}_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy. Ceci découle de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} \right|^2 \leq \left\{ \inf_{j \in \mathbb{N}} |\mu_j - \lambda| \right\}^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle y, f_k \rangle|^2 \stackrel{Bessel}{\leq} \left\{ \inf_{j \in \mathbb{N}} |\mu_j - \lambda| \right\}^{-2} \|y\|^2$$

En effet, plus généralement, si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée dans un espace préhilbertien et si $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ satisfait $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, alors $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour le voir, fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Pour tout $m > n \geq N$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Dans notre cas, la suite en question converge dans l'espace de Hilbert H vers une certaine limite, notée $R_\lambda(y)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle R_\lambda(y), f_j \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} f_k, f_j \right\rangle = \frac{\langle y, f_j \rangle}{\mu_j - \lambda}$$

et donc, pour tous $x, y \in H$,

$$(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x = R_\lambda(y).$$

Ainsi $A - \lambda I$ est bijectif d'application réciproque $R_\lambda : H \rightarrow H$, qui est linéaire. Nous obtenons aussi

$$\|R_\lambda(y)\|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, f_k \rangle}{\mu_k - \lambda} \right|^2 \leq \left\{ \inf_{j \in \mathbb{N}} |\mu_j - \lambda| \right\}^{-2} \|y\|^2,$$

prouvant que $R_\lambda \in \mathcal{L}(H)$. En conclusion, $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$ existe dans $\mathcal{L}(H)$ et donc $\lambda \in \rho(A)$.

D'autre part, $\mu_n \in \sigma(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ et $0 \in \sigma(A)$ car $\sigma(A)$ est fermé (cf la fin du chapitre IV).

2. (a) Remarquons d'abord que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$ et donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(\lambda_n)| < \infty$ puisque f est continue. Comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k)|^2 |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(\lambda_n)| \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, u_k \rangle|^2 < \infty,$$

la suite $\{\sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \langle x, u_k \rangle u_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (même argument que ci-dessus) et converge donc dans l'espace complet H vers une certaine limite

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \langle x, u_k \rangle u_k$ notée plus simplement $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle x, u_n \rangle u_n$

Clairement, $f(A)$ est un opérateur linéaire. Pour tout $x \in H$, nous avons grâce à l'égalité de Parseval

$$\|f(A)x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\lambda_n)^2 |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq \left(\sup_n |f(\lambda_n)| \right)^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle|^2 = \left(\sup_n |f(\lambda_n)| \right)^2 \|x\|^2$$

et donc $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ avec $\|f(A)\| \leq \sup_n |f(\lambda_n)|$.

En considérant $x = u_n$, on obtient $f(\lambda_n)^2 = \|f(A)u_n\|^2 \leq \|f(A)\|^2 \|u_n\|^2 = \|f(A)\|^2$ et donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(\lambda_n)| \leq \|f(A)\|$. D'où $\|f(A)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(\lambda_n)|$.

Finalement

$$\begin{aligned} \langle f(A)x, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle f(\lambda_k) \langle x, u_k \rangle u_k, y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \langle x, u_k \rangle \langle u_k, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, f(\lambda_k) \langle y, u_k \rangle u_k \rangle \\ &= \langle x, f(A)y \rangle \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in H$, et donc $f(A)$ est symétrique.

- (b) La suite orthonormée totale $\{u_n\}$ est aussi constituée de vecteurs propres de $f(A)$, les valeurs propres correspondantes étant $\{f(\lambda_n)\}$:

$$f(A)u_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(\lambda_k) \langle u_n, u_k \rangle u_k = f(\lambda_n)u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus observons que si $x \in H$ satisfait $f(A)x = \mu x$ avec $\mu \notin \{f(\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$, alors $\langle x, u_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir IV.4) et donc $x = 0$ (voir l'exercice 4 de la série 7). D'où μ n'est pas une valeur propre de $f(A)$.

- (c) Rappel: la compacité de A assure que $\lambda_n \rightarrow 0$ (voir IV.10).

Comme $\lambda_n \rightarrow 0$, on a $f(\lambda_n) \rightarrow f(0)$. Puisque les valeurs propres de $f(A)$ sont exactement les $f(\lambda_n)$, si $f(A)$ est compact alors $f(\lambda_n) \rightarrow 0$. Donc $f(0) = 0$ si $f(A)$ est compact.

D'autre part, si $f(0) = 0$, alors $f(\lambda_n) \rightarrow 0$. Posons $B_n x = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \langle x, u_k \rangle u_k$, qui définit un opérateur linéaire et borné B_n . Comme $R(B_n)$ est de plus de dimension finie, B_n est compact (cf le problème 5 de la série 4). Notons encore que $f(A) - B_n$ est un opérateur linéaire borné, $\|f(A) - B_n\| = \sup_{k > n} |f(\lambda_k)|$ (en suivant le même argument qu'en (a)) et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(A) - B_n\| = 0$ puisque $f(\lambda_n) \rightarrow 0$. Ceci montre que $f(A)$ est compact (cf III.13).

3. Par définition d'une limite de Banach, F est linéaire, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$, où $Sx = (x_2, x_3, \dots)$.

En raisonnant par contradiction, supposons qu'une suite $\alpha \in l_{\mathbb{R}}^1$ comme dans l'énoncé existe. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $e_k = (\delta_{k,n})_{n \geq 1}$. Nous obtenons

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{k,n} = F(e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{k,n} = 0$$

car $F(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ si ξ converge. D'où $\alpha = 0$ et $F(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in l_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Contradiction.