EPFL - automne 2024	
ANALYSE FONCTIONNELLE I	**Corrigé**
Série 7	31 octobre 2024

1. Si $A = 0$, le résultat est évident. Supposons donc que $||A|| > 0$. D'abord, si $Ax = \lambda x$ pour un certain $x \neq 0$, alors $|\lambda| = \left\| A \frac{1}{||x||} x \right\| \leq \sup_{||z|| \leq 1} ||Az|| = ||A||$.

   D'autre part, par le paragraphe IV.6, $||A||$ ou $-||A||$ est une valeur propre de A. Ceci montre bien que $||A|| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $||A^n|| = ||A \circ \ldots \circ A|| \leq ||A||^n$ par le paragraphe III.6(c). Il reste à montrer que $||A^n|| \geq ||A||^n$. Soit $x \in X \backslash \{0\}$ tel que $Ax = \pm||A||x$ (cf IV.6). Alors
   $A^n x = A^{n-1}(Ax) = A^{n-1}(\pm||A||x) = \pm||A||A^{n-2}(Ax) = \pm||A||A^{n-2}(\pm||A||x) = (\pm||A||)^2 A^{n-2}x$
   $= \ldots = (\pm||A||)^n x$.

   D'où $||A^n|| = \sup_{||z|| \leq 1} ||A^n z|| \geq \left\| A^n \frac{1}{||x||} x \right\| = ||A||^n$.

2. On constate d'abord que

$$< T\xi, \eta >= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda_{k,l} \xi_l \right\} \overline{\eta_k} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \xi_l \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_{l,k} \eta_k \right\}} =< \xi, T\eta >,$$

   et on se souvient ensuite que T est compact (voir l'exercice 3 de la série 6). Si $T = 0$, T n'a aucune valeur propre non nulle. Si $||T|| > 0$, on peut appliquer le théorème IV.7.

3. Supposons que, pour tout $x \in X$, $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k$. Vérifions que, pour tout x, ce développement est unique: si $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ pour une certaine suite $\{\alpha_j\}_{j\geq 1} \subset \mathbb{F}$, alors

$$< x, e_k >= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j < e_j, e_k >= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{j,k} = \alpha_k$$

   et donc le développement est unique. Ainsi $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est bien une base de Schauder.

4. (a) Posons $\alpha_k =< x, e_k >$. L'inégalité de Bessel donne $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \leq ||x||^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2 \leq ||x||^2$. Soit $\epsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^\infty |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Pour tous $m > n \geq N$, on obtient alors

$$|| \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k ||^2 = || \sum_{k=n+1}^m \alpha_k e_k ||^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

   (b) Supposons que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est telle que, pour tout $x \in X$, $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k$. Clairement si $x \in X$ est tel que $< x, e_k >= 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n 0 \cdot e_k = 0.$$

   Ceci prouve que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}^\perp := \{x \in X :< x, e_k >= 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$.

   (c) Supposons maintenant que X est un espace hilbertien et que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une suite orthonormée telle que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$. Pour $x \in X$ fixé, la partie (a) affirme que la suite $\{\sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k\}_{n\geq 1}$ est de Cauchy et donc converge vers un certain $y \in X$, puisque X est supposé hilbertien. Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$< y-x, e_m >= \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k >< e_k, e_m > \right\} - < x, e_m >=< x, e_m > - < x, e_m >= 0.$$

D'où $y-x \in \{e_m : m \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ et $x = y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k$.

5. Soit un ensemle D dénombrable et dense dans X. Enumérons les éléments de D: $D = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Définissons inductivement la suite $\{w_n\}_{n\geq 1}$. Posons d'abord $w_1 = 0$ si $u_1 = 0$ et $w_1 = ||u_1||^{-1}u_1$ si $u_1 \neq 0$. Par induction, posons $w_{n+1} = 0$ si $u_{n+1} \in \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$ et
$$w_{n+1} = \left\| u_{n+1} - \sum_{k=1}^n < u_{n+1}, w_k > w_k \right\|^{-1} \left(u_{n+1} - \sum_{k=1}^n < u_{n+1}, w_k > w_k \right)$$
sinon. Ce procédé de Gram-Schmidt donne une suite $\{w_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_n\} = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, $||w_n|| \in \{0, 1\}$ et $< w_n, w_m >= 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m < n$ (preuve par induction sur n). De plus
$$\overline{\mathrm{span}\{w_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathrm{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} \supset \overline{\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} = X.$$
La sous-suite $\{w_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{w_n\}_{n\geq 1}$ provenant par extraction de tous les éléments non nuls est donc une suite orthonormée totale.

6. On s'inspire du corrigé de l'exercice 5 de la série 2. Pour tous $s_1 \neq s_2$ dans $\mathbb{R}$,
$$||e_{s_1} - e_{s_2}||^2 = \sum_{t\in\{s_1,s_2\}} (e_{s_1}(t) - e_{s_2}(t))^2 = (e_{s_1}(s_1) - e_{s_2}(s_1))^2 + (e_{s_1}(s_2) - e_{s_2}(s_2))^2 = 2.$$
Soit un sous-ensemble D dense dans X. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $D \cap B(e_s, 1/4) \neq \emptyset$ et on peut donc y choisir un certain d_s. Comme $B(e_{s_1}, 1/4) \cap B(e_{s_2}, 1/4) = \emptyset$ pour tous $s_1 \neq s_2$ dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $d_{s_1} \neq d_{s_2}$ et donc que D n'est pas dénombrable (car $\mathbb{R}$ ne l'est pas).

   Remarque: $\{e_s : s \in \mathbb{R}\}$ est une base orthonormée de $(X, < \cdot, \cdot >)$ (voir le §4.9 du cours), mais qui n'est pas dénombrable. Comme $(X, < \cdot, \cdot >)$ n'est pas séparable, il n'admet pas de base de Schauder (cf l'exercice 6 de la série 2) et donc pas de suite orthonormée totale (cf l'exercice 3 de cette série).

7. (a) Définissons ξ_k par $\xi_k = 0$ si $\alpha_k = 0$ et $\xi_k = \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$ si $\alpha_k \neq 0$. Clairement $(\xi_k) \in l^\infty$ et $\sum_{k=1}^n \alpha_k\xi_k = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$. Comme par hypothèse la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k\xi_k$ existe dans $\mathbb{F}$, on obtient que $(\alpha_k) \in l^1$.

   (b) Supposons par contradiction que $(\alpha_k) \notin l^\infty$. Il existe une sous-suite (α_{k_j}) telle que $|\alpha_{k_j}| \geq j^2$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Soit $\xi_{k_j} = \frac{|\alpha_{k_j}|}{j^2\alpha_{k_j}}$ et $\xi_k = 0$ si k n'est pas de la forme $k = k_j$. Comme $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} < \infty$, on en déduit que $\xi \in l^1$. D'autre part $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k\xi_k \geq \sum_{j=1}^\infty j^2\frac{1}{j^2} = +\infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k\xi_k$ n'existe pas dans $\mathbb{F}$. Contradiction avec l'hypothèse de la donnée.