

**Rappel du cours: le théorème III.13.**

Soient des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$ , avec  $Y$  *complet*. Soient une suite  $\{T_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tels que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si  $T_n$  est compact pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $T$  est compact.

**Rappel: l'exercice 5 de la série 4.**

Soient des evn  $X$  et  $Y$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Alors  $T$  est compact si  $\dim R(T) < \infty$ .

1. Soit une suite bornée  $\{x_n\} \subset X$  et choisissons  $\{z_n\} \subset Z$  telle que  $\|x_n - z_n\|_X < 1/n$ . Clairement  $\{z_n\}$  est bornée. Comme  $T|_Z$  est compact, il existe une sous-suite  $\{z_{n_k}\}$  telle que  $\{Tz_{n_k}\}$  converge vers un certain  $y \in Y$ . Nous obtenons

$$\|Tx_{n_k} - y\|_Y \leq \|Tx_{n_k} - Tz_{n_k}\|_Y + \|Tz_{n_k} - y\|_Y \leq \|T\| \frac{1}{n_k} + \|Tz_{n_k} - y\|_Y \rightarrow 0$$

lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Ainsi  $\{Tx_{n_k}\}$  converge (en fait vers  $y$ ).

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons  $L_n : C[0, 1] \rightarrow l^1$  par

$$L_n f = \left( 0, \dots, 0, \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t) dt, \int_{1/(n+2)}^{1/(n+1)} f(t) dt, \int_{1/(n+3)}^{1/(n+2)} f(t) dt, \dots \right),$$

où les  $n - 1$  premiers éléments de la suite sont nuls. Remarquons que  $L_1 = T$  et

$$\|L_n f\|_1 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} |f(t)| dt \leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\|f\|_{\infty}}{n}$$

D'où  $L_n \in \mathcal{L}(C[0, 1], l^1)$  et  $\|L_n\| \leq \frac{1}{n}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $T_n := T - L_n = L_1 - L_n$ . Alors  $T_n \in \mathcal{L}(C[0, 1], l^1)$  et

$$R(T_n) \subset \{(\xi_k) : \xi_k = 0 \text{ pour tout } k \geq n\}.$$

Comme l'image de  $T_n$  est un espace vectoriel de dimension finie, l'exercice 5 de la série 4 assure que  $T_n$  est un opérateur compact. Nous pouvons appliquer le théorème III.13 à la suite  $\{T_n\}$  et à  $T$ , car  $\|T - T_n\| = \|L_n\| \rightarrow 0$ , chaque  $T_n$  est compact et  $l^1$  est complet. Ainsi  $T$  est compact.

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons  $\lambda_{k,l}^{(n)}$  par

$$\lambda_{k,l}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \lambda_{k,l} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

et l'opérateur linéaire  $L_n : l^2 \rightarrow l^2$  par  $L_n \xi = \eta$  si  $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l}^{(n)} \xi_l$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par le problème 1 de la série 4,  $L_n \in \mathcal{L}(l^2)$  et  $\|L_n\|^2 \leq \sum_{k \geq n} \sum_{l \in \mathbb{N}} |\lambda_{k,l}^{(n)}|^2 \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $T_n := T - L_n$ . Alors  $T_n \in \mathcal{L}(l^2)$  et

$$R(T_n) \subset \{(\eta_k) : \eta_k = 0 \text{ pour tout } k \geq n\}.$$

Comme l'image de  $T_n$  est un espace vectoriel de dimension finie, l'exercice 5 de la série 4 assure que  $T_n$  est un opérateur compact. Nous pouvons appliquer le théorème III.13 à la suite  $\{T_n\}$  et à  $T$ , car  $\|T - T_n\| = \|L_n\| \rightarrow 0$ , chaque  $T_n$  est compact et  $l^2$  est complet. Ainsi  $T$  est compact.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \langle Kf, g \rangle = \int_a^b \left\{ \int_a^b k(s, t) f(t) dt \right\} \overline{g(s)} ds = \int_a^b f(t) \overline{\left\{ \int_a^b k(s, t) g(s) ds \right\}} dt \\
& = \int_a^b f(t) \overline{\left\{ \int_a^b k(t, s) g(s) ds \right\}} dt = \langle f, Kg \rangle \\
& \text{pour tous } f, g \in C[a, b].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \langle Ax, Ax \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in X \quad \langle Ax, y \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall y \in X \quad \langle x, Ay \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in R(A)^\perp
\end{aligned}$$

6. Supposons que  $N(T_\lambda) = \{0\}$  et soit  $n > 0$  tel que  $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$ . Pour tout  $x \in X$ , il existe donc  $y \in X$  tel que  $T_\lambda^n x = T_\lambda^{n+1} y$ . On obtient alors  $T_\lambda(T_\lambda^{n-1} x - T_\lambda^n y) = 0$  et donc  $T_\lambda^{n-1} x = T_\lambda^n y$ . Ainsi, pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in X$  tel que  $T_\lambda^{n-1} x = T_\lambda^n y$ , autrement dit,  $R(T_\lambda^{n-1}) \subset R(T_\lambda^n)$ . Comme on sait déjà (exercice 1 de la série 5) que  $R(T_\lambda^{n-1}) \supset R(T_\lambda^n)$ , il y a en fait égalité. En bref, pour tout  $n > 0$ ,

$$R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1}) \Rightarrow R(T_\lambda^{n-1}) = R(T_\lambda^n).$$

Soit  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que  $R(T_\lambda^k) = R(T_\lambda^{k+1})$  (un tel  $k$  existe par l'exercice 2 de la série 5). Par ce qui précède, on en déduit que  $R(T_\lambda^0) = R(T_\lambda^1)$ , c'est-à-dire,  $X = R(T_\lambda)$ .

7. Le cas  $n = 0$  a déjà été prouvé (voir l'exercice précédent et le §3.21 du cours); supposons donc  $n \geq 1$ . Observons d'abord que  $T(R(T_\lambda^n)) \subset R(T_\lambda^n)$ : pour tout  $x \in X$ ,

$$T(T_\lambda^n x) = (T_\lambda + \lambda I)(T_\lambda^n x) = T_\lambda^n ((T_\lambda + \lambda I)x) \in R(T_\lambda^n).$$

Comme  $R(T_\lambda^n)$  est un fermé de  $X$  (§3.20 du cours) et  $T$  est compact,  $T|_{R(T_\lambda^n)} : R(T_\lambda^n) \rightarrow R(T_\lambda^n)$  est aussi compact. Par l'exercice précédent et le §3.21 du cours,

$$N((T_\lambda)|_{R(T_\lambda^n)}) = \{0\} \Leftrightarrow R((T_\lambda)|_{R(T_\lambda^n)}) = R(T_\lambda^n).$$

Or  $R((T_\lambda)|_{R(T_\lambda^n)}) = R(T_\lambda^{n+1})$ . De plus  $N((T_\lambda)|_{R(T_\lambda^n)}) = \{0\}$  ssi

$$\forall x \in X \quad (T_\lambda(T_\lambda^n x) = 0 \Rightarrow T_\lambda^n x = 0),$$

autrement dit, ssi

$$\forall x \in X \quad (T_\lambda^{n+1} x = 0 \Leftrightarrow T_\lambda^n x = 0),$$

c'est-à-dire, ssi  $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$ .