

1. Comme

$$|\eta_k| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}| |\xi_l| \leq \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 \right\}^{1/2} \|\xi\|_2$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 \leq \|\xi\|_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2$$

pour tout $\xi \in l^2$. Ceci montre que T est borné et que $\|T\| \leq \{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2\}^{1/2}$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, posons $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} t^k$. Pour $m > n$,

$$\|S_m(T) - S_n(T)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{\|T\|^k}{k!} = \sigma_m(\|T\|) - \sigma_n(\|T\|).$$

Comme la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\|T\|) = e^{\|T\|}$ existe, la suite $\{\sigma_n(\|T\|)\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et il en résulte que la suite $\{S_n(T)\}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(X)$. Comme $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach, $\{S_n(T)\}$ converge vers une certaine limite, notée $\exp(T) \in \mathcal{L}(X)$. De plus $S_n(0) = I$ pour tout $n \geq 0$ et donc $\exp(0) = I$. Il reste à vérifier que $\exp(L + T) = \exp(L) \circ \exp(T)$. Comme $L \circ T = T \circ L$, on obtient

$$S_n(L) \circ S_n(T) = \sum_{0 \leq k, l \leq n} \frac{1}{k!l!} L^k \circ T^l$$

et

$$(L + T)^m = \sum_{0 \leq k, l \leq m, k+l=m} \frac{m!}{k!l!} L^k \circ T^l$$

(cf la formule du binôme). D'où

$$\|S_n(L) \circ S_n(T) - S_n(L + T)\| = \left\| \sum_{0 \leq k, l \leq n} \frac{1}{k!l!} L^k \circ T^l - \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \sum_{0 \leq k, l \leq n, k+l=m} \frac{m!}{k!l!} L^k \circ T^l \right\|$$

$$= \left\| \sum_{0 \leq k, l \leq n, k+l \geq n+1} \frac{1}{k!l!} L^k \circ T^l \right\| \leq \sum_{0 \leq k, l \leq n, k+l \geq n+1} \frac{1}{k!l!} \|L\|^k \|T\|^l$$

$$= \sigma_n(\|L\|) \sigma_n(\|T\|) - \sigma_n(\|L\| + \|T\|) \rightarrow e^{\|L\|} e^{\|T\|} - e^{\|L\| + \|T\|} = 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Finalement

$$\begin{aligned} \|\exp(L) \circ \exp(T) - \exp(L + T)\| &\leq \| \{\exp(L) - S_n(L)\} \circ \exp(T) \| + \| S_n(L) \circ \{\exp(T) - S_n(T)\} \| \\ &+ \| S_n(L) \circ S_n(T) - S_n(L + T) \| + \| S_n(L + T) - \exp(L + T) \| \\ &\leq \| \exp(L) - S_n(L) \| \| \exp(T) \| + \| S_n(L) \| \| \exp(T) - S_n(T) \| \\ &+ \| S_n(L) \circ S_n(T) - S_n(L + T) \| + \| S_n(L + T) - \exp(L + T) \| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3. Soit $(X, \|\cdot\|) = (l^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, et soit la base canonique de Schauder $\{e_n\}_{n \geq 1}$ vue à l'exercice 1 de la série 3. Alors $\{e_n\}$ est une suite bornée dans l^p sans sous-suite convergente. Donc l'opérateur identité $I : l^p \rightarrow l^p$ n'est pas compact.

4. (a) Soient $T, L \in \mathcal{L}(X, Y)$ compacts et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Nous devons montrer que $\alpha T + \beta L$ est compact. Soit une suite bornée $\{x_n\} \subset X$. Comme T est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_j}\}$ telle que $\{Tx_{n_j}\} \subset Y$ est convergente. Comme L est compact, nous pouvons extraire de $\{x_{n_j}\}$ une sous-suite $\{x_{n_{j_k}}\}$ telle que $\{Lx_{n_{j_k}}\}$ converge dans Y . Mais alors $\{(\alpha T + \beta L)x_{n_{j_k}}\}$ converge dans Y .
- (b) Supposons que S est compact et considérons une suite bornée quelconque $\{x_n\} \subset X$. Comme S est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $\{Sx_{n_k}\}$ converge dans Y . Mais alors $\{(T \circ S)x_{n_k}\}$ converge dans Z car $T : Y \rightarrow Z$ est continu.
- Supposons que T est compact et considérons une suite bornée quelconque $\{x_n\} \subset X$. Comme S est borné, la suite $\{Sx_n\} \subset Y$ est bornée. Comme T est compact, il existe une sous-suite $\{Sx_{n_k}\} \subset Y$ telle que $\{T(Sx_{n_k})\}$ converge dans Z .
5. Soit $n = \dim R(T) \in \mathbb{N}$ (si cette dimension est nulle, T est l'opérateur nul et donc compact). Le sous-espace vectoriel normé $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ étant de dimension finie, il peut être identifié avec $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$ pour une certaine norme $\|\cdot\|_{\mathbb{F}^n}$. Cette norme est équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{F}^n$ définie par $\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$ (voir l'exercice 2 de la série 3). Comme toute suite bornée dans $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ admet une sous-suite qui converge, on déduit que toute suite bornée dans $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ admet une sous-suite qui converge. Soit maintenant une suite $\{x_n\}$ bornée dans X . Alors $\{Tx_n\} \subset R(T)$ est une suite bornée puisque T est un opérateur linéaire borné. Il existe donc une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $\{Tx_{n_k}\}$ est convergente.
- Attention: une suite bornée dans un evn de dimension infinie n'admet pas forcément une sous-suite convergente! Voir le corrigé de l'exercice 3 ci-dessus.
6. Pour tout $x \in l^\infty$, on a

$$\|Sx\|_\infty \leq \|x\|_\infty, \quad \|Tx\|_\infty = \|x\|_\infty, \quad \|Px\|_\infty \leq \|x\|_\infty,$$

et donc S, T, P sont bornés avec $\|S\|, \|P\| \leq 1$ et $\|T\| = 1$. De plus, en posant $z = (0, 1, 0, 0, \dots)$, on obtient

$$\|Sz\|_\infty = \|Pz\|_\infty = 1$$

avec $\|z\|_\infty = 1$, et ainsi $\|S\| = \|P\| = 1$.

Clairement S est surjectif mais pas injectif (par exemple $S(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$), T est injectif mais pas surjectif (par exemple $(1, 0, 0, \dots) \notin R(T)$), et P n'est ni injectif ni surjectif. De plus

$$S \circ T = I \neq P = T \circ S.$$

Remarque. Si X est $\mathbb{F}^n$ muni de n'importe quelle norme, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors tout opérateur linéaire $A : X \rightarrow X$ est borné (voir l'exercice 5 de la série 3), et même compact (conséquence de l'exercice 5 ci-dessus). Un résultat d'algèbre linéaire assure que, pour un opérateur linéaire $A : X \rightarrow X$ avec X de dimension finie, on a les équivalences

$$A \text{ injectif} \Leftrightarrow A \text{ surjectif} \Leftrightarrow A \text{ bijectif}.$$

On voit ici que sans l'hypothèse que X est de dimension finie, ces équivalences ne sont plus vraies en général. Supposons que X est de dimension finie et $A \circ B = I$ avec $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Alors A est surjectif car $x = A(Bx)$ pour tout $x \in X$ et donc A est bijectif (X étant supposé de dimension finie). L'application réciproque $A^{-1} : X \rightarrow X$ est linéaire et $A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = I$, d'où

$$B = (A^{-1} \circ A) \circ B = A^{-1} \circ (A \circ B) = A^{-1} \circ I = A^{-1}.$$