

1. Supposons d'abord que T est fermé. Par définition, $G(T)$ est fermé dans $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$. Supposons encore que $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$. Alors $(x_n, Tx_n) \in G(T)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ dans $X \times Y$. Comme $G(T)$ est fermé, $(x, y) \in G(T)$ et ainsi $y = Tx$.

Supposons ensuite que T n'est pas fermé, c'est-à-dire que $G(T)$ n'est pas fermé dans $X \times Y$. Il existe donc une suite $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(T)$ telle que $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ et $(x, y) \notin G(T)$. En conséquence, $x_n \rightarrow x$, $Tx_n = y_n \rightarrow y$ et $y \neq Tx$.

2. Supposons que le Théorème du Graphe Fermé est vrai et soient des espaces de Banach X et Y . Considérons un opérateur bijectif $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Comme T est continu, $G(T)$ est fermé dans $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ (cette affirmation constitue la partie facile du Théorème du Graphe Fermé, partie dont la preuve donnée au cours ne repose pas sur le Théorème de l'Inverse Borné). Comme $G(T^{-1}) = \{(y, x) : (x, y) \in G(T)\}$, il est facile de vérifier que $G(T^{-1})$ est alors aussi fermé dans $(Y \times X, \|\cdot\|_{Y \times X})$. Par le Théorème du Graphe Fermé, $T^{-1} : Y \rightarrow X$ est borné.

3. Vérifions que $C : X \rightarrow Y$ est linéaire. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ et $x_1, x_2 \in X$ quelconques, et posons $y_1 = Cx_1$ et $y_2 = Cx_2$. On obtient

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2 = B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

et on en déduit $C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2$.

Vérifions que C est fermé. Supposons que $x_n \rightarrow x$ et $Cx_n \rightarrow y$ et montrons que $y = Cx$ (cf le problème 1). Posons $y_n = Cx_n$, de sorte que $y_n \rightarrow y$. Comme A et B sont continus, $Ax_n \rightarrow Ax$ et $By_n \rightarrow By$. Or $Ax_n = By_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $y_n = Cx_n$), et donc $Ax = By$. Ainsi $y = Cx$.

Comme X et Y sont des espaces de Banach, le Théorème du Graphe Fermé garantit que C est borné.

4. D'après le Problème 1, T est fermé et, par le Théorème du Graphe Fermé, T est borné. Clairement, T est bijectif et donc T^{-1} est borné, d'après le Théorème de l'Inverse Borné. Par conséquent, pour tout $x \in X$, $\|x\|_2 = \|Tx\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$ et $\|x\|_1 = \|T^{-1}x\|_1 \leq \|T^{-1}\| \|x\|_2$. D'où $\|T^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$ pour tout $x \in X$.

5. Supposons le théorème VI.20 vrai. Soient des espaces de Banach X et Y , et soit un opérateur surjectif $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Comme T est continu, $G(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ (c'est la partie facile du Théorème du Graphe Fermé). De plus $X \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$. La surjectivité de T implique que $X \times Y = (X \times \{0\}) + G(T)$. Comme $X \times Y$ est un espace de Banach, le théorème VI.20 assure qu'il existe $\beta > 0$ tel que chaque $(x, y) \in X \times Y$ peut être représenté comme

$$(x, y) = (x_1, 0) + (x_2, Tx_2), \quad x_1 \in X, \quad x_2 \in X, \quad (1)$$

$$\|(x_1, 0)\|_{X \times Y} \leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y} \text{ et } \|(x_2, Tx_2)\|_{X \times Y} \leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y}.$$

Choisissons $y \in Y$ tel que $\|y\|_Y < 1/\beta$. Pour $x = 0$, soient $x_1, x_2 \in X$ donnés par (1). Nous obtenons

$$0 = x = x_1 + x_2, \quad y = Tx_2, \quad \|x_2\|_X = \|x_1\|_X \leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y} = \beta \|y\|_Y < 1.$$

D'où $y \in T(B_X(0, 1))$, ce qui montre que $B_Y(0, 1/\beta) \subset T(B_X(0, 1))$.

6. Si $Y = \{0\}$, alors T est clairement surjectif. Supposons maintenant que $Y \neq \{0\}$. Comme la boule $B_X(0, 1)$ dans X est un ouvert, $T(B_X(0, 1))$ est un ouvert dans Y (l'application T étant ouverte par hypothèse). Comme $0 = T0 \in T(B_X(0, 1))$, il existe $r > 0$ tel que $B_Y(0, r) \subset T(B_X(0, 1))$. Il en résulte que T est surjectif: si $y \in Y \setminus \{0\}$, alors $r\|2y\|_Y^{-1}y \in B_Y(0, r)$ et donc il existe $x \in B_X(0, 1)$ tel que $r\|2y\|_Y^{-1}y = Tx$. Ainsi $y = T\left((2\|y\|_Y/r)x\right) \in R(T)$.
7. Soit des evn X et Y sur $\mathbb{F}$ avec $X \neq \{0\}$. Choisissons $x_0 \in X$ de norme 1. Par le §5.14 du cours, il existe $F \in X^*$ telle que $F(x_0) = \|F\|_{X^*} = 1$. Pour $y \in Y$, soit l'opérateur linéaire $L_y : X \rightarrow Y$ défini par $L_y x = F(x)y$ (linéaire en x). Il satisfait $y = L_y x_0$ et il est borné car

$$\forall x \in X \quad \|L_y x\|_Y \leq \|F\|_{X^*} \|x\|_X \|y\|_Y = \|x\|_X \|y\|_Y$$

et de plus $\|L_y\| \leq \|y\|_Y$. Comme $\|y\|_Y = \|L_y x_0\|_Y \leq \|L_y\| \|x_0\|_X = \|L_y\|$, on a $\|L_y\| = \|y\|_Y$. Ainsi l'application linéaire $y \rightarrow L_y \in \mathcal{L}(X, Y)$ préserve les normes et est donc injective. Il s'ensuit que Y est congruent avec le sous-espace vectoriel $A = \{L_y : y \in Y\}$ de $\mathcal{L}(X, Y)$. Finalement A est fermé dans $\mathcal{L}(X, Y)$: si la suite $\{y_n\} \subset Y$ est telle que $L_{y_n} \rightarrow L \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors $L = L_y \in A$ avec $y = Lx_0$. En effet, pour tout $x \in X$,

$$Lx \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (L_{y_n} x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x)y_n) = F(x) \lim_{n \rightarrow \infty} (L_{y_n} x_0) \stackrel{(**)}{=} F(x)Lx_0 = F(x)y = L_y x.$$

L'égalité $(*)$ résulte de

$$\|L_{y_n} x - Lx\|_Y \leq \|L_{y_n} - L\| \|x\|_X,$$

qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. L'argument pour $(**)$ est le même.

Conclusion: si $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet, alors A aussi (cf exercice 3 de la série 1) et donc Y aussi.